Matemàtiques

Probabilitat

Solucions · 7 exercicis

Proves d'accés a la universitat (PAU) de Catalunya. Ordenats del més recent al més antic.
Retalls dels exàmens i pautes oficials (selecat.cat / universitats.gencat.cat).

1. PAU 2026 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 3

3.1

Anomenarem X el nombre d'aerogeneradors en funcionament. Per a arribar als 1 000 MW, han de funcionar necessàriament els 10 aerogeneradors. Com que cadascun funciona, independentment dels altres, amb probabilitat $1 - 0{,}1 = 0{,}9$, la probabilitat que això passi és

$$P = 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot \cdots \cdot 0{,}9 = 0{,}9^{10} = 0{,}3486\ldots$$

També podem argumentar que el nombre de generadors en funcionament segueix una distribució binomial $X \sim B(n = 10, p = 0{,}9)$ i arribem al mateix resultat.

3.2

Per tal de superar els 150 MW, el nombre d'aerogeneradors funcionant X ha de ser almenys $X \geq 2$. Això és el contrari del fet que en funcioni només un o cap i, per tant, la probabilitat és

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0{,}1^{10} - 10 \cdot (0{,}1)^9 \cdot (1 - 0{,}1) \\ &= 1 - 0{,}0000000091 = 0{,}9999999909. \end{aligned}$$

Per a calcular $P(X = 1)$ podem, o bé argumentar amb la binomial, o bé raonar directament que hem d'escollir un dels deu generadors i imposar que aquest un funcioni i que els altres nou estiguin aturats.

3.3

Per a calcular l'àrea d'una pala, primer trobem els punts de tall entre les dues corbes:

$$2x^3 = 8x \implies 2x^3 - 8x = 0 \implies x(2x^2 - 8) = 0.$$

Obtenim les tres solucions $x = -2, 0, 2$. Per a calcular l'àrea, hem de fer les dues integrals següents (o comprovar que les funcions són antisimètriques i fer només una integral):

$$\int_{-2}^{0} (2x^3 - 8x)dx + \int_{0}^{2} (8x - 2x^3)dx = \left[\frac{x^4}{2} - 4x^2\right]_{-2}^{0} + \left[4x^2 - \frac{x^4}{2}\right]_{0}^{2} =$$

$$= 0 - \frac{(-2)^4}{2} + 4(-2)^2 + 4 \cdot 2^2 - \frac{2^4}{2} - 0 = 16\ m^2.$$

Per tant, l'àrea de cada pala és de 16 metres quadrats.

2. PAU 2026 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3

Exercici 3

3.1.

Calculem primer la probabilitat que un seguidor del grup aconsegueixi comprar una entrada al web. Considerem els successos:

ES = “Obtenir entrada al sorteig”,

W = “Intentar comprar-la al web”,

EW = “Aconseguir entrada al web”.

A partir de les dades de l’enunciat, tenim que

$$P(ES) = 0{,}16,$$

$$P(W) = (1 - 0{,}16) \cdot 6/7 = 0{,}72,$$

$$P(EW) = P(W) \cdot 0{,}25 = 0{,}18.$$

Per tant, en total el $16 + 18 = 34$ per cent dels seguidors d’aquest grup al municipi aconsegueixen entrada per al concert. Si el 16% dels seguidors corresponen a 24 persones, el 34% correspondran a:

$\frac{24}{16} = \frac{x}{34} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{x}{34} \Rightarrow x = 17 \cdot 3 = 51$ persones.

3.2.

Sigui noE el succés “No tenir entrada per al concert”. Ens demanen $P(W|noE)$. Per la llei de Bayes,

$$P(W|noE) = \frac{P(noE|W)P(W)}{P(noE)}.$$

De l’apartat anterior sabem que la probabilitat de tenir entrada és del 34%, per tant $P(noE) = 1 - 0{,}34 = 0{,}66$. Sabem també que $P(W) = 0{,}72$ i $P(noE|W) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$. Per tant,

$$P(W|noE) = \frac{0{,}75 \cdot 0{,}72}{0{,}66} \approx 0{,}82.$$

3.3. Tenim la funció polinòmica $S(t) = -t^3 + 12t^2 - 30\,t + 90$, a l’interval $t \in [0, 5]$; òbviament és contínua, per ser polinòmica. L’enunciat ens demana si en algun moment $S(t)$ valdrà 100, és a dir,

