Matemàtiques

Matrius i sistemes d'equacions lineals

Solucions · 123 exercicis

Proves d'accés a la universitat (PAU) de Catalunya. Ordenats del més recent al més antic.
Retalls dels exàmens i pautes oficials (selecat.cat / universitats.gencat.cat).

1. PAU 2026 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 2

2.1

Considerem la matriu de coeficients, A, i la matriu ampliada del sistema, A^*,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & k & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & k & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Calculant el determinant de la matriu A, tenim

$$|A| = 4 - 1 + 2k - 2 - 4 + k = 3k - 3,$$

$$|A| = 0 \Leftrightarrow 3k - 3 = 0 \Leftrightarrow k = 1.$$

Per tant, si $k \neq 1$, $rang(A) = 3$ i $rang(A^*) = 3$ i, pel teorema de Rouché-Frobenius, el sistema és compatible determinat perquè té 3 incògnites.

D'altra banda, si $k = 1$, $|A| = 0$ i, com que $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, deduïm que $rang(A) = 2$.
Per a estudiar el rang de la matriu A^* veiem que

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 3 + 1 - 6 - 2 + 2 = 0$$

i, pel mètode de l'orlat, $rang(A^*) = 2$. Com que $rang(A) = rang(A^*) = 2 < n\acute{u}mero\ d'inc\grave{o}gnites$, el teorema de Rouché-Frobenius ens assegura que el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

2.2

En l'apartat anterior hem vist que, per $k = 1$, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat. Per obtenir la seva solució en aquest cas, sumant la segona i tercera equacions, obtenim $y = 1 - z$ i, substituint a la tercera, $x = 1$. Per tant, la solució en aquest cas és $(x, y, z) = (1, 1 - z, z)$.

En l'apartat anterior hem vist que per a $k \neq 1$, el sistema és compatible determinat; és a dir, que té una solució única (que, en principi, depèn de k). Per a resoldre'l, fem servir el mètode de Cramer:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & k & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{3k - 3} = \frac{6 + 1 + 4k - 4 - 6 - k}{3k - 3} = \frac{3k - 3}{3k - 3} = 1,$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{3k-3} = \frac{2-2+6-1-8+3}{3k-3} = 0.$$

Per a calcular z podem continuar amb Cramer o fer servir una de les equacions:

$z = 2 - x - y = 2 - 1 - 0 = 1.$

Per tant, la solució del sistema per a $k \neq 1$ és el punt $(x, y, z) = (1, 0, 1)$. Efectivament, tal com indica l'enunciat, aquest punt solució NO depèn del valor de k.

2.3

Geomètricament, cadascuna de les equacions del sistema representa un pla a l'espai. Els plans que corresponen a la segona i tercera equacions estan fixos i es tallen en una recta r (són equacions independents). En canvi, el primer pla varia en funció del valor de k. Quan $k = 1$, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat, la qual cosa significa que els tres plans es tallen en una recta; forçosament, ha de ser la recta r, que estarà, per tant, continguda també dins el primer pla. En canvi, quan $k \neq 1$, el sistema és compatible determinat i els tres plans es tallen només en un sol punt, que és $(1,0,1)$; com que aquest punt no depèn de k, el primer pla varia en funció de k, però contenint sempre el punt $(1,0,1)$ —que també ha d'estar dins la recta r, ja que $(1,0,1)$ també és solució del sistema per a $k = 1$.

2. PAU 2026 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2

Exercici 2

2.1.

La matriu de coeficients i la matriu ampliada del sistema són:

$$A=\begin{pmatrix}1 & m & 1\\ 1 & 3 & 1\\ m & 1 & 1\end{pmatrix} \quad i \quad \bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & m & 1 & 4\\ 1 & 3 & 1 & 5\\ m & 1 & 1 & 4\end{array}\right)$$

Calculant el determinant de la matriu A, tenim

$$\begin{vmatrix}1 & m & 1\\ 1 & 3 & 1\\ m & 1 & 1\end{vmatrix}=3+m^2+1-3m-1-m=m^2-4m+3.$$

Per obtenir els valors crítics, fem

$$|A|=0 \Leftrightarrow m^2-4m+3=0 \Leftrightarrow m=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=3,\ 1.$$

En el cas $m\neq 1,3$, tenim $|A|\neq 0$, $rang(A)=rang(\bar{A})=3$ i, com que hi ha tres incògnites, el sistema és compatible determinat.

En el cas $m=3$, tenim $|A|=0$ i $\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}\neq 0$ per tant $rang(A)=2$. Per altra banda,

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 5\\ 3 & 1 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}=8\neq 0$$

i deduïm que $rang(\bar{A})=3$ i que el sistema és incompatible en aquest cas.

Finalment, en el cas $m=1$, tenim $|A|=0$, $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}\neq 0$, $rang(A)=2$, i també $rang(\bar{A})=2$ per tenir la primera i tercera files iguals. En aquest cas, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

2.2.

Es tracta de tres plans a l'espai, que estan en diverses posicions relatives depenent del valor del paràmetre: d'acord amb la discussió de l'apartat anterior, si $m\neq 1,3$, el sistema és compatible determinat, la qual cosa significa que els tres plans es tallen en un únic punt comú. Si $m=3$ és incompatible, cosa que vol dir que no tenen cap punt en comú: això es pot veure directament observant que, en aquest cas, el primer pla, $x+3y+z=4$, i el segon, $x+3y+z=5$, són paral·lels i no coincidents. Finalment, si $m=1$ el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat i els tres plans s'intersequen en una recta comuna. Per trobar-ne l'equació cal resoldre el sistema en aquest cas:

$$\left.\begin{matrix} x+y+z=4 \\ x+3y+z=5 \\ x+\ y+z=4 \end{matrix}\right\} \underbrace{\Leftrightarrow}_{F1=F3} \left.\begin{matrix} x+y+z=4 \\ x+3y+z=5 \end{matrix}\right\} \underbrace{\Rightarrow}_{z=\lambda} \left.\begin{matrix} x+y=4-\lambda \\ x+3y=5-\lambda \end{matrix}\right\},$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 5-\lambda & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{12-3\lambda-5+\lambda}{2}=\frac{7-2\lambda}{2},$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 4-\lambda \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{5-\lambda-4+\lambda}{2}=\frac{1}{2}.$$

La solució del sistema són tots els punts de la forma $\left(\frac{7-2\lambda}{2},\frac{1}{2},\lambda\right)$ per $\lambda \in \mathbb{R}$. És a dir, la intersecció dels tres plans, en aquest cas, consisteix en la recta d'equació $(x,y,z)=\left(\frac{7}{2},\frac{1}{2},0\right)+\lambda(-1,0,1)$.

2.3.

Per a $m=1$, el sistema té infinites solucions, una de les quals és $(x,y,z)=\left(3,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, precisament la que correspon a $\lambda=\frac{1}{2}$. Per tant, qualsevol nova equació que també tingui aquest punt com a solució, per exemple $x=3$, i que doni una matriu de coeficients total de rang 3, convertirà el sistema en compatible determinat amb el punt desitjat com a única solució; l'equació proposada ho compleix:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=3.$$

Criteris de correcció: (2.1) Compteu 0,25 punts per calcular el determinant i trobar els dos valors crítics, i 0,25 punts per la discussió de cadascun dels tres casos. **(2.2)** Compteu 0,25 punts per cadascuna de les tres interpretacions geomètriques i 0,25 per la resolució del sistema en el cas $m=1$. **(2.3)** Compteu 0,5 punts per donar l'equació demanada i raonar que és vàlida.

3. PAU 2026 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 2

2.1. El producte $\boldsymbol{MN}$ i el seu determinant donen

$$MN = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ k-1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ k-1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+3k-3 & 3 \\ 3k-3-k+1 & k-1-2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 3k+6 & 3 \\ 2k-2 & k-3 \end{vmatrix} = 3k^2+6k-9k-18-6k+6 = 3(k^2-3k-4),$$

que és zero per als valors $k = \frac{3\pm\sqrt{9-4(-4)}}{2} = \frac{3\pm5}{2} = 4, -1$. Per tant, la matriu MN és invertible per a tot k excepte $k = 4$ i $k = -1$.

2.2. El producte $\boldsymbol{NM}$ dona

$$NM = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ k-1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ k-1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+8 & 8 & -1 \\ 3k-3 & 3k-3 & 0 \\ 2k-2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Com que la primera columna és igual a la segona menys k vegades la tercera, el determinant és sempre zero i la matriu NM no és invertible per cap valor de k. Alternativament, es pot calcular el determinant i veiem que dóna zero independentment de k:

$$\begin{vmatrix} k+8 & 8 & -1 \\ 3k-3 & 3k-3 & 0 \\ 2k-2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 2(3k-3)\begin{vmatrix} k+8 & 8 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ k-1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$
$$= 2(3k-3)(-k-8+1+k-1+8) = 0.$$

2.3. En forma matricial es tracta del sistema d'equacions

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 0 & m \\ k-1 & -1 & -1 & n \end{array}\right).$$

Com que $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, el rang de la matriu de coeficients és 2 i el de l'ampliada també, independentment dels tres paràmetres. I com que hi ha 3 incògnites, aquest sistema és compatible indeterminat per qualssevol valors de m, de n i de k.

Criteris de correcció: (2.1.) Compteu 0,25 pel producte matricial, 0,25 pel càlcul del determinant, i 0,25 per donar la resposta correcta. **(2.2.)** Compteu 0,25 pel producte matricial, 0,25 per argumentar que el determinant és sempre zero, i 0,25 per deduir la resposta correcta. **(2.3.)** Compteu 0,25 per interpretar el sistema d'equacions demanat, 0,5 per calcular els rangs, i 0,25 per donar la resposta correcta.

4. PAU 2025 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 2

2. a) Calculem el determinant de la matriu de coeficients:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ m & 0 & 2 \\ 0 & m & -1 \end{vmatrix} = m^2 - (2m - 3m) = m^2 + m = m(m+1)$$

i observem que s'anul·la quan $m = 0$ i $m = -1$. Per tant,

- Si $m \neq 0$ i $m \neq -1$, el rang de la matriu de coeficients és $rang(A) = 3$, el rang de la matriu ampliada també i, com que també coincideix amb el nombre d'incògnites, 3, el sistema és compatible determinat; té, per tant, solució única.
- Si $m = 0$, la matriu de coeficients té determinant zero i rang 2 (per exemple, gràcies al menor $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$). Com que la matriu ampliada $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ també té rang 2, el sistema és compatible indeterminat i té infinites solucions que dependran d'un paràmetre.
- Si $m = -1$, la matriu de coeficients també té rang 2, mentre que el rang de l'ampliada és 3: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ (desenvolupant, per exemple, el determinant de les tres darreres columnes per la segona fila). Per tant, el sistema és incompatible i no té solució.

b) Si $m = 1$, el sistema queda

$$\left.\begin{array}{c} x + 3y + z = 5 \\ x + 2z = 0 \\ y - z = 1 \end{array}\right\}$$

i sabem que és compatible determinat. Substituint $x = -2z$ i $y = 1 + z$ a la primera equació obtenim

$$-2z + 3(1 + z) + z = 5,$$

d'on resulta $2z = 2$ i $z = 1$. Per tant, la solució és $(x, y, z) = (-2, 2, 1)$.

c) El sistema té infinites solucions quan és compatible indeterminat, és a dir, quan $m = 0$. En aquest cas, de les dues últimes equacions en resulta $z = 0$, i la primera ens diu $x + 3y = 5$. Per tant, les solucions del sistema són les de la forma:

$$\left.\begin{array}{c} x = 5 - 3k \\ y = k \in R \\ z = 0 \end{array}\right\}$$

Criteris de correcció: **(a)** Compteu 0,25 pel càlcul del determinant; 0,25 per la determinació dels valors crítics de m, i 0,25 per l'anàlisi de cadascun dels tres casos. **(b)** Compteu 0,5 punts per la resolució del sistema. **(c)** Compteu 0,25 punts per reconèixer el valor de m a què es refereix l'enunciat, i 0,5 pel càlcul de l'expressió paramètrica de la solució.

5. PAU 2025 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2

2. a) La matriu de coeficients i l'ampliada, A i A' respectivament, són les següents:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & p+3 \\ p^2 & 0 & -1 & 5 \\ \underbrace{1 \quad -1 \quad 0}_{A} & & & 3 \end{array}\right)}_{A'}$$

En primer lloc, calculem el determinant de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ p^2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + p^2 - 1 = p^2 - 1.$$

Igualant-lo a zero, en resulten els valors $p = 1$ i $p = -1$. Per tant, distingim els casos següents:

- Si $p \neq 1, -1$, el determinant de A és diferent de zero i, per tant, $rang(A) = rang(A') = 3$, que és igual al nombre d'incògnites. Per tant, es tracta d'un sistema compatible determinat.
- Si $p = 1$, el determinant de la matriu de coeficients és zero; com que tenim el menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, aleshores $rang(A) = 2$. Però la matriu ampliada té $rang(A') = 3$ gràcies, per exemple, al menor:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 5 - 4 - 3 = -2 \neq 0.$$

Per tant, el sistema és incompatible.

- Si $p = -1$, tenim el sistema:

$$\begin{cases} y - z = 2 \\ x - z = 5 \\ x - y = 3. \end{cases}$$

Eliminant la segona equació (per ser suma de la primera i la tercera), i com que la matriu $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ té rang 2, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

b) Per al cas $p = -1$, es tracta del sistema:

$$\begin{cases} y - z = 2 \\ x - y = 3, \end{cases}$$

que és compatible indeterminat. Fent $y = \lambda$, s'obté $x = \lambda + 3$ i $z = \lambda - 2$. Per tant la solució del sistema és, en aquest cas, $(x, y, z) = (\lambda + 3, \lambda, \lambda - 2)$, amb λ real.

c) Per al cas $p = -1$, el sistema té les infinites solucions obtingudes a l'apartat anterior. Imposant, a més, que $xy = 10$, resulta $(\lambda + 3)\lambda = 10$; és a dir, $\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0$; d'aquí obtenim:

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(-10)}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2} = -5, 2.$$

Per tant, el sistema té exactament dues solucions complint $xy = 10$, que són les corresponents a $\lambda = -5$ i $\lambda = 2$. Es tracta de $(x, y, z) = (-2, -5, -7)$ i $(x, y, z) = (5, 2, 0)$, respectivament.

Criteris de correcció: a) Compteu 0,25 punts pel càlcul del determinant; 0,25 p. per determinar els valors crítics de p, i 0,25 p. per la discussió de cadascun dels tres casos. **b)** Compteu 0,5 punts pel càlcul correcte del conjunt de solucions (evidentment, poden triar qualsevol de les variables com a lliure). **c)** Compteu 0,25 p. pel plantejament de l'equació quadràtica; 0,25 p. per la seva resolució, i 0,25 p. pel càlcul dels dos punts resultants.

Comentaris: hi ha altres maneres de discutir i resoldre el sistema d'equacions. Compteu-les bé en la mesura que ho facin correctament i de manera justificada.

6. PAU 2024 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 2

(a) El determinant de la matriu de coeficients del sistema és

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & m \\ 1 & m & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2m + m - 6 - m^2 - 2 + 6 = -m^2 + 3m - 2,$$

que és 0 quan $m = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4(-1)(-2)}}{-2} = 1, 2$. Si m no és ni 1 ni 2, el rang de la matriu de coeficients és 3, per tant el de l'ampliada també, i es tracta d'un sistema compatible determinat.

En el cas $m = 1$, el rang de la matriu de coeficients és 2 (ja que, per exemple, el menor superior esquerra és no nul) i el de l'ampliada és 3,

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 - 9 + 2 - 3 + 3 = -8 \neq 0.$$

Per tant, es tracta d'un sistema incompatible. (Alternativament observem que les dues darreres equacions són contradictòries en aquest cas: $x + y + 2z = 3$ i $x + y + 2z = 1$.)

En el cas $m = 2$, el rang de la matriu de coeficients és 2 i el de l'ampliada també és 2,

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per tant, es tracta d'un sistema compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

(b) Si $m = 0$ és un sistema compatible determinat i té per solució

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{0 + 0 + 0 - 0 + 4 + 18}{0 + 0 - 6 - 0 - 2 + 6} = \frac{22}{-2} = -11,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{6 + 0 - 4 - 0 - 0 + 4}{-2} = \frac{6}{-2} = -3,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{0 - 2 - 9 - 0 - 3 - 0}{-2} = \frac{-14}{-2} = 7.$$

(c) Per $m = 2$ sabem que el sistema és equivalent a les dues equacions $x - 3y + 2z = -2$, i $y = 1$, i és compatible indeterminat. Imposant, a més a més, la condició extra $x = 5y$, tenim $x = 5$ i, de la primera equació, $2z = -2 - x + 3y = -2 - 5 + 3 = -4$, és a dir, $z = -2$. Així la solució demanada és $(x, y, z) = (5, 1, -2)$.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0.25 pel càlcul del determinant, 0.25 per trobar els valors crítics de m, i 0.25 per l'estudi de cadascun dels tres casos. (b) Compteu 0.5 pel càlcul de la solució. (c) Compteu 0.25 per saber combinar el sistema amb la condició extra, i 0.5 pel càlcul de la solució demanada.

Comentaris: El sistema es pot discutir i es pot resoldre de maneres alternatives. Compteu-ho bé en la mesura que el que facin sigui correcte i estigui convenientment justificat.

7. PAU 2024 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2

2.

a)

[1 punt]

La matriu de coeficients i la matriu ampliada del sistema són:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & k \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad i \quad \overline{M} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & k & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculant el determinant de coeficients i igualant-lo a zero obtenim

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & k \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 + 6k - 3 - 12k = -6k - 6 = 0,$$

és a dir, $k = -1$. Per tant, si $k \neq -1$, tindrem $rang(M) = rang(\overline{M}) = 3$, que coincideix amb el nombre d'incògnites i, pel teorema de Rouché-Frobenius, el sistema és compatible determinat. En canvi, si $k = -1$, el sistema queda

$$\left.\begin{aligned} 4x + 2y - z &= 4 \\ x - y - z &= 3 \\ 3x + 3y &= 1 \end{aligned}\right\};$$

com que la tercera equació és la resta de la primera menys la segona, es tracta d'un sistema de dues equacions i tres incònites, amb rang de coeficients 2 ja que $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$

$-4-2=-6\neq 0$. Per tant, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

La solució per a $k=0$ la podem calcular per la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}4 & 2 & -1\\ 3 & -1 & 0\\ 1 & 3 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 3 & 3 & 0\end{vmatrix}}=\frac{-10}{-6}=\frac{5}{3},$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}4 & 4 & -1\\ 1 & 3 & 0\\ 3 & 1 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 3 & 3 & 0\end{vmatrix}}=\frac{8}{-6}=\frac{-4}{3},$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}4 & 2 & 4\\ 1 & -1 & 3\\ 3 & 3 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 3 & 3 & 0\end{vmatrix}}=\frac{-4+18+12+12-36-2}{-6}=0.$$

b)

[0,75 punts]

Per al cas $k=-1$, i eliminant la tercera equació per ser redundant, obtenim

$$\left.\begin{matrix}4x+2y-z=4\\ x-y-z=3\end{matrix}\right\}.$$

Restant, obtenim $3x+3y=1$. Fent $x=\lambda$, tenim $y=\frac{1}{3}-\lambda$ i llavors $z=x-y-3=\lambda-\frac{1}{3}+\lambda-3=2\lambda-\frac{10}{3}$. Totes les solucions del sistema són, doncs, de la forma

$(x,y,z)=\left(\lambda,\ \frac{1}{3}-\lambda,\ 2\lambda-\frac{10}{3}\right),\quad \lambda\in\mathbb{R}.$

c)

[0,75 punts]

Com hem notat, en el cas $k=-1$, la tercera equació és redundant perque és la resta de la primera menys la segona. Si modifiquem el terme independent posant, per exemple, $3x+3y=2$ tindrem la incongruència $1=2$ i el sistema serà incompatible.

Dit d'una altra manera, és incompatible perque la matriu de coeficients no ha canviat, i té rang 2, mentre que ara la matriu ampliada té rang 3 ja que

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 9 + 12 - 2 = -3 \neq 0.$$

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,25 pel determinant, 0,25 per la discusió i 0,5 per la solució del cas $k = 0$. (b) Compteu 0,75 per l'expressió paramètrica de totes les solucions. (c) Compteu 0,25 per la nova equació, i 0,5 per la justificació que ara és incompatible.

