Matemàtiques

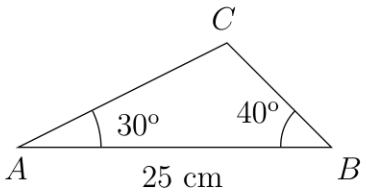
Trigonometria i geometria del pla (temari anterior)

Solucions · 17 exercicis

Proves d'accés a la universitat (PAU) de Catalunya. Ordenats del més recent al més antic.
Retalls dels exàmens i pautes oficials (selecat.cat / universitats.gencat.cat).

1. PAU 2003 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 3 (Qüestions)

3. *Calculeu l'àrea del triangle ABC representat en l'esquema següent:*



L'angle α en C compleix $\alpha = 180^o - 40^o - 30^o = 110^o$. La longitud b del costat AC complirà

$$\frac{b}{\sin(40^o)} = \frac{25}{\sin(110^o)} \Leftrightarrow b = \frac{25\sin(40^o)}{\sin(110^o)} \sim 17.10100716 \text{ cm}$$

L'altura h del triangle és

$$h = b\sin(30^o) = \frac{b}{2} \sim 8.550503581 \text{ cm}$$

Finalment, l'àrea serà

$$\frac{25h}{2} \sim 106.8812948 \text{ cm}^2$$

Poseu un punt i mig (1.5) pel planteig correcte i l'expressió de l'àrea del triangle i deixeu el mig punt restant (0.5) pel càlcul final. Valoreu sempre el coneixement que l'alumne demostri de les tècniques de resolució de triangles.

---

2. PAU 2003 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 2 (Problemes)

2. *D'un triangle sabem que la suma de les longituds de dos costats a i b és de 11 m., que l'angle C oposat al tercer costat val 30^o i que l'àrea és de 7 m^2. Calculeu*

a) La longitud de cada un dels costats del triangle.

b) Els angles del triangle.

---

a) En primer lloc s'ha de tenir en compte que tenim $a+b=11$. Si designem per h l'altura sobre el costat a es compleix $h = b \times \sin(30^o) = \dfrac{b}{2} = \dfrac{(11-a)}{2}$ de forma que la condició sobre l'àrea del triangle, que es posarà inicialment com $\dfrac{(a \times h)}{2} = 7$ dóna finalment

$$a^2 - 11a + 28 = 0$$

que té com a solucions $a = 7$ i $a = 4$. Totes dues solucions són equivalents intercanviant els papers de a i b de forma que triarem $a = 7$ i $b = 4$. El tercer costat c es pot obtenir aplicant el teorema del cosinus

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \times a \times b \times \cos(30^o) \Leftrightarrow c = \sqrt{65 - 28\sqrt{3}} \sim 4.062336443 \text{ m}$$

b) Si es designa per α l'angle entre els costats b i c el teorema del cosinus també dóna:

$$\cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \times b \times c} \sim -0.5076334412$$

de forma que $\alpha \sim 120.5063226^o$. L'angle que resta serà

$$\beta = 180^o - 30^o - \alpha \sim 29.49367736^o$$

Compteu dos punts (2) per cada apartat i intenteu-los puntuar de forma independent. Valoreu sobretot el coneixement que l'alumne demostri de les tècniques de resolució de triangles i no descompteu més d'un punt (1) del total de quatre per errors en els càlculs.

3. PAU 2003 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 2 (Problemes)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

4. PAU 2002 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 4 (Qüestions)

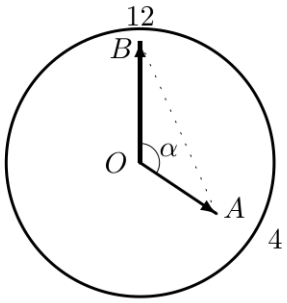
4. *Les agulles d'un rellotge de paret fan 10 i 12 centímetres respectivament.*

a) Quina és la distància entre els seus extrems quan el rellotge assenyala les quatre?