$$-t^3 + 12t^2 - 30\,t + 90 = 100.$$

Si considerem la nova funció $D(t) = S(t) - 100$, el problema es transforma en saber si $D(t) = 0$ en algun moment $t \in [0,5]$. Com que D també és contínua, i tenim que

$$D(0) = -10 < 0 \quad \text{i} \quad D(5) = 15 > 0,$$

es compleixen les hipòtesis del teorema de Bolzano i, per tant, es pot afirmar que existeix un punt $c \in (0,5)$ tal que $D(c) = 0$. Aproximem-lo amb una dècima de precisió:

$$D(2) = -30 < 0 \Longrightarrow \exists\, c \in (2,5) \text{ tal que } D(c) = 0,$$

$$D(4) = -2 < 0 \Longrightarrow \exists\, c \in (4,5) \text{ tal que } D(c) = 0,$$

$$D(4'5) = 6'85 > 0 \Longrightarrow \exists\, c \in (4,4'5) \text{ tal que } D(c) = 0,$$

$$D(4'2) = 1'592 > 0 \Longrightarrow \exists\, c \in (4,4'2) \text{ tal que } D(c) = 0,$$

$$D(4'1) = -0'201 < 0 \Longrightarrow \exists\, c \in (4'1,4'2) \text{ tal que } D(c) = 0.$$

Així doncs, els llums de la sala s'activaran aproximadament al cap de 4,1 minuts d'haver començat a sonar la cançó més famosa del grup.

Criteris de correcció: (3.1) Compteu 0,5 punts per calcular el percentatge de seguidors que obtenen entrada, i 0,25 punts pel nombre de persones que això representa. **(3.2)** Compteu 0,25 punts pel planteig del problema i 0,5 pel càlcul de la probabilitat demanada. **(3.3)** Compteu 0,25 punts pel planteig del problema i per comentar la continuïtat de la funció; 0,5 per la primera aplicació del teorema de Bolzano correctament raonada, i 0,25 punts per l'aproximació fins a una dècima.

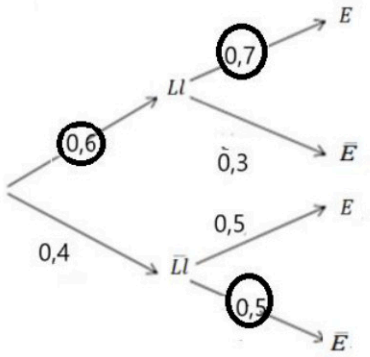
3. PAU 2026 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 3

3.1. Considerem els successos aleatoris següents:

Ll = ``*llegir almenys dos llibres al mes*",

E = ``*fer un mínim de quatre hores setmanals d'esport*".

Les dades del problema ens diuen que $P(Ll) = 0{,}6$, $P(E|Ll) = 0{,}7$, i $P(\bar{E}|\bar{Ll}) = 0{,}5$. Podem visualitzar-les en el diagrama d'arbre adjunt:



Pel teorema de la probabilitat total:

$$P(E) = P(Ll) \cdot P(E|Ll) + P(\overline{LL}) \cdot P(E|\overline{LL}) = \ 0{,}6 \cdot 0{,}7 + 0{,}4 \cdot 0{,}5 =$$

$$= 0{,}42 + 0{,}20 = 0{,}62.$$

3.2. Per la fórmula de Bayes:

$$P(LL|\bar{E}) = \frac{P(LL \cap \bar{E})}{P(\bar{E})} = \frac{P(\bar{E}|LL) \cdot P(LL)}{1 - P(E)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}6}{1 - 0{,}62} = 0{,}47 \ldots$$