Comentari: La discussió del sistema i el càlcul de les solucions (tant per a $k = 0$ com per a $k = -1$ pot fer-se d'altres maneres. Compteu-ho bé en la mesura que el que fan sigui correcte i estigui ben justificat.

8. PAU 2023 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 1

$$(A - 2I)^2 = \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I$$

$(A - 2I)^2 = 3I \;\leftrightarrow A^2 - 4A + 4I = 3I \;\leftrightarrow A^2 - 4A = -I \;\leftrightarrow 4A - A^2 = I$ i traient factor comú d'A: $(4I - A) \cdot A = I \;\leftrightarrow \boxed{A^{-1} = 4I - A}$

$$\boldsymbol{A^{-1}} = 4I - A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}$$

De $A \cdot X = B$, aïllant la matriu, multiplicant per la inversa d'A per l'esquerra:

$A^{-1} \cdot (AX) = A^{-1} \cdot B$, com $A^{-1} = B$, $(A^{-1} \cdot A)X = B \cdot B \;\leftrightarrow \boxed{X = B^2}$

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}}$$

Observació: El càlcul de la matriu X es pot plantejar també en termes d'un sistema d'equacions lineals. La puntuació serà la mateixa repartida en els diferents passos de la resolució.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per plantejar correctament la comprovació.
0,25 punts per fer bé el càlculs.

b) 0,25 punts pel càlcul del quadrat.
0,25 punts per la factorització.
0,25 punts per les operacions matricials.
0,25 punts per l'expressió de la matriu inversa.
0,25 punts pel càlcul de la matriu inversa i veure que coincideix amb *B*.

c) 0,5 punts per aïllar correctament i aplicar el resultat de l'apartat b).
0,25 punts pel càlcul de la matriu *X*.

9. PAU 2023 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 3

El sistema en la forma normal és $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+my+z=2 \\ 3x+y-mz=3 \end{cases}$. Calculem el determinant de la matriu dels coeficients:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ 3 & 1 & -m \end{vmatrix} = (-2m^2 - 1 + 3) - (-3m - m + 2) = -2m^2 + 4m = \boldsymbol{2m(2-m)}$$

$|A| = 0 \rightarrow m = 0$ i $m = 2$, són els valors a tenir en compte en la discussió.

Tenim tres casos a discutir:

Si $\boldsymbol{m \neq 0}$ **i** $\boldsymbol{m \neq 2}$, com el $rang(A) = 3$ $[|A| \neq 0]$ $= rang(A^*)$ = nombre d'incògnites, tenim un **SCD** (Sistema Compatible Determinat). **Solució única.**

Si $\boldsymbol{m = 0}$, per Gauss obtenim:

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 3 & 1 & 0 & | & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_2 \\ \sim f_1 \\ f_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 2 & 1 & -1 & | & 1 \\ 3 & 1 & 0 & | & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \sim 2\,f_1 - f_2 \\ 3f_1 - f_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & -1 & 3 & | & 3 \\ 0 & -1 & 3 & | & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{matrix} \\ \sim \\ f_3 - f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & -1 & 3 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$rang(A) = 2$ $= rang(A^*) < 3$ = nombre d'incògnites.

Per tant, es tracta d'un SCI (Sistema Compatible Indeterminat) amb $(3 - 2 = 1)$ un grau de llibertat. Infinites solucions que depenen d'un paràmetre.

Si $\boldsymbol{m = 2}$, per Gauss obtenim:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & 2 & 1 & | & 2 \\ 3 & 1 & -2 & | & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_2 \\ \sim f_1 \\ f_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 2 \\ 2 & 1 & -1 & | & 1 \\ 3 & 1 & -2 & | & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \sim 2\,f_1 - f_2 \\ 3f_1 - f_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 2 \\ 0 & 3 & 3 & | & 3 \\ 0 & 5 & 5 & | & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \\ f_3/3 \\ 3f_3 - 5f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & -6 \end{pmatrix}$$

$rang(A) = 2 \neq rang(A^*) = 3 \Rightarrow$ SI (Sistema Incompatible). No hi ha solució.

b)

Si $\boldsymbol{m = 1}$, quan substituïm en el sistema obtenim:

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_2 \\ \sim f_1 \\ f_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \\ 2\,f_1 - f_2 \\ 3f_1 - f_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \\ \\ f_3 - 2f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + 3z = 3 \\ 2z = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 2 \\ y + 3 \cdot \frac{3}{2} = 3 \\ z = \frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 2 \\ y = -3/2 \\ z = \frac{3}{2} \end{cases}}$$

Observació: L'apartat a) es pot resoldre via el càlcul de rangs i l'apartat b) es pot resoldre també pel mètode de Cramer.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts pel plantejament matricial i el determinant de la matriu de coeficients.
0,25 punts pel càlcul dels valors singulars.
0,75 punts per la discussió (0,25 punts per cada cas).

b) 0,25 punts per la substitució del paràmetre.
0,25 punts pel procediment de resolució.
0,75 punts per la resolució (0,25 punts per cada variable).

10. PAU 2023 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2

Resolució:

a)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = A$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = B$$

Observació: la resolució es donarà per bona encara que no apareguin els càlculs intermedis.

b) Sabem que $(*)\ C \cdot D = C$ i $(**)\ D \cdot C = D$

$$C^2 = C \cdot C \underbrace{=}_{(*)} (C \cdot D) \cdot C = C \cdot (D \cdot C) \underbrace{=}_{(**)} C \cdot D \underbrace{=}_{(*)} C$$

$$D^2 = D \cdot D \underbrace{=}_{(**)} (D \cdot C) \cdot D = D \cdot (C \cdot D) \underbrace{=}_{(*)} D \cdot C \underbrace{=}_{(**)} D$$

I, per tant, efectivament les dues matrius C i D són idempotents.

Pautes de correcció:

a) 0,75 punts pel càlcul del producte A·B.

0,75 punts pel càlcul del producte B·A.

b) 0,5 punts per la comprovació que la matriu C és idempotent.

0,5 punts per la comprovació que la matriu D és idempotent.

11. PAU 2023 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4

Resolució:

a) Estudi del sistema d'equacions lineals segons els valors del paràmetre λ.

$$M|\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2\lambda & 2+\lambda & 0 \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda & 3 \\ 2\lambda & 2+\lambda & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Calculem el determinant de la matriu del sistema i estudiem per a quins valors el determinant s'anul·la.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda \\ 2\lambda & 2+\lambda & 1 \end{vmatrix} = 9\lambda^3 + 9 = 9(\lambda^3 + 1)$$

Quan resolem l'equació $9(\lambda^3 + 1) = 0$, obtenim $\lambda^3 = -1$ i d'aquí $\lambda = -1$.

Per tant, tenim dos casos a discutir.

CAS I: $\lambda \neq -1$

Com que $|M| \neq 0$, aleshores $Rang\ M = 3 = Rang\ \overline{M} = \text{Nombre d'incògnites}$.

En virtut del teorema de Rouché-Frobenius, es tracta d'un sistema compatible determinat (SCD) i, per tant, el sistema té una única solució.

CAS II: $\lambda = -1$

$$M|\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Com que $|M| = 0$, aleshores $Rang\ M < 3$, però en tenir $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 = 3 \neq 0$, aleshores $Rang\ M = 2$.

D'altra banda, si orlem l'anterior menor, $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 12 - 3 - 6 = 0$, per tant, $Rang\ \overline{M} = 2$.

Aleshores, com que $Rang\ M = 2 = Rang\ \overline{M} < \text{Nombre d'incògnites} = 3$, es tracta d'un sistema compatible indeterminat (SCI) amb 1 (3-2) grau de llibertat.

Observació: de forma alternativa, el primer determinant es podria haver calculat utilitzant les propietats dels determinants.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda \\ 2\lambda & 2+\lambda & 1 \end{vmatrix} \underset{(*)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda \\ 3+3\lambda & 3+3\lambda & 3+3\lambda \end{vmatrix} = (3+3\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(1+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3(1+\lambda)(3\lambda^2-3\lambda+3) = 9(1+\lambda)(\lambda^2-\lambda+1)$$

$(*)$ *Sumant a la tercera fila les dues primeres files.*

b)

Estudiem el cas $\lambda = -1$.

Sabem que es tracta d'un SCI amb un grau de llibertat i el menor d'ordre 2 no nul indica les equacions i les incògnites que ens hem de quedar:

$$\begin{cases} x-2y = -z \\ x+y = 3+2z \end{cases}$$

Ara podem resoldre aplicant el mètode de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z & -2 \\ 3+2z & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3z+6}{3} = z+2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -z \\ 1 & 3+2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3+3z}{3} = z+1$$

Solució: $\boxed{(\,x=z+2\ ,\ \ y=z+1,\ \ z\ \text{paràmetre}\,)}$

Interpretació geomètrica: cadascuna de les equacions és un pla a $\mathbb{R}^3$. El fet que la solució tingui un grau de llibertat ens indica que aquests tres plans es tallen en una recta, que és la formada per punts de la forma $(z+2, z+1, z)$.

Com que $(z+2, z+1, z) = (2,1,0) + z(1,1,1)$, la recta intersecció és la que passa pel punt $(2,1,0)$ i té vector director $(1,1,1)$.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per l'expressió de les matrius del sistema.

0,25 punts pel càlcul del determinant.

0,25 punts per tenir el punt singular que anul·la el determinant.

0,25 punts per la discussió del cas $\lambda \neq -1$.

0,25 punts per la discussió del cas $\lambda = -1$.

b) 0,25 punts per la identificació del tipus de solució.

0,25 punts per la resolució de les incògnites *x* i *y* (o les que escaigui).

0,25 punts per l'expressió de la solució del sistema.

0,25 punts per indicar que els tres plans es tallen en una recta.

0,25 punts per identificar la recta solució.

12. PAU 2023 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 2

a)

Apliquem el mètode de Gauss, així tenim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & -1 \\ 1 & k & 1 & 3 \\ 2 & k-1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Substituïm la fila 2, F2, per F2-F1, on F1 denota la primera fila, i la fila 3, F3, per F3-2F1, i obtenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & -1 \\ 1 & k & 1 & 3 \\ 2 & k-1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & -1 \\ 0 & k+1 & 1-k & 4 \\ 0 & k+1 & 2-2k & 4 \end{array}\right)$$

Substituïm F3 per F3 -F2 i s'obté

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & -1 \\ 0 & k+1 & 1-k & 4 \\ 0 & k+1 & 2-2k & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & -1 \\ 0 & k+1 & 1-k & 4 \\ 0 & 0 & 1-k & 0 \end{array}\right)$$

Distingim casos:

- $k \neq -1, k \neq 1$ tenim rang M = rang MA = número incògnites = 3 i per tant és un sistema compatible determinat (M denota la matriu del sistema i MA la matriu ampliada).
- $k = 1$ obtenim la matriu

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  Tenim rang M= rang MA= 2 i per tant és un sistema compatible indeterminat amb un grau de llibertat.
- $k = -1$ *obtenim la matriu*

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

  Fem un pas més canviant la F3 per F3-F2 i obtenim la matriu

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

  que correspon a un sistema incompatible ja que rang MA=3 > rang M=2.

b)

Recuperem els càlculs de l'apartat anterior.

Per a $k = 1$ obtenim $y = 2$ i $x = 1 - z$, per tant les solucions són de la forma $(x, y, z) = (1 - z, 2, z)$ o bé forma $(x, y, z) = (x, 2, 1 - x)$.

Per a $k = 0$ obtenim la matriu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

I després de fer Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

I, per tant, la solució és $z = 0, y = 4\ i\ x = 3$.

a) 0,25 punts per la forma matricial del sistema.
0,5 punts per determinar els diferents casos que cal estudiar, sigui pel mètode de Gauss o pel càlcul de rangs per determinants.
0,75 punts pels tres casos (0,25 punts per cada cas).

b) 0,5 punts per donar les solucions del cas $k = 0$.
0,5 punts per donar les solucions del cas $k = 1$.

13. PAU 2023 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 5

a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

b)

Calculem el quadrat d'una matriu de la família $\mathcal{S}$ i imposem que doni la matriu identitat:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Veiem que cal $2ab = 0$ i $a^2 + b^2 = 1$. Veiem que hi ha 4 solucions: $a = 0\ i\ b = \pm 1$ i $a = \pm 1, b = 0$. Per tant les 4 matrius possibles són:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) 0,75 punts pel càlcul de la matriu inversa.
0,5 punts pel producte de matrius.

b) 0,5 punts pel càlcul de A^2.
0,25 punts per donar les dues equacions per calcular a i b.
0,5 punts per les quatre matrius que són solució.

14. PAU 2022 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 3

a) Per a estudiar el rang de la matriu A, calculem primer el determinant de la matriu per a veure quan té rang màxim:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 3 \\ 2a & 5 & 3a \\ 7 & 4a & 9 \end{vmatrix} = 45 + 24a^2 + 21a^2 - 105 - 12a^2 - 18a^2 = 15a^2 - 60$$

$15a^2 - 60 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 2$

Així doncs, se'ns obren els casos següents:

CAS I. Si $a \neq \pm 2, rang\ A = 3$, atès que el determinant d'ordre 3 és no nul.

CAS II. Si $a = 2, rang\ A = 2$, atès que el determinant d'ordre 3 és nul i hi ha un menor d'ordre 2 no nul ($\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3 \neq 0$).

CAS III. Si $a = -2, rang\ A = 2$, atès que el determinant d'ordre 3 és nul i hi ha un menor d'ordre 2 no nul ($\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3 \neq 0$).

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quan multipliquem les matrius, veiem que es tracta d'un sistema d'equacions lineal i homogeni. Per tant, sempre té com a mínim la solució $(0, 0, 0)$.

Tenim $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 0 \end{cases}$ amb la matriu ampliada $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{array}\right)$.

Observem que la matriu de coeficients és la matriu A de l'apartat anterior per al valor $a = 2$. Per tant, el rang de la matriu de coeficients és 2.

De tota manera, notem que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 + 96 + 84 - 105 - 48 - 72 = 0$

i $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3 \neq 0$. Per tant, $rang \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 2$.

El rang de la matriu del sistema i també el rang de la matriu ampliada són 2 (perquè la columna $(0, 0, 0)$ dels termes independents no pot augmentar el $rang(A)$), i el

nombre d'incògnites és 3. En virtut del teorema de Rouché-Frobenius, es tracta d'un sistema compatible indeterminat amb 3 – 2 = 1 grau de llibertat.

El menor d'ordre 2 no nul indica les equacions i les incògnites que ens hem de quedar. Per tant:

$$\begin{cases} x + 2y &= -3z \\ 4x + 5y &= -6z \end{cases}$$

Per a trobar x i y en funció de z podem aplicar el mètode de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3z & 2 \\ -6z & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-15z + 12z}{-3} = z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3z \\ 4 & -6z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-6z + 12z}{-3} = -2z$$

Per tant, les matrius solució demanades són les següents:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \quad z \text{ paràmetre.}}$$

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts pel càlcul del determinant.

0,25 punts pel càlcul del valor singular per discutir.

0,75 punts per la discussió (0,25 punts per cada cas).

b) 0,25 punts pel plantejament de l'equació com a sistema d'equacions lineals.

0,25 punts per raonar que és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

0,25 punts per trobar la x en funció de z (o equivalent).

0,25 punts per trobar la y en funció de z (o equivalent).

0,25 punts per l'expressió de la matriu solució X.

15. PAU 2022 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 5

a) La matriu A serà invertible si i només si el seu determinant és diferent de zero.

Busquem el determinant aplicant la regla de Sarrus, per tal de saber per a quins valors del paràmetre a aquest determinant no s'anul·la:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{vmatrix}$$
$$= a(a+1)(-a-3) + a(a-1)(2a+1) - 0 - 0 + 2a(a+3)$$
$$= a(-a^2 - 4a - 3 + 2a^2 + a - 2a - 1 + 2a + 6) = a(a^2 - 3a + 2).$$

Quan resolem $|A| = 0$, obtenim $a = 0$ i $a = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1. \\ a = 2 \end{cases}$

La matriu A serà invertible quan $a \neq 0, 1, 2.$

b) Quan *a =3*, tenim $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Mirem si la matriu A és invertible. En cas afirmatiu, calculem la inversa.

Observació: per l'apartat anterior, com que $a = 3$, ja sabríem que la matriu té inversa.

$|A| = -72 + 42 + 36 = 6 \neq 0 \Rightarrow$ la matriu A és invertible.

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -24 & 18 & 6 \\ 26 & -18 & -6 \\ -28 & 21 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ \frac{13}{3} & -3 & -1 \\ -\frac{14}{3} & \frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Plantejament de la resolució de l'equació:

$$A \cdot X = B - 3I \;\rightarrow\; A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (B - 3I) \;\rightarrow\; X = A^{-1} \cdot (B - 3I)$$

$$B - 3I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalment, obtenim X:

$$X = A^{-1} \cdot (B - 3I) \rightarrow X = A^{-1} \cdot I \rightarrow \boxed{X = A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ \frac{13}{3} & -3 & -1 \\ -\frac{14}{3} & \frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix}}.$$

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per la condició d'invertibilitat a partir del determinant no nul.

0,5 punts pel càlcul del determinant.

0,25 punts pels valors que anul·len el determinant.

0,25 punts per la resposta al problema.

b) 0,25 punts per concloure que la matriu A és invertible.

0,5 punts pel càlcul de la matriu inversa.

0,25 punts per les operacions matricials.

0,25 punts pel resultat final.

16. PAU 2022 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 2

Resolució:

a)

La matriu de coeficients i la matriu ampliada, A i A', són les següents:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 3 & 2 \\ 2 & a & 1 & a \\ \underbrace{1 \quad 1 \quad 4}_{A} & & & 1 \end{array}\right)}_{A'}$$

En primer lloc, es calcula $det(A)$

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4a^2 + 6 + 2 - 3a - a - 16 = 4a^2 - 4a - 8$$

que s'anul·la per als valors de $a = -1$ i $a = 2$.

A continuació s'estudien els tres casos: $a = -1$, $a = 2$ i $a \neq -1, 2$.

CAS $a = -1$

S'obté el sistema:

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = 2 \\ 2x - y + z = -1 \\ x + y + 4z = 1 \end{cases}$$

On s'observa que sumant la primera més la segona equació s'obté la tercera per tant, el $rang\ (A)$ i el $rang\ (A')$ no seran màxims:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ \underbrace{1 \quad 1 \quad 4}_{A} & & & 1 \end{array}\right)}_{A'}$$

Com que sabem que $det(A) = 0$ i tenim que el menor $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, aleshores el $rang(A) = 2$.

Com que de la suma de la primera més la segona equació s'obté la tercera, tots els menors d'ordre 3 seran nuls, i per al menor d'ordre dos no nul anterior, $rang(A') = 2$.

També es pot argumentar que el $rang(A') < 3$ a partir de trobar que els determinants d'ordre corresponent són nuls.

Per tant, es té que $rang(A) = rang(A') = 2 < 3 =$ nombre d'incògnites.

Per tant és un sistema compatible indeterminat (SCI) amb $3 - 2 = 1$ grau de llibertat.

CAS $a = 2$

En aquest cas, s'obté el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 2y + z = 2 \\ x + y + 4z = 1 \end{cases}$$

I en notació matricial s'obté

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ \underbrace{1 \quad 1 \quad 4}_{A} & & & 1 \end{array}\right)}_{A'}$$

On s'observa que la primera i la segona columna, dels coeficients de les x i les y, i el vector dels termes independents són iguals. Això ja ens diu que el rang de la matriu ampliada serà el mateix que el de la matriu de coeficients.

Per $a = 2$ sabem que el $det(A) = 0$, i com que $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, el $rang(A) = 2$.

Respecte a la matriu ampliada s'observa que no es podrà trobar cap determinant d'ordre 3 no nul ja que el vector de termes independents coincideix amb la primera i segona columna de la matriu A. I, per tant, es té que $rang(A) = rang(A') = 2 < 3 =$ nombre d'incògnites. Per tant, és un sistema compatible indeterminat (SCI) amb $3 - 2 = 1$ grau de llibertat.