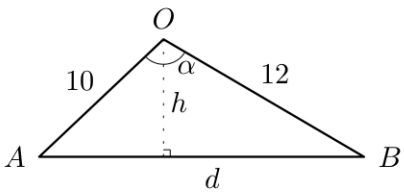
b) Quina és la superfície del triangle que determinen a aquesta hora?

---

a) Tenim el diagrama



on $\alpha = 120^{\text{o}}$. Si considerem el triangle OAB podem fer el diagrama



Aplicant el teorema del cosinus

$$d^2 = 12^2 + 10^2 - 2 \times 12 \times 10 \times \cos 120^{\text{o}} = 364$$

d'on $d = \sqrt{364} \simeq 19,078$.

b) Aplicant el teorema del sinus al triangle OAB,

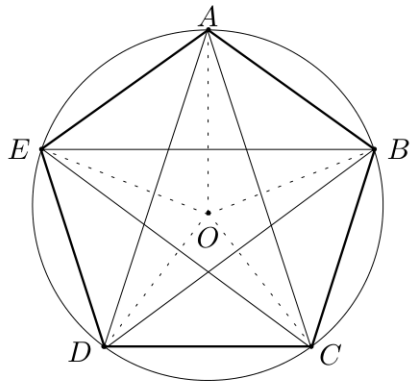
$$\sin \hat{A} = \frac{12 \times \sin \alpha}{d} = \frac{12 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{364}} \simeq 0,544$$

Aleshores $h = 10 \times \sin \hat{A} \simeq 5,44$ i l'àrea S és $S = \frac{1}{2} \times \sqrt{364} \times 10 \times \frac{6 \times \sqrt{3}}{\sqrt{364}} = 30 \times \sqrt{3} \simeq 51,96152$

Compteu un punt per cada apartat. Valoreu sempre el plantejament del problema i el coneixement que es demostri dels mètodes de resolució de triangles. Per errors de càlcul traieu com a màxim mig punt.

5. PAU 2002 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 2 (Problemes)

2. *Sobre una circumferència de radi 1 m i centre en el punt O considerem els cinc vèrtexs A, B, C, D, E d'un pentàgon regular (és a dir, amb els cinc costats de la mateixa longitud) com el del dibuix següent:*



(on hi hem dibuixat també els costats *AB, BC, CD i DE; les* diagonals *AC, BD, CE, DA i EB; i els radis que acaben en cada un dels vèrtexs OA, OB, OC, OD i OE).*

Calculeu:

a) *L'angle que formen el radi que acaba en el vèrtex A amb el costat AB i l'angle que formen en el vèrtex A els dos costats que el tenen com extrem (és a dir, l'angle en A entre els costats EA i AB).*

b) *La longitud de cada un dels costats del pentàgon.*

c) *La longitud de qualsevol de les diagonals (per exemple la EB).*

d) *L'àrea del triangle EAB.*

---

a) Si considerem el triangle OAB, tenim en compte que OA i OB valen 1 i que l'angle en O val $\dfrac{360^o}{5} = 72^o$, els angles en A i B valdran $\alpha = 54^o$.

b) Aplicant el teorema del cosinus al triangle OAB tindrem

$$(AB)^2 = 1^2 + 1^2 \quad 2 \times 1 \times \cos 72^o$$

de forma que $AB \simeq 1,1755$.

c) En el triangle EAB l'angle en A val $2\alpha = 108^o$. Aplicant el teorema del cosinus

$$EB = \sqrt{2(AB)^2 \quad 2(AB)^2 \cos 108^o} \simeq 1,90211$$

d) Com que el triangle EAB és isòsceles els angles en B i en E són iguals i valen $\beta = 36^o$. L'altura h des de A serà

$$h = (AB) \sin 36^o \simeq 0,69098$$

i per tant l'àrea $\dfrac{(EB) \times h}{2} \simeq 0,65716$.

Compteu un punt per cada apartat. Valoreu la interpretació correcta de l'enunciat i el coneixement que es demostri de les tècniques per a resoldre triangles. Per errors en el càlculs no traieu més d'un punt.