3.3. Cal trobar els valors màxim i mínim absoluts de la funció $\boldsymbol{f(x) = 7 - x + \ln(2x - 1)}$ en l'interval $[\mathbf{1}, \mathbf{6}]$. La derivada de $\boldsymbol{f(x)}$ és $\boldsymbol{f'(x) = -1 + \frac{2}{2x-1}}$, que s'anul·la només per $\boldsymbol{x = \frac{3}{2}}$. Aquest punt crític es correspon a un màxim local, ja que la funció (a la vista del signe de la derivada) creix per $\boldsymbol{x < \frac{3}{2}}$ i decreix per $\boldsymbol{x > \frac{3}{2}}$. Com que $\boldsymbol{f(1) = 7 - 1 + \ln 1 = 6}$, $\boldsymbol{f\left(\frac{3}{2}\right) = 7 - \frac{3}{2} + \ln 2 \approx 6{,}19}$, i $\boldsymbol{f(6) = 7 - 6 + \ln 11 \ \approx 3{,}4}$, deduïm que el màxim i mínim absoluts de la funció a l'interval $[\mathbf{1}, \mathbf{6}]$ són als punts $\boldsymbol{f\left(\frac{3}{2}\right) \approx 6{,}19}$ i $\boldsymbol{f(6) \approx 3{,}4}$, respectivament. Per tant, segons aquest model, l'Alba ha practicat entre un mínim de $\mathbf{3{,}4}$ i un màxim de $\mathbf{6{,}19}$ hores per setmana d'esport.

Criteris de correcció: (3.1.) Compteu 0,25 per plantejar la llei de la probabilitat total, 0,25 per idenficar les dades del problema, i 0,25 pel càlcul. **(3.2.)** Compteu 0,25 per plantejar la fórmula de Bayes (o la fórmula de la probabilitat condicionada) i 0,5 pel càlcul. **(3.3.)** Compteu 0,25 per la derivada i per detectar que $3/2$ és l'únic punt crític, 0,25 per les zones de creixement i decreixement, 0,25 per argumentar el màxim global, i 0,25 per argumentar el mínim global.

4. PAU 2025 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 3

3. a) Considerem els esdeveniments aleatoris

$$I = ``practicar\ un\ esport\ d'impacte'',$$
$$S = ``patir\ sesamoïditis''.$$

De les dades de l'enunciat sabem que $P(I) = 0{,}45$, $P(\bar{I}) = 1 - 0{,}45 = 0{,}55$, $P(S \mid I) = 0{,}1$, i $P(S \mid \bar{I}) = 0{,}03$. Per la llei de les probabilitats totals, tenim:

$$P(S) = P(S|I)P(I) + P(S|\bar{I})P(\bar{I}) = 0{,}1 \cdot 0{,}45 + 0{,}03 \cdot 0{,}55 = 0{,}0615.$$

b) Per la fórmula de Bayes:

$$P(I|S) = \frac{P(S|I)P(I)}{P(S)} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}45}{0{,}0615} \approx 0{,}7317\ldots$$

c) El primer any s'obtenen el màxim de beneficis, per tant $x = 1$ és un màxim de la funció i $f'(1) = 0$; i aquests beneficis obtinguts són de 8.000 €, per tant, $f(1) = 8$. També ens diuen que el segon any hi va haver un punt d'inflexió en els beneficis, per tant, $f''(2) = 0$. Calculem la primera i segona derivades de $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ i imposem aquestes tres condicions:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c,$$
$$f''(x) = 6ax + 2b,$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0 \\ f(1) = 8 \Longrightarrow a + b + c = 8 \\ f''(2) = 0 \Longrightarrow 12a + 2b = 0 \end{array}\right\}$$

Restant les dues primeres equacions, obtenim $2a + b = -8$ i, combinant amb la tercera:

$$\left.\begin{array}{l} 12a + 2b = 0 \\ 2a + b = -8 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} 12a + 2b = 0 \\ -4a - 2b = 16 \\ \hline 8a = 16 \end{array}\right\} \Longrightarrow a = \frac{16}{8} = 2.$$

Per tant, $2 \cdot 2 + b = -8$, d'on $b = -12$. Finalment,

$$a + b + c = 8 \Longrightarrow c = 8 - a - b = 8 - 2 + 12 = 18.$$

La funció que compta els beneficis d'aquesta empresa és, doncs, $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x$.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,25 per plantejar la llei de la probabilitat total (o fer un arbre de decisió o similar); 0,25 per identificar correctament les dades del problema, i 0,25 pel càlcul. **(b)** Compteu 0,25 per plantejar correctament la fórmula de Bayes (o la fórmula de la probabilitat condicionada) i 0,5 pel càlcul. **(c)** Compteu 0,25 per imposar $f'(1) = 0$, 0,25 per imposar $f(1) = 8$, 0,25 per imposar $f''(2) = 0$ i 0,25 pel càlcul final.