CAS $a \neq -1$ i $a \neq 2$

Sabem que $det(A) \neq 0$, per tant, $rang\,(A) = rang\,(A') = 3 =$ nombre d'incògnites i és un sistema compatible determinat (SCD).

b)

Per a $a = 2$, s'ha de resoldre el sistema que ja sabem que serà SCI:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 2y + z = 2 \\ x + y + 4z = 1 \end{cases}$$

Fem la diferència de les dues primeres equacions i obtenim que $z = 0$.

Substituïm $z = 0$ i ens queda el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ 2x + 2y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

On s'observa que les tres equacions són equivalents i, per tant, es confirma que és un sistema compatible indeterminat.

Si prenem $y = \lambda$, obtenim que les solucions del sistema són de la forma: $\boxed{(1 - \lambda, \lambda, 0)}$.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per la presentació matricial del sistema.
0,5 punts per arribar als valors crítics per a la discussió.
0,75 punts per la discussió dels tres casos (0,25 punts per cada cas).

b) 0,25 punts per observar que és un sistema compatible indeterminat.
0,75 punts per la solució.

17. PAU 2022 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 5

Resolució:

a)

Calculem l'expressió de X^2 en funció dels paràmetres i la igualem a la matriu donada:

$$X^2=\begin{pmatrix}a & 1 & 0\\ 0 & b & 1\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & 1 & 0\\ 0 & b & 1\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2 & a+b & 1\\ 0 & b^2 & b+c\\ 0 & 0 & c^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

D'aquesta igualtat de matrius en sorgeixen les equacions següents:

$$a^2=1\rightarrow a=\pm 1$$

$$b^2=1\rightarrow b=\pm 1$$

$$c^2=1\rightarrow c=\pm 1$$

$$a+b=0\rightarrow a=-b$$

$$b+c=0\rightarrow b=-c$$

Llavors, les solucions per a, b i c són:

$a=1,\ b=-1,\ c=1$ i $a=-1, b=1, c=-1$

És a dir, hi ha dues possibles matrius X:

$$\boxed{\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}} \text{ i } \boxed{\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}}$$

b)

Només cal imposar que

$$\begin{pmatrix}a & 1 & 0\\ 0 & b & 1\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Multiplicant obtenim la següent igual matricial.

$$\begin{pmatrix}\frac{a}{2} & 1-\frac{a}{2} & 1-\frac{a}{2}\\ 0 & b & b-1\\ 0 & 0 & -c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

I igualant terme a terme els elements de la diagonal obtenim

$\frac{a}{2} = 1 \rightarrow a = 2;\ b = 1;\ -c = 1 \rightarrow c = -1.$

I també es compleix que $1 - \frac{a}{2} = 0$ per al valor $a = 2$, i $b - 1 = 0$ per al valor $b = 1$.

Així la solució és $\boxed{a = 2, b = 1 \text{ i } c = -1}$.

Observació: De forma alternativa també es pot calcular la matriu inversa X^{-1} i igualar-la a la matriu que ens dona l'enunciat.

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{abc}\begin{pmatrix} bc & 0 & 0 \\ -c & ac & 0 \\ 1 & -a & ab \end{pmatrix}^{t} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Igualant els elements de la diagonal de les dues matrius, tenim que:

$\frac{1}{a} = \frac{1}{2} \rightarrow a = 2;\ \frac{1}{b} = 1 \rightarrow b = 1;\ \frac{1}{c} = -1 \rightarrow c = -1$

I també són certes les igualtats de la resta de termes de fora de la diagonal.

Així la solució és $\boxed{a = 2, b = 1 \text{ i } c = -1}$.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per calcular X^2.
0,25 punts per plantejar el sistema d'equacions que cal resoldre.
1 punt per donar les dues solucions dels tres paràmetres (0,5 per a cada solució).

b) 0,25 punts per plantejar el producte igual a la identitat.
0,25 punts pel producte matricial.
0,25 per plantejar el sistema d'equacions que cal resoldre.
0,25 punts per trobar els valors dels tres paràmetres.

18. PAU 2022 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 1

a)

Efectivament, si multipliquem

$$C^3 = C^2 \cdot C = C \cdot C^2 = C \cdot C \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant en multiplicar C per C^2, i a l'inrevés, obtenim la identitat. Amb això provem que la matriu C és invertible i que la seva inversa és C^2

$$C^2 = C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per a calcular C^{2022}, com que 2022=3·674, $\boxed{C^{2022} =}$ $(C^3)^{674} = I_2^{674} = \boxed{I_2}$.

b)

De l'equació $C \cdot X = A - 2 \cdot I_2$, multiplicant ambdós termes per l'esquerra per C^{-1} obtenim:

$$\boxed{X =} C^{-1} \cdot (A - 2 \cdot I_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$
$$= \boxed{\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}}$$

19. PAU 2022 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 3

a)

Per a discutir el sistema d'equacions lineals calculem el determinant de la matriu dels coeficient A, per a calcular-ne el rang.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & m & 3-m \\ 2 & -1 & m \end{vmatrix} = (2m^2 + 2(m-3)) - \big(6m + 2(m-3)\big) = 2m^2 - 6m.$$

$$|A| = 0 \quad \rightarrow 2m(m-3) = 0 \quad \rightarrow \begin{matrix} m = 0 \\ m = 3 \end{matrix}$$

I per tant podem organitzar la discussió en tres casos.

- Cas I: $\boldsymbol{m \neq 0}$ i $\boldsymbol{m \neq 3}$

  $rang(A) = 3 = rang(A \mid b) =$ nombre d'incògnites i pel Teorema de Rouché-Fröbenius el sistema és compatible i determinat, amb una sola solució, SCD.

- Cas II: $\boldsymbol{m = 0}$

  Com que $|A| = 0$ tenim que $rang(A) < 3$, però $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 2$.

  La matriu ampliada és:

  $$A \mid b = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \vdots 0 \\ 0 & 0 & 3 \vdots -6 \\ 2 & -1 & 0 \vdots 6 \end{pmatrix} \sim_{f_3 - f_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \vdots 0 \\ 0 & 0 & 3 \vdots -6 \\ 0 & 0 & -3 \vdots 6 \end{pmatrix} \sim_{f_3 + f_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \vdots 0 \\ 0 & 0 & 3 \vdots -6 \\ 0 & 0 & 0 \vdots 0 \end{pmatrix}$$

  Per tant $rang(A) = rang(A \mid b) = 2 <$ 3 = nombre d'incògnites. Per tant és un **SCI** (sistema compatible indeterminat amb 3 -2 =1 variable lliure, té infinites solucions).

- Cas III: $\boldsymbol{m = 3}$

  Com que $|A| = 0$ tenim que $rang(A) < 3$, però $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 2$.

  La matriu ampliada és:

  $$A|b = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \vdots 0 \\ 0 & 3 & 0 \vdots -6 \\ 2 & -1 & 3 \vdots 6 \end{pmatrix} \sim_{f_3 - f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \vdots 1 \\ 0 & 3 & 0 \vdots -6 \\ 0 & 0 & 0 \vdots 6 \end{pmatrix}$$

  I per tant tenim $rang(A) = 2 \neq rang(A \mid b) = 3$. Per tant, tenim un SI (sistema incompatible), no té solució.

b)

- Si $\boldsymbol{m = 0}$, la matriu ampliada és:

$$A\,|b = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \vdots 0 \\ 0 & 0 & 3 \vdots -6 \\ 0 & 0 & 0 \vdots 0 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ z = -2 \end{cases}$$

$$\boxed{Recta\ r: \begin{cases} x = k \\ y = 2k - 6, \quad k \in \mathbb{R} \\ z = -2 \end{cases}}$$

Veient els vectors normals dels tres plans: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \vdots 0 \\ 0 & 0 & 3 \vdots -6 \\ 2 & -1 & 0 \vdots 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} n_{\pi 1} = (2, -1, 3) \\ n_{\pi 2} = (0,0,3) \\ n_{\pi 3} = (2, -1, 0) \end{matrix}$.

Per tant, els tres plans es tallen en la recta r.

- Si $\boldsymbol{m = 3}$ ja hem vist que el sistema no té solució, és a dir que no hi ha cap punt intersecció dels 3 plans.

  La posició relativa dels tres plans ens la dona els seus vectors normals i els termes independents:

$A \mid b = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \vdots 0 \\ 0 & 3 & 0 \vdots -6 \\ 2 & -1 & 3 \vdots 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} n_{\pi 1} = (2, -1, 3) \\ n_{\pi 2} = (0,3,0) \\ n_{\pi 3} = (2, -1, 3) \end{matrix}$ així que, com que els vectors $n_{\pi 1}$ i $n_{\pi 3}$ són proporcionals els plans π_1 i π_3 són paral·lels i estan tallats pel pla π_2.

20. PAU 2021 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 1

1.

a)

Escrivim el sistema en forma matricial. La matriu de coeficients i la matriu ampliada, A i A', són les següents:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 3+k \\ k & 1 & 1 & 4 \\ \underbrace{1 \quad 3 \quad 1}_{A} & & & 5 \end{array}\right)}_{A'}$$

Calculem el determinant de la matriu A:

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -k^2 + 4k - 3 = -(k-1)(k-3)$$

que s'anul·la per als valors de $k = 1$ i $k = 3$. Així,

- per a $k \neq 1$ i $k \neq 3$, el determinant de A no s'anul·la. Aleshores, $rang\ (A) = rang\ (A') = 3$, que també coincideix amb el número d'incògnites, i es tracta d'un sistema compatible determinat.

- per a $k = 1$, tenim el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

  Les dues primeres equacions són idèntiques per tant, el $rang\ (A)$ i el $rang\ (A')$ no seran màxims.

  Calculant rangs tenim que $rang(A) = rang(A') = 2 < 3$. Tenim 3 incògnites, per tant, és un sistema compatible indeterminat.

- per a $k = 3$ s'obté el sistema:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 6 \\ 3x + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

En aquest cas, la primera i la tercera equació són idèntiques en la part de les incògnites però no en els termes independents, amb això ja podem afirmar que es tracta d'un sistema incompatible.

També es poden estudiar els rangs per veure que $rang(A) = 2 \neq rang(A') = 3$.

b)

Per a $k = 1$, el sistema és:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

Com que la primera i la segona equació són iguals, se'n pot eliminar una: es tracta d'un sistema compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

Prenem $z = t$, s'obté que la solució és: $x = \frac{7}{2} - t, y = \frac{1}{2}, z = t$ amb $t \in R$

Les dues primeres equacions del sistema, que són iguals, corresponen a un mateix pla. La tercera equació correspon a un pla que talla a l'anterior en una recta.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per la representació matricial del sistema.

0,25 punts per arribar als valors crítics per a la discussió.

0,75 punts per la discussió dels tres casos (0,25 per a cada cas)

b) 0,25 punts per observar que és un sistema compatible indeterminat.

0,75 punts per la solució. Es valorarà correctament tant si ho fan pel mètode de Gauss com per substitució o igualació.

0,25 punts per la interpretació geomètrica.

21. PAU 2021 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 5

Calculem el determinant de la matriu A:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{vmatrix} = a(a^2 - 3a + 2) = a(a-1)(a-2)$$

Aleshores, per a tot $a \neq 0, 1, 2$ tenim que $|A| \neq 0$ i la matriu és invertible.

b)

Per $a = 3$ la matriu és $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

El determinant de la matriu A és $|A| = 6 \neq 0$, per tant, A és invertible. Calculem la inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -24 & 18 & 6 \\ 26 & -18 & -6 \\ -28 & 21 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ \frac{13}{3} & -3 & -1 \\ -\frac{14}{3} & \frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Així, podem resoldre l'equació donada, multiplicant per l'esquerra cada banda de l'equació per la matriu inversa de A:

$$A \cdot X = B - 3I \;\rightarrow\; A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (B - 3I) \;\rightarrow\; X = A^{-1} \cdot (B - 3I)$$

$$B - 3I = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalment obtenim X:

$$X = A^{-1} \cdot (B - 3I) = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ \frac{13}{3} & -3 & -1 \\ -\frac{14}{3} & \frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -5 \\ 6 & 6 & 6 \\ -6 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

Pautes de correcció:

a) 0,5 punts pel determinant de A.

0,5 punts pels valors que fan que la matriu sigui invertible

b) 0,25 punts per justificar que A és invertible

0,5 punts per resoldre l'equació matricial per trobar X

0,5 punts pel càlcul de la matriu inversa de A

0,25 punts pel càlcul final de la matriu X

22. PAU 2021 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 2

2

a)

[1,5 punts]

Escrivim el sistema en forma matricial:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} p & 1 & 1 & 2 \\ 2 & p & p^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

El determinant de la matriu de coeficients, A, és:

$$\det A = \begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 2 & p & p^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -p^3+3p^2-2p = -p(p-1)(p-2)$$

Els valors de p que fan que el determinant sigui zero són: $p = 0, p = 1$ i $p = 2$.

Aleshores:

- Si $p \neq 0,1,2 \rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema compatible determinat
- Si $p = 0$, el sistema en forma matricial és:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$\text{rang}(A) = 2;\ \text{rang}(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible

- Si $p = 1$, el sistema en forma matricial és:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$\text{rang}(A) = 2;\ \text{rang}(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible

- Si $p = 2$, el sistema en forma matricial és:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 2 < \text{núm. incògnites} = 3 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminat

b)

[1 punt]

Per a $p = 2$ el sistema és compatible indeterminat, dues de les equacions són coincidents. Cal resoldre el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + 4z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + y = 2 - z \\ 2x + 2y = 1 - 4z \end{cases}$$

Prenem $z = t$ com a paràmetre i tenim $x = \frac{3}{2} + t, \quad y = -3t - 1, \quad z = t$ per a tot $t \in \mathbb{R}$.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per la presentació matricial del sistema.

0,25 punts per arribar als valors crítics per a la discussió.

1 punt per la discussió dels quatre casos (0,25 punts per cada cas).

b) Si han fet bé el cas $p = 2$ en l'apartat a), 0,5 punts pel càlcul de cada variable en funció d'un paràmetre lliure.

Si no fan servir l'apartat a), 0,25 punts per observar que és un sistema compatible indeterminat i 0,75 punts per la solució.

23. PAU 2021 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 5

a)

[1,25 punts]

Calculem A^2 :

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El determinant de la matriu A^2 és $|A^2| = 1 \neq 0$, per tant, és una matriu invertible.

Multipliquem l'equació matricial per $(A^2)^{-1}$ per l'esquerra, així ens queda:

$A^2 \cdot X = A - 3 \cdot I \rightarrow X = (A^2)^{-1}(A - 3 \cdot I)$

Calculem la matriu inversa de A^2:

$$(A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Finalment:

$X = A(A - 3 \cdot I)$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

[1,25 punts]

Sumem I a les dues bandes de la igualtat que ens donen:

$$M^3 - 3M^2 + 3M - I = 0 \rightarrow M^3 - 3M^2 + 3M = I$$

Traiem M factor comú per l'esquerra:

$$M \cdot (M^2 - 3M + 3I) = I \qquad (*)$$

Fem el determinant a banda i banda de la igualtat i tenim:

$$det\big(M \cdot (M^2 - 3M + 3I)\big) = \det I = 1 \rightarrow \det M \cdot det(M^2 - 3M + 3I) = 1$$

D'on podem afirmar que $\det M \neq 0$, ja que si s'anul·lés la igualtat anterior no se satisfaria. Així doncs, M és invertible i podem expressar la inversa de la forma següent:

$$M^{-1} = M^2 - 3M + 3I$$

De l'expressió (*) es pot deduir directament que la matriu M és invertible i que l'expressió de la inversa, sense haver de justificar que el determinant és diferent de 0.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per calcular A^2.

0,25 punts per aïllar X.

0,5 punts per la inversa de A^2.

0,25 punts pel resultat final de X.

b) 0,5 punts per operar correctament amb la igualtat donada.

0,5 punts per justificar que M és invertible.

0,25 punts per trobar l'expressió la matriu inversa demanada.

24. PAU 2021 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 1

[2,5 punts]

a)

La matriu *B* és invertible perquè els seus vectors columna (o fila) són independents (és a dir no proporcionals). Altrament perquè

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0.$$

I la seva inversa serà $B^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$.

b)

És possible aïllar la matriu X de l'expressió donada:

$$\mathrm{X} = \mathrm{B}^{-1} \cdot (\mathrm{C} \cdot \mathrm{A} - \mathrm{A})$$

Comencem calculant el producte

$$\mathrm{C} \cdot \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ -21 & 28 \end{pmatrix}$$

i per tant

$$\mathrm{C} \cdot \mathrm{A} - \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ -21 & 28 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -18 & 24 \end{pmatrix}.$$

Aleshores

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -18 & 24 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -18 & 24 \\ 23 & -16 \end{pmatrix}}.$$

Pautes de correcció:

a)

0,5 punts per l'argumentació que la matriu és invertible.

0,25 punts pel càlcul preliminar de la matriu inversa.

0,5 punts pel càlcul final.

b)

0,5 punts per aïllar la matriu *X*.

0,25 punts pel producte matricial.

0,25 punts per la diferència de matrius.

0,25 punts pel producte final.

25. PAU 2021 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 5

[2,5 punts]

a)

Estudi del sistema d'equacions lineals segons els valors del paràmetre a.

$$M|\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 8 \\ 2 & 1 & -a & 1 \\ 3 & 0 & -3a & 1 \end{array}\right)$$

Càlcul del rang de la matriu del sistema i el de la matriu ampliada.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, per tant, $\text{Rang M} \geq 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & -a \\ 3 & 0 & -3a \end{vmatrix} = -3a - 6a - 3a + 12a = 0$$

El determinant de la matriu del sistema és nul (zero) per a qualsevol valor del paràmetre a. Per tant, $\text{Rang M} = 2$, per a qualsevol valor del paràmetre a.

Orlant el menor d'ordre 2 no nul, amb la finalitat de trobar el rang de la matriu ampliada, tenim:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -21 \neq 0$, per tant, $\text{Rang}\,\overline{\text{M}} = 3$, per a qualsevol valor del paràmetre a.

Com a conclusió tenim:

$\text{Rang M} \neq \text{Rang}\,\overline{\text{M}}$ per a qualsevol valor del paràmetre a .

En virtut del teorema de Rouché-Frobënius, es tracta, efectivament, d'un sistema incompatible, no té solució, per a qualsevol valor del paràmetre a.

b)

Interpreteu geomètricament el sistema d'equacions lineals. Feu un dibuix esquemàtic que representi la posició relativa dels tres plans.

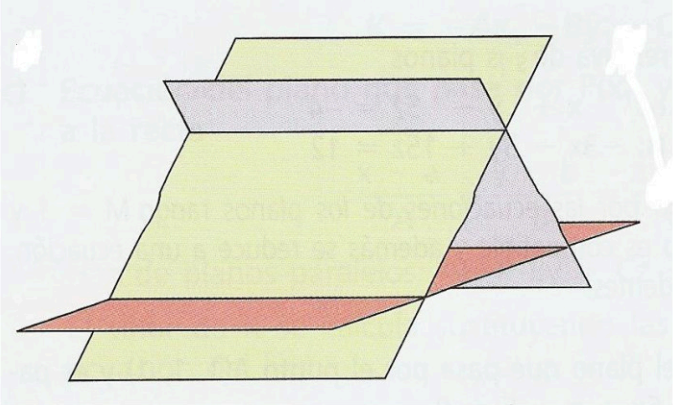
Cadascuna de les tres equacions es correspon amb un pla de l'espai tridimensional.

Sistema d'equacions incompatible, per tant, no hi ha cap punt de tall entre els tres plans.

No hi ha cap parell de plans paral·lels, atès que dels tres vectors normals (un vector normal a cada pla) no n'hi ha cap parell de proporcionals.

Els tres plans es tallen dos a dos en rectes paral·leles.

Dibuix esquemàtic:



Pautes de correcció:

a)

0,25 punts per les matrius del sistema.

0,25 punts pel rang de la matriu associada del sistema.

0,25 punts pel rang de la matriu ampliada del sistema.

0,5 punts aplicar el Teorema Rouché-Frobënius i la conclusió final.

Observació: En cas que l'estudiant no discuteixi el sistema de forma matricial es repartirà el punt entre les diferents parts que condueixen a la resolució.

b)

0,25 punts per raonar que no hi ha cap punt de tall comú.

0,25 punts per raonar que no hi ha cap parell de plans paral·lels

0,5 punts per raonar que es tallen dos a dos.

0,25 punts pel dibuix esquemàtic.

4. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} a & -3 & 0 \\ 4 & a-7 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

a) Estudieu el rang de la matriu A per als diferents valors del paràmetre a.