---

6. PAU 2002 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 2 (Problemes)

2. *D'un paral·lelogram sabem que el costat més llarg mesura 20 cm, que la seva àrea és de 120 cm^2 i que l'angle més petit val 30º.*

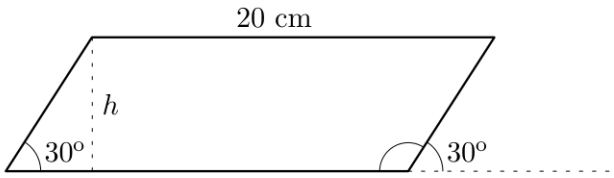
Determineu:

a) El valor de l'altre angle del paral·lelogram (el més gran).

b) La longitud del costat petit.

c) El que mesura la diagonal més llarga.

Un esquema de la situació seria:



Aleshores:

a) L'altre angle del paral·lelogram valdrà $180^o - 30^o = 150^o$.

b) Si l'àrea del paral·lelogram és 120 i prenem com a base el costat llarg, l'altura h serà $h = \dfrac{120}{20} = 6$ cm. Ara podem calcular el costat petit que valdrà $\dfrac{6}{\sin 30^o} = 12$ cm.

c) Aplicant el teorema del cosinus les diagonals valen

$$\sqrt{12^2 + 20^2 - 2 \times 12 \times 20 \times \cos 150^o} \simeq 30,9789$$
$$\sqrt{12^2 + 20^2 - 2 \times 12 \times 20 \times \cos 30^o} \simeq 11,3273$$

(ja hauria de ser clar que només s'ha de calcular la primera).

Compteu dos punts per l'apartat b) i un punt pels altres dos apartats. Valoreu que el dibuix de la situació sigui el correcte i el coneixement que es demostri de les tècniques de resolució de triangles. Per errors de càlcul no resteu més d'un punt.

7. PAU 2001 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 2 (Qüestions)

2. *Siguin A, B i C els tres vèrtexs d'un triangle equilàter de costat 3 cm i P el punt del costat AB que és a 1 cm del vèrtex A. Quina és la longitud del segment CP?*

Els tres angles d'un triangle equilàter són de 60º. Aplicant el teorema del cosinus al triangle APC tenim

$$(PC)^2 = 1^2 + 3^2 - 2 \times 3 \times \cos 60^o = 7$$

d'on $PC = \sqrt{7} \sim 2,64575$.

Compteu fins a un punt i mig si la fórmula per a determinar PC és correcta i el mig punt que queda per la resta de càlculs.

8. PAU 2001 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 1 (Problemes)

Problemes

1. *Hem de fer un mapa d'una certa zona geogràfica. A, B i C són els cims de tres muntanyes de la mateixa alçària, de forma que les posicions de A i B són ben conegudes i ja estan representades en el mapa, mentre que la posició de C s'ha de determinar. Pugem a dalt del cim A i mesurem l'angle entre la línia $A \quad B$ i la línia $A \quad C$, que és de 68^o. Pugem a dalt del cim B i aquí mesurem l'angle entre les línies $B \quad C$ i $B \quad A$, que resulta ser de 35^o. En el mapa que tenim, la distància sobre el paper entre A i B és de 3 cm.*

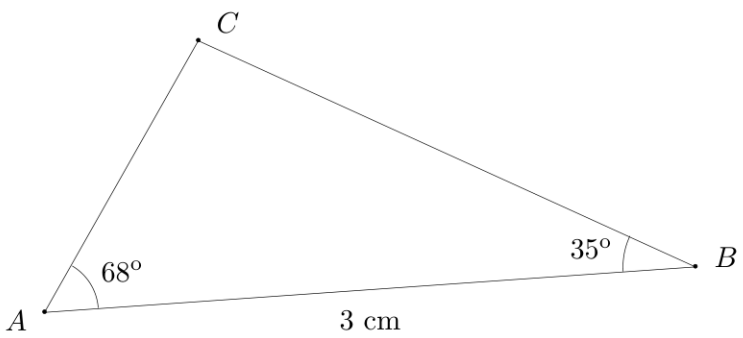
a) *Feu un diagrama de la situació i determineu quin angle formen en C les línies $C \quad A$ i $C \quad B$.*

b) *Quines seran, sobre el mapa, les distàncies entre A i C i entre B i C?*

c) *Si el mapa és a escala 1:50000, calculeu la distància real entre els punts A, B i C.*