5. PAU 2025 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3

3. a) Considerem els successos aleatoris següents:

$$A = \text{"la peça escollida és d'acer"},$$
$$F = \text{"la peça escollida és de ferro"},$$
$$D = \text{"la peça escollida és defectuosa"}.$$

De les dades de l'enunciat tenim $P(F) = 0{,}6$, $P(A) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$, $P(D|F) = 0{,}05$, $P(D|A) = 0{,}03$. Per la llei de probabilitats totals, la probabilitat que una peça sigui defectuosa és:

$$P(D) = P(D|F)P(F) + P(D|A)P(A) = 0{,}05 \cdot 0{,}6 + 0{,}03 \cdot 0{,}4 = 0{,}042.$$

b) Anomenem X el nombre de peces defectuoses en un paquet. De l'enunciat deduïm que X segueix una llei binomial amb $n = 5$ i probabilitat p. Per tant, la probabilitat que en un paquet hi hagi exactament quatre peces defectuoses és:

$$P(X = 4) = \binom{5}{4} p^4 (1 - p) = \frac{5!}{4!} p^4 (1 - p) = 5\, p^4 (1 - p) = 5(p^4 - p^5).$$

També podem argumentar directament sense fer servir la llei binomial. Com que hi ha quatre peces defectuoses, n'hi haurà exactament una que no ho és. La probabilitat que una en concret (per exemple, la primera) sigui bona i les altres quatre defectuoses és $(1 - p)p^4$. Com que hi ha cinc possibilitats per escollir quina és la peça bona, $P(X = 4) = 5(1 - p)p^4 = 5(p^4 - p^5)$.

c) Busquem els extrems relatius de la funció $f(p) = 5(p^4 - p^5)$.

$$f'(p) = 5(4p^3 - 5p^4) = 0 \quad \rightarrow \quad p = 0, \quad p = \frac{4}{5}.$$

Observem que $f(0) = 0$ i que $f\left(\frac{4}{5}\right) > 0$. Mirem el signe de la segona derivada:

$$f''(p) = 5(12p^2 - 20p^3) \quad \rightarrow \quad f''\left(\frac{4}{5}\right) = 5\left(12\left(\frac{4}{5}\right)^2 - 20\left(\frac{4}{5}\right)^3\right) < 0.$$

i deduïm que a $p = \frac{4}{5}$ la funció $f(p)$ assoleix un màxim local. Com que per $p \in (0, \frac{4}{5})$ la funció creix i per $p > \frac{4}{5}$ la funció decreix, es tracta d'un màxim absolut quan p és no negativa. I el valor màxim serà $f\left(\frac{4}{5}\right) = 5\left(\left(\frac{4}{5}\right)^4 - \left(\frac{4}{5}\right)^5\right) = 0{,}41$.

Criteris de correcció: a) Compteu 0,25 punts per plantejar la llei de la probabilitat total (o fer l'arbre de decisió o similar); 0,25 p. per identificar correctament les dades del problema, i 0,25 p. pel càlcul concret. **b)** Compteu 0,5 punts pel plantejament i 0,25 p. pel càlcul. **c)** Compteu 0,25 punts pel càlcul de la derivada i els punts crítics, 0,5 p. per argumentar que el màxim absolut en $p > 0$ es troba a $p = 4/5$, i 0,25 p. per trobar el valor d'aquest màxim.