[1,25 punts]

b) Comproveu que per a $a = 4$ la matriu A és invertible i que es verifica que $A^{-1} = A^2$.

[1,25 punts]

Resolució:

a) Estudiarem el rang de la matriu A a partir dels valors que fan que el rang sigui màxim, 3 en aquest cas, que és quan no s'anul·la el determinant de la matriu.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -3 & 0 \\ 4 & a-7 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -a^2 + 7a - 3 + a - 12 = -a^2 + 8a - 15$$

$$|A| = -a^2 + 8a - 15 = 0 \rightarrow a = 3 \;\; i \;\; a = 5$$

- Quan $a \neq 3 \;\; i \;\; a \neq 5 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow rang(A) = 3$
- Quan $a = 3, rang(A) < 3$ ja que $det(A) = 0$.

$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Es veu clarament que dues files qualssevol d'aquesta matriu són independents, perquè no són proporcionals, per tant $rang(A) = 2$.

Anàlogament, qualsevol menor d'ordre 2 no nul també justifica que $rang(A) = 2$.

- Quan $a = 5, rang(A) < 3$, ja que $det(A) = 0$.

$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. De manera anàloga al cas anterior $rang(A) = 2$.

Com abans, qualsevol menor d'ordre 2 no nul també justifica que $rang(A) = 2$.

b) Per al cas $a = 4$ tenim $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ i pel que hem vist a l'apartat anterior la matriu A té rang 3, per tant, és invertible, és a dir que existeix A^{-1}.

Observació: La invertibilitat de la matriu A també es pot demostrar procedint al càlcul de la matriu inversa i veient que es pot dur a terme.

Per a comprovar que la matriu A^2 és la matriu inversa A^{-1}, és suficient comprovar que $A \cdot A^2 = I$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Que és el que volíem veure.

a) 0,25 punts pel determinant.
   0,25 punts pels valors a discutir.
   0,75 punts per la discussió del 3 casos (0,25 punts cada cas).
b) 0,5 punts per la justificació que A és invertible.
   0,25 punts pel plantejament de la comprovació.
   0,25 punts pel càlcul de la matriu A^2.
   0,25 punts per la comprovació del producte.

27. PAU 2020 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2

2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real k:

$$\begin{cases} 5x + y + 4z = 19 \\ kx + 2y + 8z = 28 \\ 5x + y - kz = 23 + k \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre k.
[1,25 punts]

b) Resoleu, si és possible, el sistema per al cas $k = 0$.
[1,25 punts]

Resolució:

a) Escrivim el sistema en forma matricial.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 4 & 19 \\ k & 2 & 8 & 28 \\ 5 & 1 & -k & 23 + k \end{array}\right)$$

Denotem per a A i A^* la matriu dels coeficients i l'ampliada, respectivament.

El determinant de la matriu A del sistema és:

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ k & 2 & 8 \\ 5 & 1 & -k \end{vmatrix} = k^2 - 6k - 40$$

Si igualem el determinant a 0 obtenim:

$$k^2 - 6k - 40 = 0 \rightarrow k = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 160}}{2} = \frac{6 \pm 14}{2} \Longrightarrow k = 10; k = -4$$

Aleshores, podem considerar els següents tres casos:

- Si $k \neq 10, -4 \rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema compatible determinat.
- Si $k = 10$, el sistema en forma matricial és:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 4 & 19 \\ 10 & 2 & 8 & 28 \\ 5 & 1 & -10 & 33 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 4 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -14 & 14 \end{array}\right)$$

$\text{rang}(A) = 2;\ \text{rang}(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible.

Observació: El rang es pot justificar amb menors no nuls o bé directament es pot concloure la incompatibilitat a partir de la segona equació.

- Si $k = -4$, el sistema en forma matricial és:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 4 & 19 \\ -4 & 2 & 8 & 28 \\ 5 & 1 & 4 & 19 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 4 & 19 \\ 0 & 7 & 28 & 108 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\text{rang}(A) = 2 = \text{rang}(A^*) <$ núm. incògnites $= 3 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminat amb 1 (=3-2) grau de llibertat (les solucions depenen d'un paràmetre lliure).

b) Per a $k = 0$, estem en el primer cas i sabem que es tracta d'un sistema compatible determinat, té solució única:

El sistema queda:

$$\begin{cases} 5x + y + 4z = 19 \\ 2y + 8z = 28 \\ 5x + y = 23 \end{cases}$$

Resolent el sistema per Gauss, o bé per Cràmer, obtenim la solució $\boxed{\begin{cases} x = 1 \\ y = 18 \\ z = -1 \end{cases}}$

a) 0,25 punts per la presentació matricial del sistema.
0,25 punts pels primers passos per arribar als valors crítics per a la discussió.
0,75 punts per la discussió dels tres casos (0,25 punts per cada cas).

b) 0,25 punts per observar que té solució única.
0,25 punts per la concreció del sistema a resoldre.
0,75 punts per la solució (0,25 punts per cada incògnita).

28. PAU 2020 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 5

5. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$.

   a) Trobeu la matriu X que satisfà l'equació $AX = I - 3X$ en què I és la matriu identitat d'ordre 2.
   [1,25 punts]

   b) Comproveu que la matriu X és invertible i calculeu-ne la matriu inversa.
   [1,25 punts]

Resolució:

a) La matriu incògnita X ha de ser quadrada d'ordre 2, en cas contrari no es podria operar l'equació donada. Aïllem X de la igualtat donada:

$$AX = I - 3X \to AX + 3X = I \to (A + 3I)X = I \to X = (A + 3I)^{-1}$$

Així ja podem calcular la matriu X:

$$X = (A + 3I)^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}}$$

b) De la igualtat $(A + 3I)X = I$ podem deduir directament que la matriu X és invertible i que $A + 3I$ és la matriu inversa de la matriu X, així doncs:

$$X^{-1} = A + 3I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}}$$

De forma alternativa, $\det(X) = -4 - (-3) = -1 \neq 0$ i, per tant, X és invertible i la matriu inversa serà:

$$X^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^t = -\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}}$$

a) 0,5 punts per l'expressió matricial de X.
0,75 punts pel càlcul efectiu de la matriu X.

Observació: La resolució que consisteix a plantejar la matriu X com a 4 paràmetres a determinar i la corresponent resolució del sistema d'equacions lineals 4x4 també es donarà per bona.

b) 0,5 punts per comprovar que la matriu X és invertible.
0,75 punts pel càlcul efectiu de la matriu inversa de X.

29. PAU 2020 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 1

1. Sigui $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

   a) Determineu el rang de la matriu A en funció del paràmetre a.
   [1,25 punts]

   b) Comproveu que $\det(A^2 + A) = 0$.
   [1,25 punts]

Resolució:

a) Discutirem el rang a partir de quan el rang pugui ser màxim (3 en aquest cas), que es correspon amb quan el determinant de la matriu és no nul. Comencem calculant $det(A)$ fent la transformació $F2 \to F2 - F1$, on F1 i F2 denoten les files 1 i 2 respectivament de la matriu A. Tenim

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = a - 1.$$

Per tant l'únic valor per al qual la matriu no té rang 3 és $a = 1$. En aquest cas veiem clarament que té rang 2 ja que $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

Per tant tenim:

$a \neq 1$, aleshores $rang(A) = 3$.
$a = 1$, aleshores $rang(A) = 2$.

b) Tenim

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 4 \\ 0 & 1+a & 2 \\ a & 0 & 1+a \end{pmatrix}$$

i per tant $A^2 + A = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 4 \\ 0 & 1+a & 2 \\ a & 0 & 1+a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2a & 6 \\ 1 & a & 3 \\ a & a & 2+a \end{pmatrix}$.

Veiem clarament que $\det(A^2 + A) = 0$ ja que $F1 = 2 \cdot F2$ on $F1, F2$ denoten respectivament les files 1 i 2 de la matriu $A^2 + A$.

De forma alternativa es pot calcular el determinant de la matriu i obtenim:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2a & 6 \\ 1 & a & 3 \\ a & a & 2+a \end{vmatrix} = 2a(2+a) + 6a + 6a^2 - 6a^2 - 6a - 2a(2+a) = 0.$$

c) 0,5 punts pel plantejament (a partir del determinant o de Gauss)
0,25 punts pel valor crític
0,25 punts pel cas $a \neq 1$.
0,25 punts pel cas $a = 1$.

d) 0,25 punts pel càlcul de A^2.
0,25 punts pel càlcul de A^2+A
0,75 punts per la comprovació del determinant igual a 0.
Observació: es pot factoritzar l'expressió A^2+A i aplicar el determinant d'un producte. Si es fa correctament l'apartat tindrà tota la puntuació d'1 punt.

3. Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\begin{cases} ax + y = a \\ x + ay + z = 5 \\ x + 2y + z = 5 \end{cases}$$

c) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre a.
[1,25 punts]

d) Resoleu el sistema per al cas $a = 2$.
[1,25 punts]

Resolució:

a) La matriu de coeficients i l'ampliada, A i A', són les següents:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 0 & a \\ 1 & a & 1 & 5 \\ \underbrace{1 \quad 2 \quad 1}_{A} & & & 5 \end{array}\right)}_{A'}$$

Mirem quan det(A) = 0 per tal que el rang no sigui màxim:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 2a = a(a-2)$$

Que s'anul·la per $a = 0$ i $a = 2$.

Així doncs tenim els següents tres casos:

- $Si\ a \neq 0\ i\ a \neq 2 \Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3 = rang(A') \Rightarrow SCD$
- Si $a = 0$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ \underbrace{1 \quad 2 \quad 1}_{A} & & & 5 \end{array}\right)}_{A'}$$

En primer lloc volem calcular el rang(A).
Com que det(A) = 0 i el menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, aleshores rang(A)=2.

Ara volem calcular el rang(A'). Com que la 1a i la 3a columna són iguals, tots els menors que les continguin seran nuls. Ens queda calcular el determinant amb les altres tres columnes:

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$. Per tant, rang(A') = 2

Aleshores tenim que rang(A) = rang(A') = 2 < 3 = nº d'equacions. Per tant és un SCI amb 1 (3-2) grau de llibertat.

- Si $a = 2$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ \underbrace{1 \quad 2 \quad 1}_{A} & & & 5 \end{array}\right)}_{A'}$$

En aquest cas veiem que la segona i la tercera fila, tant de la matriu A com de la matriu ampliada són iguals entre elles i diferents a la primera, per tant tenim que rang(A) = rang(A') = 2 < 3= nº d'equacions. Per tant és un SCI amb 1 (3-2) grau de llibertat.

b) S'ha de resoldre el sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 2y + z = 5 \\ x + 2y + z = 5 \end{cases}$$

Com que la segona i la tercera equació són la mateixa, aleshores la podem eliminar i hem de resoldre el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 2y + z = 5 \end{cases}$$

I serà un sistema compatible indeterminat amb un grau de llibertat.
Si escollint $x = \lambda$ com a paràmetre lliure, obtenim que la solució, després de substituir i aïlla a la primera equació i anàlogament a la segona, és: $(\lambda, -2\lambda+2, 3\lambda+1)$

a) 0,25 punts pel plantejament
   0,25 punts pels valors crítics.
   0,75 punts per la discussió dels 3 casos (0,25 per cada cas).
b) 0,5 punts pels primers passos de substitució
   0,75 punts pels passos següents fins l'expressió de la solució.

2. Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a-1 \\ 1 & a & 1 \\ 4 & 3a & 1 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

a) Trobeu els valors del paràmetre a per als quals la matriu és invertible.
[1 punt]

b) Discutiu la posició relativa dels plans $\pi_1: x + (a-1)z = 0$, $\pi_2: x + ay + z = 1$ i $\pi_3: 4x + 3a\,y + z = 3$ en funció dels valors del paràmetre *a*.
[1 punt]

Resolució:

a) La matriu A és invertible si i només si $\det(A) \neq 0$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a-1 \\ 1 & a & 1 \\ 4 & 3a & 1 \end{vmatrix} = a + 3a(a-1) - 4a(a-1) - 3a = -a^2 - a$$
$$= -a(a+1)$$

Per tant, A és invertible si i només si $a \neq 0$ i $a \neq -1$.

b) Cal discutir el sistema d'equacions lineals amb matriu i matriu ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a-1 & 0 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 4 & 3a & 1 & 3 \end{array}\right)$$

- En l'apartat anterior ja hem vist que $rang(A) = 3$ si i només si $a \neq 0$ *i* $a \neq -1$. En aquest cas, el sistema d'equacions és compatible i determinat, té una única solució i es tracta de tres plans que es tallen en un punt.

- Per a $a = 0$ tenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$\text{rang}(A) < 3$, però és clar que $\text{rang(A)} = 2$ (perquè la primera i la segona fila no són proporcionals) i, en canvi, calculant el determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 - 1 + 3 = 1 \neq 0$$

observem que $\text{rang}(MA) = 3$.

D'això se'n dedueix que el sistema és incompatible i que, per tant, no hi ha cap punt comú als tres plans.

Es tracta de tres plans que es tallen dos a dos (perquè dos a dos no són paral·lels en no ser proporcionals els respectius vectors normals) en rectes paral·leles.

- Per a $a = -1$ tenim $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right)$.

$\text{rang}(A) < 3$, però és clar que $\text{rang}(A) = 2$ (la primera i la segona fila no són proporcionals) i, en canvi, calculant el determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 8 - 1 + 6 = 0,$$

observem que $\text{rang}(MA) = 2$.

Per tant, $\text{rang}(A) = \text{rang}(MA) = 2$ i el sistema és compatible indeterminat amb (3-2=1) un grau de llibertat. Es tracta de tres plans que es tallen en una recta.

a)
0,25 punts pel plantejament de nul·litat del determinant.
0,25 punts pel càlcul del determinant.
0,25 punts pel càlcul dels valors d'a.
0,25 punts per la resposta final.

b)
0,25 punts pel plantejament general a partir de la discussió del sistema.
0,25 punts pel primer cas.
0,25 punts pel segon cas.
0,25 punts pel tercer cas.

32. PAU 2019 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 3

3. Siguin les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calculeu $A \cdot B$ i $B \cdot A$.
[1 punt]

b) Justifiqueu que si el producte de dues matrius quadrades no nul·les té per resultat la matriu nul·la, aleshores el determinant de totes dues matrius ha de ser zero.
[1 punt]

Resolució:

a)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Si suposem que el determinant de la matriu A fos NO nul (diferent de zero), la matriu inversa d'A existiria. Multiplicant la matriu inversa d'A per l'esquerra d'ambdós membres de l'expressió $A \cdot B = 0$, obtindríem

$A^{-1} \cdot A \cdot B = A^{-1} \cdot 0$, i, per tant, $B = 0$, que contradiria el supòsit que les dues matrius són no nul.les.

El raonament es pot reproduir per a la matriu B.

Per tant, el determinant de la matriu A i el de la matriu B han de ser nuls.

Comentari: qualsevol altre raonament equivalent i correcte serà igualment ben valorat.

a)
0,5 punts pel primer producte.
0,5 punts pel segon producte.

b)
0,25 punts pel plantejament de reducció a l'absurd.
0,25 punts per l'existència de la inversa.
0,25 punts per la conclusió de la nul·litat.
0,25 punts per l'argument equivalent per a l'altra matriu.

33. PAU 2019 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2

2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real k:

$$\begin{cases} x+3y+2z=-1 \\ x+k^2y+3z=2k \\ 3x+7y+7z=k-3 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre k.
[1 punt]

b) Resoleu el sistema per al cas $k=-1$.
[1 punt]

Resolució:

a) La matriu del sistema és $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & k^2 & 3 & 2k \\ 3 & 7 & 7 & k-3 \end{array}\right)$. Igualem el determinant de la matriu de coeficients a zero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & k^2 & 3 \\ 3 & 7 & 7 \end{vmatrix} = k^2-1=0 \rightarrow \begin{cases} k=1 \\ k=-1 \end{cases}$$

Cas 1: $k \neq \pm 1$. El sistema és compatible determinat det(A)≠0 i, per tant, $rg(A)=rg(\overline{A})=3=$ nombre d'incògnites.

Cas 2: $k=1$

$rg(A)=rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 7 \end{pmatrix}=2$, ja que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-3=-2 \neq 0$.

$$rg(\overline{A})=rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 7 & -2 \end{pmatrix}=rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}=rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}=3$$

Per tant, és un sistema incompatible, ja que $rg(A)=2<rg(\overline{A})=3$.

Cas 3: $k=-1$

$rg\left(A\right)=rg\begin{pmatrix}1&3&2\\1&1&3\\3&7&7\end{pmatrix}=2$, ja que el menor $\begin{vmatrix}1&3\\1&1\end{vmatrix}=1-3=-2\neq 0$.

$$rg\left(\overline{A}\right)=rg\begin{pmatrix}1&3&2&-1\\1&1&3&-2\\3&7&7&-4\end{pmatrix}=rg\begin{pmatrix}1&3&2&-1\\0&-2&1&-1\\0&-2&1&-1\end{pmatrix}=2$$

Per tant, és un sistema compatible indeterminat, ja que $rg\left(A\right)=rg\left(\overline{A}\right)=2<3$.

b) Si $k=-1$, el sistema d'equacions és compatible indeterminat amb un grau de llibertat, ja que tenim 3 incògnites i el rang de les matrius és 2. Les solucions del sistema són:

$$\begin{cases}x+3y+2z=-1\\x+y+3z=-2\\3x+7y+7z=-4\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x+3y+2z=-1\\x+y+3z=-2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x+3y+2z=-1\\2y-z=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=1-7t\\y=t\\z=2t-1\end{cases}\quad t\in\mathbf{R}$$

a) 0,25 punts per la presentació matricial del sistema o els primers passos per arribar als valors crítics per a la discussió.
0,75 punts per la discussió dels tres casos (0,25 punts per cada cas).

b) 0,5 punts per la resolució del sistema.
0,5 punts per la formulació general de les solucions.

Observació: El model de resolució és orientatiu, ja que tant a l'apartat a) *com al* b) *es poden fer servir mètodes alternatius per a la discussió i la resolució.*

34. PAU 2019 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 5

5. Sigui la matriu $M=\begin{pmatrix}1 & a\\ a & 0\end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

   a) Calculeu per a quins valors del paràmetre a se satisfà la igualtat $M^2-M-2I=0$, en què I és la matriu identitat i 0 és la matriu nul·la, totes dues d'ordre 2.
   [1 punt]

   b) Fent servir la igualtat de l'apartat anterior, trobeu una expressió general per a calcular la inversa de la matriu M i, a continuació, calculeu la inversa de M per al cas $a=\sqrt{2}$.
   [1 punt]

Resolució:

a) Imposem $M^2-M-2I=0$:

$$M^2-M-2I=\begin{pmatrix}1+a^2 & a\\ a & a^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & a\\ a & 0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2-2 & 0\\ 0 & a^2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Els únics valors per als quals se satisfà la igualtat són $a^2-2=0\rightarrow a=\pm\sqrt{2}$

b) Per a l'expressió general, operem la igualtat de l'apartat a:

$$M^2-M-2I=0\rightarrow M^2-M=2I\rightarrow M\left(M-I\right)=2I\rightarrow M\,\frac{1}{2}\left(M-I\right)=I$$

Així doncs, d'aquesta darrera igualtat, deduïm $\boxed{M^{-1}=\frac{1}{2}(M-I)}$.

Per $a=\sqrt{2}$, se satisfà $M^2-M-2I=0$, per tant podem aplicar el resultat anterior:

$$\boxed{M^{-1}}=\frac{1}{2}(M-I)=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=\boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & -1\end{pmatrix}}$$

a) 0,5 punts per les operacions amb les matrius.
0,5 punts per trobar els dos valors del paràmetre.

b) 0,5 punts per l'expressió general de la inversa.
0,5 punts per donar la inversa demanada.

Observació: En cas que l'estudiant calculi directament només la matriu inversa sense tenir en compte l'expressió general la puntuació de l'apartat b) *serà de 0,5 punts.*

3. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real *a*:

$$\begin{cases} ax + 7y + 5z = 0 \\ x + ay + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases}$$

c) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre *a*.
[1 punt]

d) Resoleu el sistema per al cas $a = 2$.
[1 punt]

Resolució:

a) El sistema en forma matricial és el següent:

$$A' = A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 7 & 5 & 0 \\ 1 & a & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Anem a calcular el rang(*A*) i rang(*A'*) per als diferents valors del paràmetre *a*.