---

a) L'esquema del que es veu sobre el mapa és



L'angle d'aquest triangle en el vèrtex C serà

$$180^o \quad 68^o \quad 35^o = 77^o$$

b) Aplicat el teorema de sinus obtenim

$$BC = 3\frac{\sin 68^o}{\sin 77^o} \sim 2,8547 \text{ cm}$$
$$AC = 3\frac{\sin 35^o}{\sin 77^o} \sim 1,7659 \text{ cm}$$

c) Per a obtenir les distàncies real només s'ha de multiplicar per 50.000. S'obté

$$d(A,B) = 3 \times 50.000 = 150.000 \text{ cm} = 1,5 \text{ km}$$
$$d(B,C) \sim 2,8547 \times 50.000 \sim 142.736 \text{ cm} = 1,427 \text{ km}$$
$$d(A,C) \sim 1,7659 \times 50.000 \sim 88.299,58 \text{ cm} \sim 883 \text{ m}$$

Compteu 1 punt per l'apartat a), 2 punts per l'apartat b) i 1 punt per l'apartat c). En l'apartat b) valoreu sobretot el coneixement dels mètodes de resolució de triangles. Intenteu puntuar els apartats independentment i resteu com a màxim 1 punt per errors de càlcul en el total dels 4 punts.

9. PAU 2001 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 2 (Qüestions)

2. *La circumferència C passa pel punt $A = (4, 0)$ i és tangent a la recta $y = x$ en el punt $B = (4, 4)$.*

a) Determineu l'equació de la recta que passa per B i pel centre de la circumferència C.

b) Trobeu el centre de C i calculeu el seu radi.

a) La recta determinada pel punt B i el centre de la circumferència i la recta tangent a aquesta circumferència en el punt B són perpendiculars. Per tant, el pendent d'aquesta recta és -1 i la seva equació serà $y - 4 = -(x - 4)$ (passa per $B = (4, 4)$).

b) Els punts P que equidisten de A i B són els de la forma $P = (x, 2)$ per a qualsevol valor de x. Per tant, el centre de la circumferència està en la recta $y - 4 = -(x - 4)$ i és de la forma $(x, 2)$. Amb això obtenim que aquest centre ha de ser el punt $(6, 2)$. El radi r de la circumferència serà la distància d'aquest punt a A o B, que resulta $r = \sqrt{(6-4)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{8}$

Compteu fins a 1 punt per cada apartat i resteu, en total, com a màxim mig punt per els possibles errors en els càlculs.

10. PAU 2001 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 4 (Qüestions)

4. *Els tres costats d'un triangle mesuren 3 cm, 4 cm i 5 cm. Calculeu els seus angles i la seva àrea.*

El triangle és rectangle, ja que $5^2 = 3^2 + 4^2$, i l'angle recte és el que formen els costats de longitud 3 i 4. Tenint en compte l'anterior, el cosinus de l'angle α que formen el catet de longitud 4 amb la hipotenusa de longitud 5 serà

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}$$

d'on $\alpha = 36,87^{\circ}$. De la mateixa manera podem deduir que el cosinus de l'angle β que formen el catet de longitud 3 amb la hipotenusa serà

$$\cos \beta = \frac{3}{5}$$

d'on $\beta = 53,13^{\circ}$

L'àrea del triangle es pot calcular prenent com a base 4 i com altura 3, de forma que el seu valor serà

$$\text{Àrea} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

El més probable és que trobeu que els angles es determinen aplicant el teorema del cosinus, sense observar que el triangle és rectangle fins al final dels càlculs. En aquests casos, valoreu el coneixement que es demostri sobre el mètode. Compteu fins a 1 punt per la determinació dels angles i deixeu l'altre punt per la determinació de l'àrea (aquí també hi pot haver diferencies significatives entre els que utilitzin el fet que el triangle és rectangle i els que no ho facin. En tot cas, valoreu com es determina l'altura del triangle). Teniu en compte també que, segons els arrodoniments que es facin servir en els càlculs, els resultats finals poden ser bastant discrepants i que, per tant, s'haurà de valorar principalment la correcció en els mètodes utilitzats.