6. PAU 2024 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 4

(a) Sigui A l'esdeveniment *"patir arrítmia"*. De l'enunciat sabem que $P(A) = 0.2$. D'entre les 4 escollides, el nombre de persones N que pateix arrítmies segueix una distribució binomial amb paràmetres $n = 4$ i $p = 0.2$. Passant al complementari, obtenim

$$P(N \geq 1) = 1 - P(N = 0) = 1 - (1 - 0.2)^4 = 0.5904.$$

(b) Sigui H l'esdeveniment *"obtenir diagnòstic positiu d'arrítmia a la prova del Holter"*. Siguin $\bar{A}$ *i* $\bar{H}$ els esdeveniments complementaris a A i a H, respectivament. Aleshores, de les dades de l'enunciat deduïm:

$$P(\bar{A}) = 0.8, \quad P(H \mid A) = 0.95 \quad \text{i} \quad P(H \mid \bar{A}) = 0.005.$$

Podem aplicar la fórmula de la probabilitat total:

$$P(H) = P(H \mid A) \cdot P(A) + P(H \mid \bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = 0.95 \cdot 0.2 + 0.005 \cdot 0.8 = 0.194.$$

(c) Per calcular la probabilitat condicionada que se'ns demana, farem servir la fórmula de Bayes:

$$P(A \mid \bar{H}) = \frac{P(A \cap \bar{H})}{P(\bar{H})} = \frac{P(A) \cdot P(\bar{H} \mid A)}{1 - P(H)} = \frac{0.2 \cdot (1 - 0.95)}{1 - 0.194} = 0.012 \ldots .$$

Criteris de correcció: (a) Compteu 0.5 pel plantejament i 0.25 pel càlcul. (b) Compteu 0.5 pel plantejament amb la fórmula de les probabilitats totals (o un arbre de decisió) i 0.25 pel càlcul. (c) Compteu 0.5 pel plantejament de la fórmula de Bayes (o de la probabilitat condicionada), i 0.5 pel càlcul.

A l'apartat (a) seria també correcte el càlcul (més llarg) de la probabilitat que N sigui 1,2,3,4, és a dir, $P(N = 1) + P(N = 2) + P(N = 3) + P(N = 4)$, amb la binomial. Compteu la màxima puntuació si el fan així de manera correcta i argumentada.

7. PAU 2024 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4

4.

a)

- Donat que hi ha dues A i una E, en la primera extracció tenim 3 casos favorables sobre 9 possibles; per tant, la probabilitat demanada és $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.
  [0,5 punts]
- Calculem primer la probabilitat que les dues boles siguin iguals. Això només pot passar si són dues A o dues S.

  $$P(dues\ A) = P(primera\ A\ i\ segona\ A) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{36} = P(dues\ S).$$

  Per tant, $P(dues\ diferents) = 1 - P(dues\ iguals) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{17}{18} = 0.944 \ldots$.
  Alternativament, podem argumentar directament de la manera següent: si la primera bola no és ni A ni S, segur que les dues seran diferents; si la primera bola és una A, hi ha 7 boles favorables per a la segona extracció (totes menys l'altra A); i

anàlogament, si la primera bola és una S, hi ha també 7 boles favorables per a la segona extracció. Per tant,

$$P(dues\ diferents) = P(primera\ no\ és\ ni\ A\ ni\ S) + P(primera\ A\ i\ segona\ no\ A) + P(primera\ S\ i\ segona\ no\ S) =$$
$$= \frac{5}{9} + \frac{2}{9}\cdot\frac{7}{8} + \frac{2}{9}\cdot\frac{7}{8} = \frac{17}{18}.$$

[0,75 punts]

b)

El nombre de boles A extretes segueix una llei binomial amb $n = 5$ i $p = \frac{2}{9}$.

- $P(cap\ A) = (1-p)^5 = \left(\frac{7}{9}\right)^5 = 0.284\ldots$.

  [0,5 punts]

- (ii) Passant al complementari, tenim

$$P(almenys\ 2\ A) = 1 - P(una\ A) - P(cap\ A) = 1 - \binom{5}{1}\left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{7}{9}\right)^4 - \left(\frac{7}{9}\right)^5 =$$
$$= 0.308\ldots\ .$$

[0,75 punts]

Criteris de correcció: (a) (i) Compteu 0,5. (ii) Compteu 0,5 pel plantejament i 0,25 pel càlcul. (b) (i) Compteu 0.5. (ii) Compteu 0,5 pel plantejament i 0,25 per fer-ne el càlcul.

Comentaris: És més llarg però l'apartat (b) (ii) es pot respondre també calculant amb la binomial $P(2A) + P(3A) + P(4A) + P(5A)$; doneu també aquestes respostes com a correctes en la mesura que estiguin ben fetes i ben argumentades.