El rang(*A*) serà màxim quan el determinant de la matriu *A* sigui diferent de 0. Calculem el determinant de la matriu *A*.

$$\begin{vmatrix} a & 7 & 5 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 5 - a - 7 = a^2 - a - 2$$

Quan resolem $a^2 - a - 2 = 0$ obtenim els valors $a = -1$ i $a = 2$.

- Cas $a \neq -1$ i $a \neq 2$.

$|A| \neq 0$ i per tant rang(*A*) = 3 = rang(A') = nombre d'incògnites, per tant el sistema és Compatible Determinat.

- Cas $a = -1$

Substituïm el valor d'*a* i obtenim:

$$A' = A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Com que $|A| = 0$ aleshores rang(*A*) < 3, però com que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, aleshores rang(*A*) = 2.

Com que $\begin{vmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 3 + 14 = 15 \neq 0$, aleshores rang(*A'*) = 3

Com que rang(*A*) ≠ rang(*A'*), aleshores el sistema és Incompatible.

- Cas $a = 2$

Substituïm el valor d'a i obtenim:

$$A' = A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Com que $|A| = 0$ aleshores rang(A) < 3, però com que $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, aleshores rang($A$) = 2.

Com que $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -8 - 6 + 14 = 0$, aleshores rang($A'$) = 2

Com que rang(A) = rang(A') = 2 < nombre d'incògnites, aleshores el sistema es Compatible Indeterminat amb 1 (3-2=1) grau de llibertat.

b) Cas $a = 2$

Substituïm el valor d'a i obtenim:

$$A' = A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Per aquest cas es tracta d'un sistema compatible indeterminat i, com s'ha vist, el sistema es pot reduir a les dues últimes equacions, ja que $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ i rang A=rang A'=2.

Aleshores, traspassant el termes en z al terme independent, el sistema equivalent a resoldre és

$$\begin{cases} x + 2y = 3 - z \\ y = -2 - z \end{cases}$$

que té per solució, $y = -2-z$ i, substituint la variable y a la primera equació, $x = 3-z-2(-2-z) = 3-z+4+2z = 7+z$ amb el que tenim les variables x i y en funció de la variable z que fa de paràmetre i dóna el grau de llibertat al conjunt de solucions.

Observació: El sistema es pot resoldre per qualsevol altre mètode.

a)

0,25 punts pels plantejament matricial i els valors crítics.
0,25 punts pel cas general.
0,25 punts pel primer cas particular.
0,25 punts pel segon cas particular.

b)

0,25 punts per la substitució.
0,25 punt per la identificació de compatible indeterminat.
0,25 punts per la solució y.
0,25 punts per la solució x.

Nota: La solució deixada en funció de qualsevol altre paràmetre o incògnita és també correcta.

36. PAU 2018 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 2

2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real a:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 1 \\ 2x + ay = 2a \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre a.
[1 punt]

b) Resoleu el sistema per al cas $a = 1$.
[1 punt]

Resolució:

a) La matriu de coeficients i l'ampliada, A i A', són les següents:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ \underbrace{2 \quad a \quad 0}_{A} & & & 2a \end{array}\right)}_{A'}$$

Calculem det(A) = 0

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & a & 0 \end{vmatrix} = 2a - 4$$

Que s'anul·la per a $a = 2$

- Cas $a \neq 2$. Rang(A) = Rang(A') = 3 = nombre d'incògnites. Per tant, és un SCD.

- Cas $a = 2$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ \underbrace{2 \quad 2 \quad 0}_{A} & & & 4 \end{array}\right)}_{A'}$$

S'observa que les dues primeres columnes són iguals. Per tant, tots els menors que les incloguin valdran zero. A partir d'aquí, l'únic determinant d'ordre 3 que cal considerar a A' és

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$, que també val zero; per tant, rang(A') < 3. Com que el menor de A $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, aleshores rang(A) = rang(A') = 2 < 3 = nombre d'incògnites, i per tant, és un SCI amb (3 – 2 = 1) un grau de llibertat.

b) El sistema es pot resoldre per determinants o bé de manera tradicional (igualació/substitució/reducció). És un sistema compatible determinat amb solució $x = 0$, $y = 2$ i $z = 1$.

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts pel plantejament matricial de la discussió.
0,25 punts pel càlcul del valor singular a discutir.
0,25 punts pel cas $a \neq 2$.
0,25 punts pel cas $a = 2$.

b)
0,25 punts per identificar que el sistema és SCD.
0,25 punts pel valor de x.
0,25 punts pel valor de y.
0,25 punts pel valor de z.

37. PAU 2018 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 4

4. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, en què α és un paràmetre real.

a) Hi ha algun valor de $\alpha \in R$ tal que A no tingui inversa per a aquest valor?
[1 punt]

b) Calculeu la matriu inversa de A^2 per a $\alpha = 0$.
[1 punt]

Resolució:

a) La matriu A no tindrà inversa si i només si el determinant de A és 0.

Fem el determinant de la matriu A:

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\alpha^2 - 1 = 0$. No té solució real.

Això vol dir que la matriu A té inversa per qualsevol valor de α.

Comentari: És molt possible que hi hagi alumnes que s'equivoquin al resoldre l'equació i donin com a solució que A no té inversa quan $\alpha = 1$ o $\alpha = -1$. Aquest error no afectarà l'apartat b.

b) Ara fem $\alpha = 0$ i busquem la matriu A^2:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Per a veure que A^2 té inversa, comprovem que té determinant diferent de zero.

Efectivament, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

La matriu inversa de A^2 és $(A^2)^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

a)
0,25 punts per la condició d'inversa.
0,25 punts pel càlcul del determinant.
0,25 punts per la resolució de la igualtat.
0,25 punts per la resposta final al problema.

b)
0,25 punts pel càlcul de la matriu al quadrat.
0,25 punts per la comprovació que la matriu té inversa.
0,25 punts pels càlculs intermedis de la matriu inversa.
0,25 punts per la matriu inversa final.

38. PAU 2018 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

1. Siguin les matrius $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ t & 2 \end{pmatrix}$ i $N = \begin{pmatrix} -1 & t & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   a) Calculeu $M \cdot N$ i comproveu que la matriu resultant no és invertible.

   [1 punt]

   b) Trobeu els valors de t per als quals la matriu $N \cdot M$ és invertible.

   [1 punt]

Resolució:

a) M· N = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ t & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & t & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2-t & t^2 & 2t-2 \end{pmatrix}$

$|M \cdot N| = 2t - t^2 - t^2 + 2t^2 - 2t = 0$ per tant la matriu no és invertible (sigui quin sigui el valor de t).

b) N·M = $\begin{pmatrix} -1 & t & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ t & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t-1 & 2-t \\ 1-t & 0 \end{pmatrix}$

$|N \cdot M| = \begin{vmatrix} 2t-1 & 2-t \\ 1-t & 0 \end{vmatrix} = -(1-t) \cdot (2-t)$.

És immediat veure que el determinant s'anul·la per a $t = 1$ i $t = 2$.

Per tant, la matriu és invertible per a qualsevol valor de t diferent d'1 i 2.

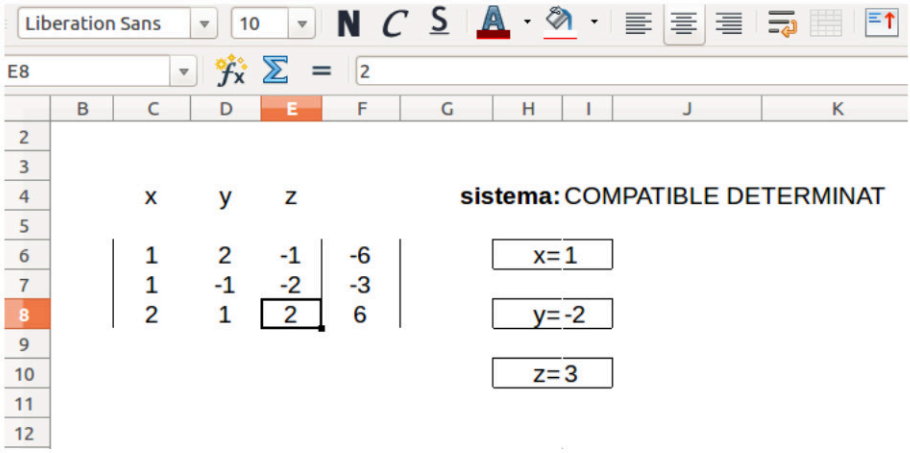
Pautes de correcció:

a)
0,5 punts pel producte.
0,25 punts pel determinant.
0,25 punts per la conclusió.

b)
0,25 punts pel producte.
0,25 punts pel determinant.
0,25 punts pels punts singulars.
0,25 punts per la conclusió.

39. PAU 2018 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 6

6. Uns estudiants de batxillerat han programat un full de càlcul que dona la solució d'un sistema d'equacions compatible determinat de manera automàtica, com el de la figura següent:



a) Escriviu el sistema i comproveu que els valors proposats com a solució són correctes.
[1 punt]

b) Quin valor s'hauria de posar en lloc del 2 que està emmarcat en la imatge, corresponent a la cel·la E8 (a_{33} de la matriu de coeficients), perquè el sistema fos incompatible?
[1 punt]

Resolució:

a)

El sistema és $\begin{cases} x+2y-z=-6 \\ x-y-2z=-3 \\ 2x+y+2z=6 \end{cases}$ i la solució $\begin{cases} 1+2\cdot(-2)-3=-6 \\ 1-(-2)-2\cdot 3=-3 \\ 2\cdot 1+(-2)+2\cdot 3=6 \end{cases}$ és correcta.

b)

Estudiem el rang de la matriu $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix}$ segons el paràmetre *t*:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & t \end{vmatrix} = -t-8-1-2+2-2t=-3t-9;\ -3t-9\neq 0,$$

és a dir, $t\neq -3$ tenim rang A=3 i, per tant, rang màxim i el sistema seria compatible determinat.

Què passa quan $t = -3$?

Com que $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, aleshores, rang A = 2.

Estudiem el rang de la matriu ampliada: $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

Sempre tenim el menor: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -6 - 12 - 6 - 12 + 3 - 12 \neq 0$, per tant, el rang de la matriu ampliada és 3.

Tenim, doncs, rang A = 2 i rang A'=3, per tant, el sistema és incompatible.

Aleshores el valor 2 emmarcat s'hauria de canviar per un -3.

a)
0,5 punts pel sistema.
0,5 punts per la comprovació de la solució.

b)
0,25 punts pel plantejament del sistema parametritzat.
0,25 punts pel punt singular.
0,25 punts per la discussió del cas $t \neq -3$
0,25 punts per la discussió del cas $t = -3$ i la conclusió final.

40. PAU 2018 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 1

1. Considereu el sistema d'equacions lineals

$$\left.\begin{aligned} 6x+3y+2z&=5\\ 3x+4y+6z&=3\\ x+3y+2z&=m \end{aligned}\right\} \text{ per a } m\in\mathbb{R}.$$

a) Expliqueu raonadament que per a qualsevol valor del paràmetre *m* el sistema té una única solució.
[1 punt]

b) Resoleu el sistema i trobeu l'expressió general del punt solució.
[1 punt]

Resolució:

a) Per a veure que per a qualsevol valor del paràmetre *m* el sistema té solució única, n'hi ha prou en veure que si A és la matriu dels coeficients dels sistema i A' la matriu ampliada aleshores $rang(A)=rang(A')=3=$ nombre d'incògnites independentment del valor del paràmetre *m*.

$$A=\begin{pmatrix}6&3&2\\3&4&6\\1&3&2\end{pmatrix}, A'=\begin{pmatrix}6&3&2&5\\3&4&6&3\\1&3&2&m\end{pmatrix}$$

Com que $|A|=\begin{vmatrix}6&3&2\\3&4&6\\1&3&2\end{vmatrix}=48+18+18-8-108-18=-50\neq 0\Rightarrow$

$rang(A)=3\Rightarrow rang(A')=3$ i per tant el sistema és compatible determinat, sigui quin sigui el valor del paràmetre m.

b) Podem resoldre el sistema pel mètode de Cràmer.

$$x=\frac{\begin{vmatrix}5&3&2\\3&4&6\\m&3&2\end{vmatrix}}{-50}=\frac{40+18+18m-8m-90-18}{-50}=\frac{10m-50}{-50}=\frac{5-m}{5}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}6&5&2\\3&3&6\\1&m&2\end{vmatrix}}{-50}=\frac{36+6m+30-6-36m-30}{-50}=\frac{30-30m}{-50}=\frac{3m-3}{5}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}6&3&5\\3&4&3\\1&3&m\end{vmatrix}}{-50}=\frac{24m+45+9-20-54-9m}{-50}=\frac{15m-20}{-50}=\frac{4-3m}{10}$$

Per tant la solució del sistema és $\left(\frac{5-m}{5},\frac{3m-3}{5},\frac{4-3m}{10}\right)$

Apartat a)

0,25 punts per la matriu del sistema.

0,25 punts pel determinant de la matriu de coeficients.

0,25 punts per la igualtat de rangs a 3.

0,25 punts per la discussió del sistema.

Apartat b)

0,25 punts pel càlcul de x.

0,25 punts pel càlcul de y.

0,25 punts pel càlcul de z.

0,25 punts per l'expressió general del punt solució.

41. PAU 2018 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 6

6. Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Si $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ és la matriu identitat d'ordre 3, calculeu per a quins valors de k la matriu $A + kI$ té inversa. Trobeu, si existeix, la matriu inversa de $A - 2I$.

[1 punt]

b) Calculeu la matriu X que satisfà l'equació $X \cdot A + A^t = 2 \cdot X$, en que A^t és la matriu transposta de la matriu A.

[1 punt]

Resolució:

a) La matriu $A + kI$ té inversa si i només si $|A + kI| \neq 0$.

$$|A + kI| = \begin{vmatrix} -1+k & 0 & 1 \\ 0 & -1+k & 0 \\ 1 & 1 & 1+k \end{vmatrix} = (1+k)(-1+k)^2 - (-1+k) =$$
$$= (k-1)\big((k+1)\cdot(k-1) - 1\big) = (k-1)(k^2 - 1 - 1) = (k-1)(k^2 - 2).$$

Per tant, $|A + kI| \neq 0 \Leftrightarrow \boxed{k \neq 1, \pm\sqrt{2}}$.

En particular, $A - 2I$ sí que és invertible, ja que correspon al cas $k = -2$.

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A - 2I| = -9 + 3 = -6$$

$$(A - 2I)^{-1} = \boxed{\frac{1}{-6}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}}$$

b) $X \cdot A + A^t = 2 \cdot X$

$$X \cdot A - 2 \cdot X = -A^t$$
$$X(A - 2I) = -A^t$$
$$X(A - 2I)(A - 2I)^{-1} = -A^t(A - 2I)^{-1}$$
$$X = -A^t(A - 2I)^{-1}$$

$$X = -\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{-6}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 9 \\ 6 & 4 & 12 \end{pmatrix}}$$

Apartat a)

0,25 punts pel càlcul del determinant.

0,25 punts pels valors de k.

0,25 punts per la justificació que existeix la inversa.

0,25 punts pel càlcul de la matriu inversa.

Apartat b)

0,25 punts pel traspàs de termes.

0,25 punts per treure factor comú.

0,25 punts per multiplicar per la inversa.

0,25 punts pel càlcul final.

42. PAU 2017 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 2

2. Siguin les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Comproveu que satisfan la igualtat $A^2 - \frac{1}{2}A \cdot B = I$, en què I és la matriu identitat d'ordre 3.
[1 punt]

b) Fent servir la igualtat anterior, trobeu la matriu inversa d'A: A^{-1}.
[1 punt]

Resolució:

a) Només cal fer les operacions.

$$A^2 - \frac{1}{2}A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 2 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Traient factor comú A per l'esquerra: $A \cdot \left(A - \frac{1}{2}B\right) = I$, així que $A^{-1} = A - \frac{1}{2}B$.

Operant, deduïm que $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 & 3/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}}$.

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts pel càlcul d'A^2.
0,25 punts pel càlcul d'AB
0,5 punts pel càlcul final.

b)
0,25 punts per la descomposició factorial.
0,25 punts per identificar la inversa.
0,5 punts pel càlcul final (factoritzat o no).

43. PAU 2017 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 3

3. Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 1 \\ 2x + ay = 2a \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre real a.
[1 punt]

b) Resoleu el sistema per al cas $a = 2$.
[1 punt]

Resolució:

a)

La matriu de coeficients i l'ampliada, A i A', són les següents:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ \underbrace{2 \quad a \quad 0}_{A} & & & 2a \end{array}\right)}_{A'}$$

Calculem quan $\det(A) = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & a & 0 \end{vmatrix} = 2a - 4$, que s'anul·la només per $a = 2$. Així doncs, tenim dos casos:

CAS $a = 2$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ \underbrace{2 \quad 2 \quad 0}_{A} & & & 4 \end{array}\right)}_{A'}$$

S'observa que les dues primeres columnes són iguals. Per tant, tots els menors que les incloguin valdran zero. A més, el determinant

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$ també val zero, per tant, $\text{rang}(A') < 3$. Com que el menor d'A $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, aleshores $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 2 < 3$ nombre d'incògnites i, per tant, és un SCI amb 1 (=3-2) grau de llibertat.

CAS $a \neq 2$. $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 3 =$ nombre d'incògnites. Per tant, és un SCD.

b) Per al cas $a = 2$ sabem que es tracta d'un sistema compatible indeterminat amb una incògnita lliure i equivalent a

$$\left.\begin{array}{rl} x & -z=1-y \\ x & =2-y \end{array}\right\}$$

Per tant, si agafem la incògnita y com a paràmetre, obtenim $x = 2-y$ i $z = x + y - 1 = 2 - y + y - 1 = 1$. Així la solució és de la forma $\boxed{(2-y, y, 1)}$ per a qualsevol valor del paràmetre o variable y.

a)
0,25 punts pel plantejament matricial.
0,25 punts pel determinant de la matriu associada i el valor crític.
0,25 punts pel cas $a = 2$.
0,25 punts pel cas $a \neq 2$.

b)
0,25 punts per al sistema reduït.
0,25 punts per l'expressió d'una primera incògnita.
0,25 punts per l'expressió de la segona incògnita.
0,25 punts per l'expressió general del SCI (tant si es deixa la x com la y com a paràmetre o incògnita lliure).

44. PAU 2017 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

Estudieu per a quins valors de λ el sistema és incompatible.

$$M|\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 2\lambda & -1 & 5\lambda & 30 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2\lambda & -1 & 5\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 5\lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5\lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda(5\lambda+5) = 5\lambda(\lambda+1)$$

CAS I: Si $\lambda \neq 0$ i $\lambda \neq -1$

$Rang\ M = Rang\ \overline{M} = n\acute{u}m.inc\grave{o}g = 3$

En virtut del teorema de Rouché-Frobënius, en aquest cas el sistema és $compatible\ determinat$.

CAS II: Si $\lambda = 0$

$$M|\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & 30 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \ , \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies Rang\ M = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 10 \\ -1 & 0 & 30 \end{vmatrix} = 70 \neq 0 \implies Rang\ \overline{M} = 3$$

$Rang\ M \neq Rang\ \overline{M}$

En virtut del teorema de Rouché-Frobënius, el sistema és $incompatible$.

CAS III: $\lambda = -1$

$$M|\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ -2 & -1 & -5 & 30 \end{array}\right)$$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 0 \implies Rang\ M = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 10 \\ -1 & -5 & 30 \end{vmatrix} = 120 \neq 0 \implies Rang\ \overline{M} = 3$

$Rang\ M = 2 \quad Rang\ \overline{M} = 3$

$Rang\ M \neq Rang\ \overline{M}$

En virtut del teorema de Rouché-Frobënius, el sistema és $incompatible$.

El sistema és incompatible per a dos valors del paràmetre λ: $\lambda = 0$ i $\lambda = -1$.

b) Resoleu el sistema per a $\lambda = 1$.

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + z = 10 \\ 2x - y + 5z = 30 \end{cases}$$

En aquest cas el sistema és compatible determinat, té una única solució i el sistema es pot resoldre per qualsevol mètode conegut, per exemple, pel mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 5 & 30 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -3 & 7 & 30 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 60 \end{array}\right)$$

De la tercera equació, tenim $10z = 60$, per tant, $z = 6$.
De la segona equació, tenim $y+z = 10$, per tant, $y = 4$.
De la primera equació, tenim $x + y - z = 0$, per tant, $x = 2$.