11. PAU 2001 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 2 (Problemes)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

12. PAU 2001 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 3 (Qüestions)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

13. PAU 2000 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 4 (Qüestions)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

14. PAU 2000 · Setembre · Sèrie 6 · Exercici 2 (Problemes)

2. a) Designem per x la distància entre A i B. En el triangle rectangle ABC tindrem: $\tan 5,6^{\text{o}} = 10/x$. Per tant $x = 10/\tan 5,6^{\text{o}} = 101,98788952$

   b) Designem per y la distància del vaixell a la Berta (distància entre V i B). En el triangle BAV l'angle en V val $180 - 81,6 - 75,5 = 22,9^{\text{o}}$. El teorema del sinus aplicat al triangle BAV ens diu que

$$\frac{y}{\sin 75,5^{\text{o}}} = \frac{x}{\sin 22,9^{\text{o}}} \ .$$

   D'aquí s'obté $y = (x \sin 75,5)/\sin 22,9 = 253,74777$ metres. L'angle en B és mes gran que l'angle en A. Per tant AV és més gran que BV.

Òbviament no cal que els alumnes facin les operacions amb tants decimals. Compteu 1,5 punts per l'apartat (a) i 2,5 punts per l'apartat (b). Dels 2,5 punts de (b), compteu-ne 1,5 pel càlcul de $y = BV$ i 1 pel raonament final.

15. PAU 2000 · Setembre · Sèrie 6 · Exercici 4 (Qüestions)

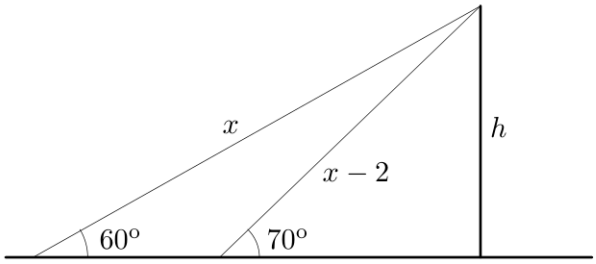
4. a) L'equació d'una circumferència de centre $(a\,,\,b)$ i radi R és $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, que s'escriu $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$. Comparant aquesta expressió amb la que ens donen veiem que $2a = 6$, $2b = -4$ i que $a^2 + b^2 - R^2 = 8$. Per tant $a = 3$, $b = -2$ i $R = \sqrt{5}$.

   b) Substituint $x = 4$ i $y = 0$ a l'equació que ens han donat veiem que es converteix en la identitat $16 - 24 + 8 = 0$. La direcció del radi que uneix el centre amb el punt $(4\,,\,0)$ vindrà donat pel vector $(4\,,\,0) - (3\,,\,-2) = (1\,,\,2)$. Les rectes perpendiculars a aquesta direcció tenen per equació $x + 2y = C$. Si imposem que passi pel punt $(4\,,\,0)$ tindrem $C = 4$. La recta tangent que ens demanen és, doncs, $x + 2y = 4$.

Compteu 1 punt per apartat.

16. PAU 2000 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4 (Qüestions)

4. Siguin h l'alçària del pal i x la llargada de cada un dels cables. Tindrem el següent diagrama:



S'obtenen les condicions $h/(x-2) = \sin 70^\circ$, $h/x = \sin 60^\circ$. Dividint,

$$\frac{x-2}{x} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 70^\circ} (\simeq 0.9216).$$

Per tant $x \simeq 25.5118$. La solució és $6x \simeq 153.0708$ m.

Compteu un punt i mig pel planteig de les equacions (hi pot haver altres camins correctes per arribar a la solució) i deixeu el mig punt que queda pels càlculs explícits.

17. PAU 2000 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 4 (Qüestions)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.