Solució: $(x = 2 \ , \ y = 4 \ , \ z = 6)$.

a)
0,25 punts per al determinant de la matriu de coeficients i per als valors crítics.
0,25 punts per a la discussió del cas $\lambda = -1$.
0,25 punts per a la discussió del cas $\lambda = 0$.
0,25 punts per a la resposta a la pregunta.

b)
0,25 punts per al sistema particular (i la indicació de SCD, si és el cas, que no cal).
0,25 punts per al valor de la x.
0,25 punts per al valor de la y.
0,25 punts per al valor de la z.

45. PAU 2017 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4

Perquè tingui solució única caldrà que el sistema sigui compatible i determinat; és a dir, que rangM=rangM'=3

amb $(M|M') = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{array}\right)$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2a$$

Per tal que rangM=3 cal que Det M $\neq 0 \iff a \neq 0$

Això vol dir que el sistema és compatible i determinat sempre que $a \neq 0$

b) Per Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2a} = \frac{a^3 - 2a}{-2a} = \frac{2 - a^2}{2}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix}}{-2a} = \frac{1 - a^2 - 1}{-2a} = \frac{a}{2} \quad \text{i}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}}{-2a} = \frac{1 - 1 - a^2}{-2a} = \frac{a}{2}$$

Per tant, la solució del sistema (en funció del paràmetre a) és: $\left(\frac{2-a^2}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$

a)
0,25 punts per la condició de Rouché-Frobënius.
0,25 punts pel determinant de l'associada.
0,25 punts pel valor singular.
0,25 punts pel raonament final.

b)
0,25 punts per l'aplicació de la regla de Cramer o mètode equivalent.
0,25 punts pel càlcul de la *x*.
0,25 punts pel càlcul de la *y*.
0,25 punts pel càlcul de la *z*.

46. PAU 2017 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 5

Per a comprovar que una matriu $M = \begin{pmatrix} x & -1 \\ y^2+1 & x \end{pmatrix}$ és invertible és suficient comprovar que el seu determinant és sempre diferent de 0.

Efectivament, $|M| = x^2 - (-1)(y^2+1) = x^2 + y^2 + 1$, que és sempre diferent de 0, ja que $x^2 + y^2 \geq 0$ en ser suma de dos quadrats, independentment del valor que tinguin les variables *x* i *y*.

a) Per a $x = 1$ i $y = -1$, tenim $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Tindrem $M^{-1} = \frac{1}{|M|}(AdjM)^t = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}$.

a)
0,5 punts pel plantejament a partir del determinant no nul (o del rang 2).
0,5 punts per provar que el determinant és sempre diferent de 0.

b)
0,25 punts per l'expressió de *M*.
0,25 punts per la formulació del càlcul de la matriu inversa.
0,5 punts pel càlcul final.

.

47. PAU 2017 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 2

Fem Gauss prenent les variables en l'ordre donat x, y, z, i obtenim les matrius

$$M|MA = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & k & 1 \\ 1 & k+1 & 1 & k^2-4 \end{array}\right)$$

Substituïm la segona fila (F2) per F2-2·F1 i la tercera fila F3 per F3-F1, on F1 denota la primera fila. Tenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & k-2 & 1 \\ 0 & k+2 & 0 & k^2-4 \end{array}\right)$$

Ara és n'hi ha prou d'intercanviar les columnes 2 o 3 per tenir la matriu diagonalitzada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & k-2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & k+2 & k^2-4 \end{array}\right)$$

i podem passar a la discussió:

- Per $k \neq 2$ i $k \neq -2$ tenim $rang\ M = rang\ MA = núm.incog. = 3$ i per tant és un sistema compatible determinat.
- Per $k = 2$ tenim $rang\ M = 2$ i $rang\ MA = núm.incog. = 3$ i per tant es tracta d'un sistema incompatible.
- Per $k = -2$ tenim $rang\ M = rang\ MA = 2$ i per tant és un sistema compatible indeterminat amb 3-2 = 1 grau de llibertat.

Nota: Anàlogament, es pot discutir el rang *M* a partir del determinant de la matriu. $|M| = 4 - k^2$ o del menor una vegada aplicat el primer pas de Gauss, amb la igualtat $\begin{vmatrix} 2 & k-2 \\ k+2 & 0 \end{vmatrix} = 0$, que condueix igualment als valors $k = 2$ i $k = -2$, per a organitzar la discussió. En qualsevol cas, la resolució correcta serà puntuada amb 1 punt.

***b*)**

Ja hem vist que per $k = -2$ tenim un sistema compatible indeterminat i fent servir els càlculs de l'apartat anterior sabem que el sistema és equivalent a:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2y - 4z = 1 \end{cases}$$

Triant z com a paràmetre, s'obté $y = 2z + \frac{1}{2}$ i $x = y - z = z + \frac{1}{2}$ d'on la solució és

$$\boxed{(x, y, z) = (z + \frac{1}{2}, 2z + \frac{1}{2}, z)}$$

O alternativament

$$\boxed{(x, y, z) = \left(x, 2x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2}\right)}$$

o

$$\boxed{(x, y, z) = \left(\frac{2y + 1}{4}, y, \frac{2y - 1}{4}\right)}$$

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts pel plantejament matricial.
0,25 punts per arribar als valors crítics.
0,25 punts per a un cas de la discussió.
0,25 punts pels altres dos casos de la discussió.

b)
0,25 punts per la versió reduïda del sistema.
0,25 punts per l'expressió d'una primera incògnita.
0,25 punts per l'expressió de la segona incògnita
0,25 punts per la solució general del sistema com a SCI.

48. PAU 2017 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 4

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -Id$$

$A^6 = A^3 \cdot A^3 = (-Id)(-Id) = Id.$

b) Com que $Id = A^6 = A \cdot A^5$ aleshores la matriu inversa de A^5 és A.

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts per A^2.
0,25 punts per A^3.
0,5 punts per A^6.

b)
0,5 punts per la factorització.
0,5 punts per l'obtenció de la inversa.

49. PAU 2017 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 5

Fem el determinant de la matriu dels coeficients: $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)^2 \cdot (a+2)$

✓ Si $a \neq 1$ i $a \neq -2$ per Rouché-Frobenius, rang(A) = rang(A/b) = nombre d'incògnites = 3

Sistema compatible determinat, una sola solució, un punt.
Els tres plans són secants i es tallen en un punt.

✓ Si $a = 1$ $(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ rang(*A*) = rang(A/b) = 1 < 3 = nombre d'incògnites, llavors és un sistema compatible indeterminat amb dues variables lliures.
Els tres plans coincideixen.

✓ Si $a = -2$

$$\rightarrow (A|b) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Llavors és un sistema incompatible. Es tracta per tant de tres plans que no tenen cap punt comú a tots tres. Com que tots els menors d'*A* d'ordre 2 són diferents de 0, cada dos plans es tallen en una recta que queda paral·lela (no continguda) al tercer pla.

b) El sistema és compatible indeterminat quan $a = 1 \rightarrow \quad (A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

ens queda el pla: $x + y + z = 1$, que en forma paramètrica serà: $\pi: \begin{cases} x = 1 - t - s \\ y = t \\ z = s \end{cases}$.

Un punt del pla és $P_\pi = (1,0,0)$ i dos vectors directors: $v_1 = (-1,1,0)$ i $v_2 = (-1,0,1)$

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts pel determinant de la matriu associada i els valors singulars.
0,25 punts pel cas general.
0,25 punts pel cas *a* = 1.
0,25 punts pel cas *a* = -2.

b)
0,5 punts per l'expressió paramètrica del pla solució.
0,25 punts pel punt.
0,25 punts pels dos vectors directors.

50. PAU 2016 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 2

2. Tres nombres, x, y i z, compleixen que a) el primer és la suma dels altres dos i b) el segon és la meitat del primer més el doble del tercer.

a) Comproveu que el problema de calcular els nombres x, y i z té una infinitat de solucions.

[1 punt]

b) Trobeu una expressió general de les solucions.

[1 punt]

Resolució:

a) Si denotem per *x*, *y* i *z* els tres nombres, l'enunciat ens diu:

$$\begin{cases} x = y + z \\ y = \frac{1}{2}x + 2z \end{cases} \quad \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 2y + 4z = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ i } A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Com que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, es tracta d'un sistema homogeni en què el rang $A = 2 =$ rang $A' < 3 =$ nombre d'incògnites. Per tant és un sistema compatible indeterminat amb (3-2=1) una infinitat de solucions, que és el que l'enunciat demana que es comprovi.

b) Si resolem per Gaus tenim $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x - y - z = 0 \\ y - 5z = 0 \end{cases}$.

Per tant les solucions es poden escriure de la forma general $\boxed{\begin{cases} x = 6 \cdot p \\ y = 5 \cdot p \\ z = p \end{cases}}$

Observació: Es donarà per bo qualsevol mètode de resolució correcta.

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,5 punts per la formulació del sistema.

0,25 punts per la presentació matricial del sistema

0,25 punts per la discussió del sistema.

Apartat b)

0,5 punts per la resolució del sistema.

0,5 punts per la formulació general de les solucions.

51. PAU 2016 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 5

5. Responeu a les qüestions següents:

a) Calculeu l'única matriu de la forma $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ a & 1/2 \end{pmatrix}$ que satisfà que $A^2 = A$ i comproveu que A i $A - I$ no són invertibles.

[1 punt]

b) Justifiqueu raonadament que si A és una matriu quadrada d'ordre n diferent de la matriu nul·la, 0, i de la matriu identitat, I, i que satisfà la propietat $A^2 = A$, aleshores les matrius A i $A - I$ no són invertibles.

[1 punt]

Resolució:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ a & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ a & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a+1}{4} & \frac{1}{4} \\ a & \frac{a+1}{4} \end{pmatrix}$

Quan igualem a la matriu A obtenim el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{a+1}{4} & = & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & = & \frac{1}{4} \\ a & = & a \\ \frac{a+1}{4} & = & \frac{1}{2} \end{array}\right\}$$

És a dir, $\frac{a+1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \boxed{A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}}$

I tenim $A - I = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/4 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Observem que ni A ni $A - I$ són invertibles ja que totes dues tenen determinant 0.

b) Si $A^2 = A$ aleshores $A^2 - A = 0$, és a dir $A(A - I) = 0$. Anem a demostrar que cap de les dues matrius poden ser invertibles.
Si A fos invertible aleshores $A^{-1}A(A - I) = A^{-1} \cdot 0 \Rightarrow A - I = 0 \Rightarrow A = I$!!
Si $A - I$ fos invertible aleshores $A(A - I)(A - I)^{-1} = 0 \cdot (A - I)^{-1} \Rightarrow A = 0$!!

Apartat a)

0,25 punts pel producte matricial.

0,25 punts pel plantejament i resolució del sistema.

0,25 punts per l'expressió de A i A-I.

0,25 punts per veure que ni A ni A-I són invertibles.

Apartat b)

0,5 punts per la prova que A no és invertible.

0,5 punts per la prova que A-I no és invertible.

52. PAU 2016 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 1

1. Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x+4y+4z & = & 4k-7 \\ 2x-ky & = & -1 \\ -2x & = & k+1 \end{array}\right\}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre real *k*.
[1 punt]

b) Resoleu el sistema per al cas $k = 0$.
[1 punt]

Resolució:

a) La matriu de coeficients i l'ampliada, *A* i *A'*, són les següents:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 4k-7 \\ 2 & -k & 0 & -1 \\ \underbrace{-2 \quad 0 \quad 0}_{A} & & & k+1 \end{array}\right)}_{A'}$$

Estudiem primer per a quins valors del paràmetre *k* el *rang*(*A*) és màxim. Per a això calcularem *det*(*A*) i estudiarem quan s'anul·la.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & -k & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8k.$$

Per tant, el determinant d'*A* s'anul·la només en el cas *k* = 0. Per tant, tenim els següents dos casos.

Cas I: $k \neq 0$

En aquest cas, tenim *rang*(*A*) = 3, per tant *rang*(*A'*) =3 = nombre d'incògnites. Per tant, el sistema és Compatible Determinat.

Cas II: $k = 0$

En aquest cas la matriu del sistema és

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & -7 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ \underbrace{-2 \quad 0 \quad 0}_{A} & & & 1 \end{array}\right)}_{A'}$$

Com que *det*(*A*) = 0, rang(*A*) < 3, però el menor $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$ ens diu que *rang*(*A*) = 2.

Per a saber el rang de la matriu ampliada orlem el menor anterior i calculem el determinant.

Com que $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -7 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8 - 8 = 0 \Rightarrow rang(A') = 2 = rang(A)$ i per tant el sistema és Compatible Indeterminat amb 1 (3-2) grau de llibertat.

En resum:

- Si $k \neq 0$: Sistema Compatible Determinat.
- Si $k = 0$: Sistema Compatible Indeterminat amb un 1 grau de llibertat.

b)
$k = 0$.
És el cas II de l'apartat anterior en el qual ja hem vist que el sistema era Compatible Indeterminat amb 1 grau de llibertat. Per la matriu resultat, tenim que el sistema inicial és equivalent al sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x + 4y & = & -7 - 4z \\ 2x & = & -1 \end{array}\right\}$$

D'on podem obtenir $x = \frac{-1}{2}$ i substituïnt a la primera equació $-1 + 4y = -7 - 4z$ d'on tenim $y = -\frac{6+4z}{4} = -\frac{3+2z}{2}$, utilitzant la variable z com a indeterminada. Així doncs, la solució en el cas $k = 0$ són els punts de la forma $\boxed{\left(\frac{-1}{2}, \frac{-3-2z}{2}, z\right)}$

Pautes de correcció:
Apartat a)
0,5 punts pel plantejament inicial fins al valor crític de *k*.
0,25 punts pel cas I.
0,25 punts pel cas II.
Apartat b)
0,5 punts pel plantejament fins a indicar que el sistema és Compatible Indeterminat.
0,5 punts per l'expressió de la solució per a $k = 0$.

53. PAU 2016 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 4

4. Responeu a les qüestions següents.

a) Calculeu totes les matrius de la forma $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix}$ que satisfan la igualtat $A^2 + A = 2I$, en què I és la matriu identitat $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[1 punt]

b) Justifiqueu que si A és una matriu quadrada que compleix la igualtat $A^2 + A = 2I$, aleshores A és invertible, i calculeu l'expressió de A^{-1} en funció de les matrius A i I.

[1 punt]

Resolució:

a) La igualtat matricial que es planteja és

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -m & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

que observem que és una igualtat que es compleix per a qualsevol valor de m.

Per tant, totes les matrius de la forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix}$ satisfan la igualtat.

b) La igualtat de l'enunciat, traient factor comú, es pot reescriure així:

$$A \cdot (A + I) = 2I = (A + I) \cdot A$$

és a dir

$$\frac{A(A+I)}{2} = I = \frac{(A+I) \cdot A}{2}$$

$$A\frac{A+I}{2} = I = \frac{A+I}{2}A$$

Amb això ja tenim que la matriu A és invertible ja que hem trobat una matriu, en el nostre cas $\frac{A+I}{2}$, que multiplicada per la dreta i per l'esquerra per A dóna la matriu identitat. Per tant, $A^{-1} = \frac{A+I}{2}$.

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts per les primeres operacions matricials.

0,25 punts per les segones operacions matricials.

0,5 per identificar la igualtat terme a terme i concloure que la igualtat és certa independent de m.

Apartat b)

0,25 punts per la factorització.

0,25 punts per la deducció de la invertibilitat.

0,25 punts per l'expressió de la matriu inversa.

0,25 punts per l'argument que el producte ha de ser per la dreta i per l'esquerra.

54. PAU 2016 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 1

1. Considereu el sistema d'equacions lineals $\begin{pmatrix} & & \\ -4 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \\ y & \\ z & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. Expliqueu raonadament si les afirmacions següents són vertaderes o falses.

a) Si $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, el sistema és compatible determinat i la solució és $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

[1 punt]

b) Si $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, el sistema és compatible indeterminat.

[1 punt]

Resolució:

a) L'afirmació és FALSA.

Denotem $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ la matriu de coeficients i calculem el rang de A:

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & \frac{-5}{3} \end{vmatrix} = \frac{5}{3} + 6 + 4 - 3 - 2 - \frac{20}{3} = 0$ i el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, per tant $rang\ A = 2$.

En ser el sistema homogeni, perquè $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $rang\ A = rang\ A' = 2$, per tant, el sistema és compatible indeterminat, és a dir, té infinites solucions.

Naturalment $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ és una solució, però no és l'única.

b) L'afirmació és FALSA.

El $rang\ A = 2$, però $rang\ A' = 3$ ja que: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 3 - 4 + 3 - 1 + 4 = 4 \neq 0$. Per tant, el sistema és incompatible, no té cap solució.

Apartat a)

0,5 punts pel càlcul del rang A.

0,25 punts per la discussió del sistema.

0,25 punts per la conclusió raonada de falsedat.

Apartat b)

0,5 punts pel càlcul del rang de A´.

0,25 punts per la discussió del sistema.

0,25 punts per la conclusió raonada de falsedat.

55. PAU 2016 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 4

4. Sigui A una matriu quadrada d'orde n que satisfà la propietat $A \cdot (A - I) = I$, en què I és la matriu identitat.

c) Justifiqueu que la matriu A és invertible i que $A^{-1} = A - I$.

[1 punt]

d) Calculeu el valor de a que fa que la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ compleixi la propietat $A \cdot (A - I) = I$. Calculeu A^{-1} i comproveu que es correspon amb la calculada a partir del resultat de l'apartat anterior.

[1 punt]

Resolució:

a) Si tenim que $A \cdot (A - I) = I$, aleshores $\det(A) \cdot \det(A - I) = \det(I) = 1$ i, per tant, $\det(A) \neq 0$ i, per tant, la matriu A és invertible.

La inversa de la matriu A serà aquella que multiplicada per A, per la dreta i per l'esquerra, doni la identitat I.

La matriu $(A - I)$ compleix aquesta propietat:

- $A \cdot (A - I) = I$ per hipòtesi de partida.
- $(A - I) \cdot A = A \cdot A - I \cdot A = A \cdot A - A \cdot I = A \cdot (A - I) = I$.

Observació: S'admet que l'estudiant pugui utilitzar en algun moment, de manera correcta, que $A \cdot B = I \Rightarrow B \cdot A = I$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 - a + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Per tant, $\left.\begin{matrix} 1 = 1 \\ a = 0 \\ a = 0 \\ a^2 - a + 1 = 1 \end{matrix}\right\}$ que té solució $a = 0$ per a les quatre equacions.

Tenim, per tant, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ que coincideix amb $A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Apartat a)

0,5 punts per l'argument d'invertibilitat.

0,25 punts pel producte en un ordre.

0,25 punts pel producte en l'altre ordre.

Apartat b)

0,25 punts pel càlcul matricial.

0,25 punts per la resolució del sistema.

0,25 punts pel càlcul de la inversa (sense utilitzar l'apartat a)).

0,25 punts per la comprovació amb el resultat de l'apartat a).

56. PAU 2015 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 1

1. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix}$.

a) Determineu per a quins valors de a existeix A^{-1}.

[1 punt]

b) Calculeu A^{-1} per a $a = 0$.

[1 punt]

Resolució:

a) Per a que existeixi la inversa de la matriu A cal que el determinant sigui diferent de zero.

$$\det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -a \end{vmatrix} = 1 - 2a + a^2.$$

Resolem l'equació $a^2 - 2a + 1 = 0$ i obtenim $a = 1$. Per tant,el determinant és diferent de zero, i aleshores la matriu és invertible, sempre que a sigui diferent de 1.

b) Quan $a = 0$ la matriu A és igual a:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det(\mathrm{A}) = 1.$$

I per tant,

$$\boxed{A^{-1}} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

Apartat a)

0,25 punts pel plantejament inicial de no anul·lar el determinant.

0,25 punts pel càlcul del determinant.

0,25 punts pel plantejament de l'equació de segon grau.

0,25 punts per la solució final.

Apartat b)

0,25 punts per la substitució i el determinant

0,25 punts per la fórmula de la inversa.

0,25 punts pels adjunts.

0,25 punts pel càlcul final.

57. PAU 2015 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 6

6. Trobeu totes les matrius de la forma $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ que siguin inverses d'elles mateixes, és a dir, que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[2 punts]

Resolució:

Per tal que la matriu sigui inversa d'ella mateixa s'haurà de complir que $A \cdot A = I$, és a dir la següent igualtat

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ab + b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant s'ha de resoldre el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} a^2 & = & 1 \\ ab + b & = & 0 \end{array}\right\}$$

La primera equació ens porta a $a = \pm 1$ del que se'n deriven dos casos possibles.

- $a = 1$

La segona equació queda $b+b = 0$, és a dir $2b=0$, per tant $b = 0$ i aleshores la matriu resultant és la identitat, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- $a = -1$

La segona equació queda $-b+b=0$, que es compleix independent del valor de b. Així doncs, la matriu resultat és de la forma $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$, per a qualsevol valor de b.

En resum les matrius sólució són:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ per a qualsevol valor del paràmetre b.

0,5 punts pel producte matricial.

0,25 punts per l'obtenció del sistema d'equacions.

0,25 punts per a les solucions de a

0,5 punts cas $a = 1$.

0,5 punts cas $a = -1$.

58. PAU 2015 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 1

1. Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\left.\begin{array}{rcl} -3x+2y+3z & = & 0 \\ (a-2)y-3z & = & 0 \\ -x-y+(-a-3)z & = & 0 \end{array}\right\}.$$

a) Calculeu per a quins valors del paràmetre *a* el sistema té més d'una solució.

[1 punt]

b) Resoleu el sistema per al cas $a=-3$.

[1 punt]

Resolució:

a) En tractar-se d'un sistema homogeni, sempre compatible, el sistema tindrà més d'una solució quan el rang de la matriu de coeficients sigui inferior al nombre d'incògnites, 3 en el nostre cas.

La matriu dels coeficients és $A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & a-2 & -3 \\ -1 & -1 & -a-3 \end{pmatrix}$.

Per tal que $rang(A)<3$ s'anul·la el determinant de la matriu *A*.

Per tant $|A|=\begin{vmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & a-2 & -3 \\ -1 & -1 & -a-3 \end{vmatrix}=3(a-2)(a+3)+6+3(a-2)+9=$
$3a^2+6a-9=3(a^2+2a-3)$.

Igualant a 0, obtenim $a=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\left|\begin{array}{l}\boxed{a=1}\\ \boxed{a=-3}\end{array}\right.$.

El problema també es pot resoldre triangulant per Gauss la matriu *A*.

b) Cas $a=-3$.

En aquest cas el sistema a resoldre és

$$\left.\begin{array}{rcl} -3x+2y+3z & = & 0 \\ -5y-3z & = & 0 \\ -x-y & = & 0 \end{array}\right\}$$

i sabem que *rang(A)*=2 i per tant que el sistema és compatible indeterminat amb (3-2=1) 1 grau de llibertat, és a dir amb una incògnita com a paràmetre.

Com que la primera equació és combinació lineal de la segona i la tercera, resoldrem el sistema directament a partir de les dues darreres equacions i obtenim $x = -y$ i $z = \frac{-5y}{3}$.

Per tant els punts solució del sistema són els de la forma $\boxed{\left(-y,\ y, \frac{-5y}{3}\right)}$.

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts per la matriu de coeficients.

0,25 punts pel raonament i plantejament a partir del rang i/o determinant.

0,25 punts pel determinant de la matriu de coeficients.

0,25 punts per la resolució de l'equació.

Apartat b)

0,5 punts per la compatibilitat del sistema.

0,5 punts per la resolució.

---

59. PAU 2015 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 5

5. Responeu a les qüestions següents:

a) Calculeu la matriu de la forma $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ que satisfà $A^2 - A = I$, en que I és la matriu identitat, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[1 punt]

b) Calculeu A^{-1} i comproveu que el resultat es correspon amb el que obteniu de deduir la matriu A^{-1} a partir de la igualtat $A^2 - A = I$.

[1 punt]

Resolució:

a) Desenvolupem la igualtat $A^2 - A = I$ utilitzant $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1+a & a \\ 1 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si igualem terme a terme, obtenim directament que $a = 1$ i per tant la matriu buscada és

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

b) Calculem la inversa $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$

Per altra banda si tenim la igualtat $A^2 - A = I$ podem treure factor comú la matriu A, sigui per la dreta o per l'esquerra, per la propietat distributiva del producte de matrius, i obtenim

$$A \cdot (A - I) = I = (A - I) \cdot A.$$

Aquesta igualtat ens demostra que A és invertible i que la seva matriu inversa és la matriu $A - I$ ja que el producte d'ambdues matrius (en els dos ordres) és la matriu identitat, I. Per tant, $A^{-1} = A - I$.

Quan utilitzem aquesta fórmula obtenim

$$\boxed{A^{-1} = A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

tal com volíem comprovar.

Apartat a)

0,25 punts pel producte matricial.

0,25 punts per la diferència matricial.

0,25 punts pel valor del paràmetre a.

0,25 punts per la matriu A.

Apartat b)

0,25 punts pel càlcul de la matriu inversa.

0,25 punts per la factorització.

0,25 punts per la deducció de la invertibilitat i l'expressió de la matriu inversa.

0,25 punts per la comprovació final.

---

60. PAU 2015 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 1

$$x - 2y - z = 0$$

1. Considereu el sistema d'equacions $\left.\begin{matrix} -mx+3y+z &=& 0 \\ x+y &=& 4 \end{matrix}\right\}$ en què m és un paràmetre real.

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre m.

[1 punt]

b) Resoleu el sistema per a $m = 1$.

[1 punt]

Resolució:

a) Tenim el sistema en la forma $\left.\begin{matrix} x-2y-z &=& 0 \\ -mx+3y+z &=& 0 \\ x+y &=& 4 \end{matrix}\right\}$ i calculem el determinant de la matriu dels coeficients: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -m & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = m$

Discussió:

1) Si $m \neq 0$ rang(A) = 3 i per tant rang(A') = 3 i aleshores. Sistema Compatible Determinat.

2) Si $m = 0$, rang$(A) = 2$, ja que $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, però rang $(A/b) = 3$, ja que $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$. Per tant el sistema és incompatible.

b) Per $m = 1 \neq 0$, els sistema és compatible determinat.

Resolent per Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{1} = \frac{4}{1} = 4, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{m} = \frac{0}{1} = 0,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{1} = \frac{4}{1} = 4$$

La solució del sistema és $x = 4, y = 0$ i $z = 4$.

Observació: El sistema també es pot resoldre pel mètode de Gauss i la puntuació serà la mateixa.

Apartat a)

0,25 punts pel plantejament del sistema.

0,25 punts pel determinant i el valor crític.

0,25 punts pel $m \neq 0$.

0,25 punts pel $m = 0$.

Apartat b)

0,25 punts per la substitució i l'estratègia de resolució (sigui per Cràmer o per Gauss).

0,25 puns per la x.

0,25 puns per la y.

0,25 puns per la z.

61. PAU 2015 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 5

5. Sigui A una matriu quadrada que compleix que $A^3 = I$, en què I és la matriu identitat, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Demostreu que la matriu A té inversa i que $A^{-1} = A^2$.

[1 punt]

b) En el cas de $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, calculeu si hi ha cap valor del paràmetre a per al qual $A^3 = I$.

[1 punt]

Resolució:

a) La inversa d'una matriu A és una matriu B que compleix $A \cdot B = B \cdot A = I$, en el cas de $A^3 = I$, resulta que $A \cdot A^2 = A^2 \cdot A = I$, per tant A té inversa i $A^{-1} = A^2$.

Observació: En el cas que no s'expliciti quina és aquesta matriu inversa, és a dir que $A^{-1} = A^2$, no es penalitzarà la prova que la matriu té inversa, sempre que s'argumenti que s'ha trobat una matriu B que compleix la propietat $A \cdot B = B \cdot A = I$.

b) Fent les operacions, resulta que: $A^2 = \begin{pmatrix} 1-a & -a \\ 1 & 4-a \end{pmatrix}$ i $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3a-a^2 \\ a-3 & 3a-8 \end{pmatrix}$, i per tant, resulta el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} 1 & = & 1 \\ 3a - a^2 & = & 0 \\ a - 3 & = & 0 \\ 3a - 8 & = & 1 \end{array}\right\}$$

De la tercera equació deduïm $a = 3$, que efectivament satisfà les quatre equacions.

Així per a $a = 3$, $A^3 = Id$.

Observació: Cal que l'estudiant indiqui que el valor $a = 3$ és solució de totes les equacions del sistema.

Apartat a)

0,25 punts per la condició d'invertible.

0,25 punts per la factorització.

0,25 punts per la deducció d'invertibilitat.

0,25 punts per explicitar que $A^{-1} = A^2$.

Apartat b)

0,25 punts pel càlcul de A^2.

0,25 punts pel càlcul de A^3.

0,25 punts pel plantejament del sistema.

0,25 punts per la solució final.

---

62. PAU 2014 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 3

3. Considereu el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} mx - y &= m \\ 3x + (m-4)y &= m+2 \end{cases} \text{ per a } m \in \mathbb{R}.$$

a) Discutiu el sistema d'equacions per als diferents valors del paràmetre m.

[1 punt]

b) Resoleu el sistema en aquells casos en què el sistema sigui compatible.

[1 punt]

Resolució:

a) La matriu de coeficients, A, i la matriu ampliada, A', associades al sistema són:

$$\left(\begin{array}{cc|c} m & -1 & m \\ 3 & m-4 & m+2 \end{array}\right)$$

$$rang(A) = 2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} m & -1 \\ 3 & m-4 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} m & -1 \\ 3 & m-4 \end{vmatrix} = m^2 - 4m + 3 = (m-1)(m-3).$$

- Cas I: Si $m \neq 1, 3 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 2 = rang(A') =$ nombre d'incògnites i per tant el sistema és Compatible Determinat.
- Cas II: Si $m = 1$, la representació matricial és

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

i per tant tenim $rang(A) = rang(A') = 1$ i aleshores el sistema és Compatible Indeterminat amb (2-1=1) 1 grau de llibertat.

- Cas III: Si $m = 3$, la representació matricial és

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

que correspon clarament a un sistema incompatible ja que la primera equació demana $3x - y = 3$, mentre que la segona demana $3x - y = 5$.

En resum:

Si $m \neq 1, 3$, el sistema és Compatible Determinat
Si $m = 1$, el sistema és Compatible Indeterminat amb 1 grau de llibertat
Si $m = 3$, el sistema és Incompatible.

b) Hem de trobar la solució per als casos I: $m \neq 1, 3$ i II: $m = 1$.

Cas I: $m \neq 1, 3$

Com que la matriu de coeficients és quadrada i $|A| \neq 0$, podem resoldre directament el sistema pel mètode de Cràmer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & -1 \\ m+2 & m-4 \end{vmatrix}}{(m-1)(m-3)} = \frac{m^2-4m+m+2}{(m-1)(m-3)} = \frac{m^2-3m+2}{(m-1)(m-3)} = \frac{(m-1)(m-2)}{(m-1)(m-3)} = \frac{m-2}{m-3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & m \\ 3 & m+2 \end{vmatrix}}{(m-1)(m-3)} = \frac{m^2+2m-3m}{(m-1)(m-3)} = \frac{m^2-m}{(m-1)(m-3)} = \frac{(m-1)m}{(m-1)(m-3)} = \frac{m}{m-3}.$$

Per tant, per a cada valor de $m \neq 1, 3$ el punt solució del sistema és $\boxed{\left(\frac{m-2}{m-3}, \frac{m}{m-3}\right)}$.

Cas II: $m = 1$

En aquest cas el sistema queda reduït a una única equació $x - y = 1$, ja que la segona equació queda múltiple de la primera.

Els punts solució del sistema són de la forma $\boxed{(x, x-1)}$.

Apartat a)
- 0,25 punts pel plantejament matricial i càlcul del determinant.
- 0,25 punts pel cas I.
- 0,25 punts pel cas II.
- 0,25 punts pel cas III.

Apartat b)
- 0,25 punts pel plantejament de Cramer en el cas I.
- 0,25 punts pel desenvolupament del cas I.
- 0,25 punts per la solució final del cas I.
- 0,25 punts pel cas II.

---

63. PAU 2014 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 6

6. Considereu l'equació matricial $X \cdot A = B$, on

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & -3 & a-1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 5 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Per a quins valors del paràmetre a l'equació matricial té una solució única?

[1 punt]

b) Trobeu la solució X que satisfà l'equació matricial quan $a = 3$.

[1 punt]

Resolució:

a) De la igualtat $X \cdot A = B$ com que A és una matriu 3x3 i B és una matriu 2x3, aleshores X serà una matriu 2x3.

Demanar que la matriu X sigui única implica que cadascuna de les files de la matriu X ha de ser la solució, també única, del sistema de 3 equacions lineals amb 3 incògnites resultant del producte $X \cdot A = B$. Aquest sistema 3x3 té per matriu associada la matriu trasposada de la matriu A, i per terme independent cadascuna de les files de la matriu B. Per tant, el sistema serà compatible determinat si i només si el determinanat de la matriu A és diferent de 0.

Si igualem el determinant a 0 tenim:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & -3 & a-1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 + a - 1 - 3 + a = 2a - 7 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{7}{2}.$$

Per tant, si $a \neq \frac{7}{2} \Rightarrow |A| \neq 0$ i aleshores la matriu A admet inversa, A^{-1}, i $X = B \cdot A^{-1}$.

Observació: L'argumentació inicial també es pot substituir de forma alternativa per demanar directament la condició suficient d'inversió de la matriu A i després estudiar particularment el cas $a = \frac{7}{2}$.

b) Quan $a = 3$ tenim $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcularem A^{-1} i després $X = B \cdot A^{-1}$.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj^t = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -3 & -5 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

I per tant,

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 5 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -31 & 11 & 5 \\ 20 & -6 & -3 \end{pmatrix}}$$

Apartat a)

0,25 punts per l'argumentació a l'entorn de la resolució de dos sistemes d'equacions.
0,25 punts per demanar que el determinant no s'ha d'anul·lar.
0,25 punts pel càlcul del determinant.
0,25 punts pel resultat final.

Apartat b)

0,5 punts pel càlcul de la matriu inversa.
0,5 punts pel producte matricial final.

---

64. PAU 2014 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 1

1. Considereu la matriu

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{pmatrix},$$

per a $a \in \mathbb{R}$.

a) Calculeu el rang de la matriu M en funció dels valors del paràmetre a.
[1 punt]

b) Discutiu i resoleu el sistema d'equacions lineals

$$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

segons els valors del paràmetre a.
[1 punt]

Resolució:

a) Per a calcular el rang de la matriu $M = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{pmatrix}$ aplicarem transformacions elementals per a triangular la matriu (mètode de Gauss)

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & (a+1)^2 - a^2 \\ 0 & -1 & (a-1)^2 - a^2 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\rightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & 2a+1 \\ 0 & -1 & -2a+1 \end{pmatrix} \overset{(3)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & 2a+1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Una vegada hem fet les següents transformacions:

(1) A la segona fila restar-li la primera
A la tercera fila restar-li la primera
(2) Operar a les files segona i tercera
(3) A la tercera fila sumar-li la segona

Per tant, podem veure que independentment del valor de a, la matriu M és sempre equivalent amb una de triangular amb tres files no nul·les i per tant $rang(M) = 3$.

b) El sistema $M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ té per matriu associada la matriu *M*, quadrada i de rang màxim i igual al nombre d'incògnites. Per tant, per a qualsevol valor del paràmetre a el sistema serà compatible determinat, amb solució única. La solució la podem obtenir aplicant el mètode de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{vmatrix}} = 1, y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & (a+1)^2 \\ 1 & 1 & (a-1)^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{vmatrix}} = 0, z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & a-1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{vmatrix}} = 0.$$

Per a qualsevol valor de a la solució del sistema és $\boxed{x = 1, y = 0,\ z = 0}$.

Observació: A la resolució de l'apartat ***b)*** també es podia haver fet servir el mètode de Gauss de manera anàloga al que s'ha fet per a l'apartat ***a)***.

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts pel primer pas de triangulació.

0,25 punts pel segon pas de triangulació.

0,25 punts pel tercer pas de triangulació.

0,25 punts per l'argumentació i resposta final.

Apartat b)

0,5 punts per la discussió del sistema.

0,25 punts per la formulació del mètode de Cramer.

0,25 punts pels càlculs i solució final.

Observació: Les resolucions correctes via menors no nuls o bé per Gauss, allà on sigui possible, seran valorades amb la totalitat de la puntuació.

65. PAU 2014 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 6

6. Responeu a les qüestions següents:

a) Demostreu que si A és una matriu quadrada que satisfà la igualtat $A^2 = I$, on I és la matriu identitat, aleshores A és invertible i A^{-1} satisfà $(A^{-1})^2 = I$.
[1 punt]

b) Calculeu l'expressió general de les matrius de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix}$ amb $b \neq 0$ que satisfan la igualtat $A^2 = I$.
[1 punt]

Resolució:

a) $A^2 = I$ ho podem reescriure com $A \cdot A = I$. Això ens diu que quan la matriu A la multipliquem per ella mateixa, sigui per la dreta o per l'esquerra, ens dóna la identitat. I això és precisament el que s'ha de complir per tal que A sigui invertible. A més a més, veiem que la seva inversa és ella mateixa, és a dir $A^{-1} = A$. Essent així, $(A^{-1})^2 = A^2 = I$ com voliem demostrar.

Observació: Alternativament, que la matriu sigui invertible també es pot demostrar a partir d'aplicar determinants i veure que té determinant no nul.

b) S'ha de complir que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} aa + bc & ab + 2b \\ ac + 2c & bc + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quan igualem terme a terme obtenim el següent sistema d'equacions

$$\begin{cases} aa + bc &= 1 \\ ab + 2b &= 0 \\ ac + 2c &= 0 \\ bc + 4 &= 1 \end{cases}$$

De la segona equació tenim $(a + 2)b = 0$ i com que $b \neq 0$ deduïm $a + 2 = 0$ i per tant que $a = -2$.

Quan substituïm $a = -2$ en el sistema ens queda

$$\begin{cases} bc &= -3 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ bc &= -3 \end{cases}$$

Per tant l'altra condició que se'n obté és $c = \frac{-3}{b}$ i per tant la forma general de les matrius que es demana és $\boxed{A = \begin{pmatrix} -2 & b \\ -3/b & 2 \end{pmatrix} amb\ b \neq 0}$.

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,5 punts per l'argumentació de ser invertible (factoritzant prèviament o no).

0,5 punts per comprovar la igualtat.

Apartat b)

0,25 punts pel càlcul matricial.

0,25 punts pel plantejament del sistema.

0,25 punts per la resolució del sistema.

0,25 punts per l'expressió final de les matrius.

66. PAU 2014 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 2

2. Responeu a les qüestions següents:

a) Discutiu el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} (k-1)y + (k^2-1)z &= 0 \\ (4k+1)x - y - 7z &= 1 \\ x + y + z &= 0 \end{cases}$$

en funció dels valors de k.

[1 punt]

b) Resoleu el sistema per a $k = 1$.

[1 punt]

Resolució:

a) Les matrius de coeficients, A, i ampliada, A', del sistema són

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & k-1 & k^2-1 & 0 \\ 4k+1 & -1 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

i es tracta d'estudiar el rang(A) i el rang(A').

Per a determinar els valors de discussió del paràmetre k mirem quan el rang(A) és màxim, és a dir 3, que serà quan el seu determinant sigui diferent de zero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & k-1 & k^2-1 \\ 4k+1 & -1 & -7 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (k-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & k+1 \\ 4k+1 & -1 & -7 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (k-1)\big((4k+1)(k+1) - 7 + (k+1) - (4k+1)\big) =$$

$$= (k-1)(4k^2 + 2k - 6).$$

Quan igualem a zero i resolem l'equació de segon grau obtenim $k = 1$ i $k = \frac{-3}{2}$.

Observació: Si el càlcul del determinant es fa sense treure factor comú, aleshores cal aplicar la regla de Ruffini al polinomi $2k^3 - k^2 - 4k + 3$ i veure que té té una arrel doble en $k = 1$ i que pot factoritzar com

$$2k^3 - k^2 - 4k + 3 = (k-1)^2(2k+3)$$

Amb el que s'obtenen les mateixes solucions $k = 1$ i $k = \frac{-3}{2}$.

Així doncs:

- Si $k \neq 1$ i $k \neq \frac{-3}{2}$, aleshores $|A| \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3 = rang(A')$ que és el nombre d'incògnites i per tant el sistema serà Compatible Determinat.
- Si $k = 1$ $|A| = 0 \Rightarrow rang(A) < 3$.

El sistema en forma matricial queda $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Com que el menor $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 2$, i com que la primera fila és nul·la la matriu ampliada també tindrà rang 2 i el sistema serà Compatible Indeterminat amb (3-2=1) 1 grau de llibertat, és a dir una incògnita indeterminada.

- Si $k = \frac{-3}{2}$ $|A| = 0 \Rightarrow rang(A) < 3$.

El sistema en forma matricial queda $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \frac{-5}{2} & \frac{5}{4} & 0 \\ -5 & -1 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Com que el menor $\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 2$.

Per a calcular el rang de la matriu ampliada podem orlar el menor anterior fent servir la primera fila i la columna dels termes independents.

$\begin{vmatrix} 0 & \frac{-5}{2} & 0 \\ -5 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-5}{2} \neq 0 \Rightarrow rang(A') = 3 \neq 2 = rang(A)$ i per tant el sistema és Incompatible.

En resum:

- Si $k \neq 1$ i $k \neq \frac{-3}{2}$, el sistema és Compatible Determinat.
- Si $k = 1$, el sistema és Compatible Indeterminat amb 1 grau de llibertat.
- Si $k = \frac{-3}{2}$ el sistema és Incompatible.

b)

El sistema en forma matricial queda $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ i podem prescindir de la primera equació perquè s'ha anul·lat. Passem la tercera equació a la primera i si aliquem el mètode de Gauss (a la segona equació li restem 5 vegades la primera) tenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & -7 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -z \\ 0 & -6 & 1+12z \end{array}\right),$$

i per tant $y = \frac{1+12z}{-6} = -\frac{1}{6} - 2z$

i substituint a la primera equació $x = -y - z = \frac{1}{6} + 2z - z = \frac{1}{6} + z$.

Així doncs els punts solució del sistema d'equacions són els de la forma $\left(\frac{1}{6} + z, -\frac{1}{6} - 2z, z\right)$, amb z indeterminada.

Apartat a)

0,25 punts per l'argumentació i càlcul del determinant de la matriu de coeficients.

0,25 punts per trobar els valors de discussió i la discussió general primera.

0,25 punts pel cas k=1.

0,25 punts pel cas k=-3/2.

Apartat b)

0,25 punts per la substitució.

0,5 punts per la resolució (amb independència del mètode).

0,25 punts per la solució final.

---

67. PAU 2014 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 5

5. Responeu a les qüestions següents:

a) Si A i B són dues matrius quadrades d'ordre n, demostreu que

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \Leftrightarrow AB = BA$$

[1 punt]

b) Si M_1 i M_2 són dues matrius de la forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, amb $a, b \in \mathbb{R}$, comproveu que el producte $M_1 \cdot M_2$ té també la mateixa forma i que $M_1 \cdot M_2 = M_2 \cdot M_1$.

[1 punt]

Resolució:

a) Si desenvolupem el terme quadràtic i tenim en compte que el producte de matrius no és commutatiu, obtenim

$$(A+B)^2 = (A+B)\cdot(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

Per tant la igualtat de l'enunciat es cumplirà si i només si

$$\begin{aligned} A^2 + AB + BA + B^2 &= A^2 + 2AB + B^2 \\ AB + BA &= 2AB \\ BA &= 2AB - AB \\ BA &= AB. \end{aligned}$$

b) Denotem $M_1 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ i $M_2 = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}$ i fem el producte $M_1 \cdot M_2$.

$$M_1 \cdot M_2 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - bb' & -ab' - ba' \\ ba' + ab' & -bb' + aa' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

I efectivament podem veure que la matriu producte és de la mateixa forma ja que coincideixen els elements de la diagonal principal i són oposats els elements de la diagonal segona.

Per a comprovar la commutativitat de les matrius M_1 i M_2 fem l'altre producte

$$M_2 \cdot M_1 = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - bb' & -ab' - ba' \\ ba' + ab' & -bb' + aa' \end{pmatrix} = M_1 \cdot M_2.$$

Apartat a)

0,5 punts pel desenvolupament del quadrat.

0,5 punts per l'argumentació de la condició de la commutativitat.

Apartat b)

0,25 punts pel càlcul matricial.

0,25 punts per la identificació de la forma matricial.

0,25 punts pel segon càlcul matricial.

0,25 punts per la comprovació de commutativitat.

---

68. PAU 2013 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 1

1.- Sigui $V = \{(-1,1,1),(-2,-1,0),(1,2,a)\}$ ***un conjunt de vectors de*** $\mathbb{R}^3$***.***

(a) ***Trobeu el valor o valors de*** a ***perquè*** V ***sigui linealment dependent.***

(b) ***Quan*** $a = 4$***, expresseu el vector*** $\vec{v} = (3,9,14)$ ***com a combinació lineal dels vectors de*** V***.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Hi ha diferents formes de comprovar la dependència lineal de V. Per exemple, podem calcular el determinant de la matriu formada pels tres vectors,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix} \Longrightarrow \det A = 3a - 3\,.$$

Aquest determinant val zero si i sol el conjunt V és linealment dependent. Com que l'equació $3a-3=0$ té per solució $a = 1$, aquest és el valor demanat.

Podem buscar també el rang de la matriu A, que haurà de ser menor que 3 si volem que el conjunt V sigui linealment dependent

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & a+1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & a+1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 \end{bmatrix}.$$

Les transformacions elementals realitzades han estat: (1) $F_2 + F_1$ i $F_3 + F_1$; (2) $F_2/3$ (3) $F_3 - 2F_2$.

El rang de la matriu A és diferent de tres si i sol si $a = 1$.

Un altre camí de resolució és utilitzar directament la definició de conjunt linealment dependent. Cal plantejar l'equació vectorial

$$\alpha(-1,1,1) + \beta(-2,-1,0) + \gamma(1,2,a) = (0,0,0).$$

Si podem trobar valors per a les variables α, β i γ que no siguin tots nuls, el conjunt V serà linealment dependent. Ens queda el sistema

$$\left.\begin{array}{rl} -\alpha - 2\beta + \gamma &= 0 \\ \alpha - \beta + 2\gamma &= 0 \\ \alpha + a\gamma &= 0 \end{array}\right\}$$

De la tercera equació en traiem que $\alpha = -a\gamma$. Portant aquest valor a les altres dues,

$$\left.\begin{array}{rl} -2\beta + (a+1)\gamma &= 0 \\ -\beta + (2-a)\gamma &= 0 \end{array}\right\}$$

Aïllant el valor de β a la segona d'aquestes equacions i substituint-lo a la primera obtenim $(-3+3a)\gamma = 0$. Com que volem que $\gamma \neq 0$ (si aquesta variable fos nul·la també ho serien les altres dues), necessitem que $-3 + 3a = 0$; és a dir, $a = 1$.

La qüestió es pot resoldre també buscant el valor del paràmetre a perquè el tercer vector sigui combinació lineal dels altres dos (amb la qual cosa el conjunt V seria linealment dependent).

$$\alpha(-1,1,1) + \beta(-2,-1,0) = (1,2,a) \Longrightarrow \alpha = 1\,,\ \beta = -1\,,\ a = 1\,.$$

(b) Plantegem l'equació vectorial $\alpha(-1,1,1) + \beta(-2,-1,0) + \gamma(1,2,4) = (3,9,14)$, que ens porta al sistema d'equacions lineals

$$\left.\begin{array}{rl} -\alpha - 2\beta + \gamma &= 3 \\ \alpha - \beta + 2\gamma &= 9 \\ \alpha + 4\gamma &= 14 \end{array}\right\},$$

Aquest sistema té per solució $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $\gamma = 3$. Per tant, la resposta a aquest apartat és

$$\vec{v} = 2(-1, 1, 1) - (-2, -1, 0) + 3(1, 2, 4)\,.$$

Pautes de Correcció

Apartat (a)

0,5 punts per plantejar qualsevol dels mètodes descrits (o per un altre si és correcte).

0,5 punts per arribar al valor de $a = 1$.

Apartat (b)

0,5 punts pel planteig de l'equació vectorial a resoldre o si escriuen directament el sistema d'equacions lineals.

0,25 punts per trobar el valor dels coeficients.

0,25 punts per posar el vector $\vec{v}$ igual a la combinació lineal dels vectors de V.

---

69. PAU 2013 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 4

4.- Siguin les matrius $A = \begin{bmatrix} 1 & b & 4 \\ 3 & c & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & c & 3 \\ 4 & a & 3 \end{bmatrix}$ ***i*** $C = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 5 \\ -b & -a & -2 \end{bmatrix}$, ***on*** a, b ***i*** c ***són paràmetres reals. Calculeu el valor d'aquests paràmetres perquè cap de les tres matrius tingui inversa.***

[2 punts]

Solució

Una matriu quadrada no té inversa si i sol si el seu determinant val zero. Tenim

$$\det A = 7a + 7b - 7c\,; \qquad \det B = -7a + 9b - 17c\,; \qquad \det C = 17a + 15b - 28\,.$$

Les tres matrius seran no invertibles quan el valor de cada paràmetre sigui la solució del sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} 7a & + & 7b & - & 7c & = & 0 \\ -7a & + & 9b & - & 17c & = & 0 \\ 17a & + & 15b & & & = & 28 \end{array}\right\},$$

és a dir, quan $a = -1$, $b = 3$ i $c = 2$.

Pautes de Correcció

0,25 punts per raonar que els determinants han de ser nuls.

0,25 punts pel càlcul de cada un dels determinants ($3 \times 0,25 = 0,75$).

0,5 punts per la construcció del sistema.

0,5 punts per la seva resolució.

---

70. PAU 2013 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 2

2.- Considereu la matriu $A = \begin{vmatrix} a-1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix}$***. Sigui*** I_2 ***la matriu identitat d'ordre 2.***

(a) ***Trobeu el valor del paràmetre*** a ***perquè es compleixi que*** $A^2 - 2A = I_2$***.***

(b) ***Calculeu la matriu inversa de la matriu*** A ***quan*** $a = -2$***.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Tenim que

$$A^2 - 2A = \begin{bmatrix} a-1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a-1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} a-1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2-4a+4 & 2a-2 \\ 2a-2 & a^2 \end{bmatrix}.$$

Perquè $A^2 - 2A = I$ cal que $a^2 - 4a + 4 = 1$, $2a - 2 = 0$, $a^2 = 1$. De la segona equació en deduïm que $a = 1$. Això sí: cal comprovar que aquest valor també és solució de les altres dues equacions.

(b) Comprovem primer si la matriu $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ és invertible, calculant el seu determinant.

$$\det A = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-3)(-1) - 1 \cdot 1 = 2 \neq 0\,.$$

Com que el determinant és no nul, la matriu és invertible.

Per a calcular la inversa, podem utilitzar diferents mètodes:

• Mètode dels adjunts,

$$A_{11} = -1\,;\quad A_{12} = -1\,;\quad A_{21} = -1\,;\quad A_{22} = -3 \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

• Mètode de Gauss,

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right]$$
$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 & -3/2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & -3/2 \end{array}\right]$$

D'aquí, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -3/2 \end{bmatrix}$.

• Recordant que si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, llavors $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

71. PAU 2013 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 1

1.- Sabem que el vector $(2, 1, -1)$ ***és solució del sistema***

$$\left.\begin{array}{rcl} ax + by + cz = & a+c \\ bx - y + bz = & a-b-c \\ cx - by + 2z = & b \end{array}\right\} .$$

Calculeu el valor dels paràmetres a**,** b ***i*** c**.**

[2 punts]

Solució

Si $(2, 1, -1)$ és solució del sistema, s'ha de complir que

$$\left.\begin{array}{rcl} 2a + b - c = & a+c \\ 2b - 1 - b = & a-b-c \\ 2c - b - 2 = & b \end{array}\right\} ,$$

que és un sistema d'equacions on a, b i c són les variables. La seva solució és $a = 3$, $b = 1$, $c = 2$.

---

72. PAU 2013 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 3

3.- Sigui $A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ p & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$.

(a) ***Què significa que la matriu*** B ***sigui la inversa de*** A***?***

(b) ***Trobeu el valor del paràmetre*** p ***perquè la matriu inversa de*** A ***i la seva matriu transposada coincideixin.***

*Nota****: no aproximeu les arrels per valors amb decimals; treballeu amb els radicals.***

[0,5 punts per l'apartat a; 1,5 punts per l'apartat b]

Solució

(a) La matriu B és la inversa de la matriu A si i sol si $A \cdot B = I$ i $B \cdot A = I$, on I és la matriu identitat del mateix ordre que la matriu A (i B).

(b) **Solució 1**

La forma més senzilla de resoldre el problema és realitzar el producte de la matriu A per la seva transposada i igualar el resultat a la identitat.

$$A \cdot A^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ p & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & p \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{p}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{p}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} & 0 & p^2 + \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Per tant, s'ha complir que $p/\sqrt{2} - 1/2 = 0$ i que $p^2 + 1/2 = 1$. La solució comuna a aquestes dues equacions és $p = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Solució 2

Evidentment, la qüestió es pot resoldre també trobant la matriu inversa de A i igualar el resultat a la matriu A^T. Com que

$$A^{-1} = \frac{1}{-\left(\frac{p}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right)} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2p}{\sqrt{6}} & -\frac{p\sqrt{6}+\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{p}{\sqrt{3}} & \frac{p\sqrt{6}+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix},$$

la igualació $A^{-1} = A^T$ dóna lloc a vuit equacions. Una d'elles,

$$\frac{1}{-\left(\frac{p}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right)} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

ens permet assegurar que $p = 1/\sqrt{2}$. S'ha de comprovar que aquest valor fa que els altres equacions es

És clar que aquesta segona forma de resoldre la qüestió és bastant més llarga i propensa a equivocacions.

---

73. PAU 2013 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 2

2.- La matriu de coeficients d'un sistema d'equacions lineals homogeni és

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 4 & 1 & 2a+2 \end{bmatrix}.$$

(a) ***Per a quins valors del paràmetre*** a ***el sistema té una sola solució? Quina és aquesta solució única?***

(b) ***Resoleu el sistema si*** $a = 2$ ***.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Els sistemes homogenis (aquells en què tots el termes independents són nuls) són sempre compatibles. Per tant, cal buscar el valor de a perquè sigui determinat. És a dir, els valors de a perquè rang $A = 3$. Ho podem fer calculant el determinant d'aquesta matriu.

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 4 & 1 & 2a+2 \end{vmatrix} = 2a^2 + 4a - 16\,.$$

L'equació $2a^2 + 4a - 16 = 0$ té com a solucions $a = -4$, $a = 2$. Llavors, si $a \neq -4$ i $a \neq 2$, el rang de la matriu A és igual a 3, el sistema és compatible determinat i l'única solució és la solució trivial,

També es pot resoldre la qüestió buscant el rang de la matriu A mitjançant el mètode de Gauss,

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 4 & 1 & 2a+2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5-a & 6 \\ 0 & 9 & 2a+14 \end{bmatrix}$$

Aconseguida aquesta nova matriu, el mètode de Gauss es fa bastant feixuc i el millor és imposar la proporcionalitat de les files segona i tercera,

$$\frac{5-a}{9} = \frac{6}{2a+14} \Longrightarrow 2a^2+4a-16=0 \Longrightarrow a=2\,, \quad a=-4$$

Atenció: per imposar la proporcionalitat estem suposant que $a \neq 7$, la qual cosa es confirma quan es resol l'equació. De fet, per a $a=7$ les files considerades no són proporcionals.

(b) Per $a=2$, la matriu de coeficients del sistema es transforma en

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 9 & 18 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema $-x+2y+3z=0\,,\ y+2z=0$ és equivalent a l'original. Si prenem z com a paràmetre, la solució és $x=-z$, $y=-2z$.

---

74. PAU 2012 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 1

1.- Determineu el rang de la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ***en funció del valor del paràmetre*** k***.***

[2 punts]

Solució

En ser la matriu quadrada, començarem calculant el seu determinant.

$$\begin{aligned} \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix} &\overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} k+2 & k+2 & k+2 \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} k+2 & 0 & 0 \\ 1 & k-1 & 0 \\ k & 1-k & 1-k \end{vmatrix} \\ &= (k+2)(k-1)(1-k) = -(k+2)(k-1)^2. \end{aligned}$$

En (1) s'ha fer $F_1 + F_2 + F_3$, ja que així s'aconsegueix que tots els elements de la primera fila siguin iguals. En (2) s'ha fet $C_2 - C_1$ i $C_3 - C_1$.

Si $\det A \neq 0$, el rang de la matriu A és 3; en cas contrari, és menor que 3. Resolem, doncs, l'equació $\det A = 0$.

$$-(k+2)(k-1)^2 = 0 \iff k = -2 \text{ o } k = 1.$$

Es pot arribar a la mateixa conclusió escalonant la matriu,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & k-1 & 1-k \\ 0 & 1-k & 1-k^2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & k-1 & 1-k \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 \end{pmatrix}.$$

i resolent $2 - k - k^2 = 0$.

Per tant,

- Si $k \neq -2$ i $k \neq 1$, tenim que rang $A = 3$.
- Si $k = -2$, la matriu A és

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  En aquest cas, rang $A = 2$.
- Finalment, per $k = 1$, la matriu A és

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

  que té, evidentment, rang 1.

75. PAU 2012 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 3

3.- Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\left.\begin{array}{c} x+y-3z=2 \\ 2x+ay-5z=2a+3 \\ 2x-3y+(a-2)z=9 \end{array}\right\} .$$

(a) ***Calculeu el valor o els valors del paràmetre*** a ***per al qual o per als quals el sistema és compatible indeterminat.***

(b) ***Quantes solucions té el sistema quan*** $a=-3$***?***

[1,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b]

Solució

(a) Calculem el determinant de la matriu del sistema,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & a & -5 \\ 2 & -3 & a-2 \end{vmatrix} = a^2+2a-3 \ .$$

Evidentment, aquest apartat es pot resoldre també aplicant el mètode de Gauss a la matriu ampliada del sistema,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & a & -5 & 2a+3 \\ 2 & -3 & a-2 & 9 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & a-2 & 1 & 2a-1 \\ 0 & -5 & a+4 & 5 \end{array}\right) \ .$$

A partir d'aquí l'escalonament es torna bastant complicat; llavors, podem analitzar si les dues últimes files de la matriu del sistema (no ampliada) són proporcionals (per tal que rang $A \neq 3$),

$$\frac{a-2}{-5}=\frac{1}{a+4} \iff (a-2)(a+4)=-5 \iff a^2+2a-3=0 \iff a=1 \ \text{ o } \ a=-3 \ ,$$

tal com surt per l'altre mètode.

• Per $a=1$, l'escalonament de la matriu ampliada del sistema ens dóna

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -5 & 5 \\ 2 & -3 & -1 & 9 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \ .$$

El sistema és compatible indeterminat.

• Quan $a=-3$, queda la matriu ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & -5 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 9 \end{array}\right) \ ,$$

que ens assegura que el sistema és incompatible, a la vista de les dues darreres files. Així, el sistema és compatible indeterminat si i sol si $a=1$.

(b) D'acord amb l'apartat anterior, per $a=-3$ el sistema és incompatible i, per tant, no té cap solució.

76. PAU 2012 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3

3.- Sigui** A **una matriu quadrada d'ordre** n **de manera que** $A^2 = O$**, essent** O **la matriu nul·la (la formada completament per zeros).

(a) ***Comproveu que*** $(A + I_n)^2 = 2A + I_n$ ***.***

(b) ***Comproveu que les matrius*** $B = I_n - A$ ***i*** $C = A + I_n$ ***són l'una inversa de l'altra.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Tenim que

$$(A + I_n)^2 = (A + I_n)(A + I_n) = A^2 + A + A + I_n = O + 2A + I_n = 2A + I_n \,.$$

S'ha utilitzat la propietat distributiva del producte de matrius.

(b) Per comprovar que B i C són l'una inversa de l'altra, efectuarem els dos productes possibles entre elles. Ambdós productes han de donar la identitat.

$$\begin{aligned} BC &= (I_n - A)(A + I_n) = I_n A + I_n I_n - AA - AI_n = A + I_n - A^2 - A = I_n - O = I_n \,, \\ CB &= (A + I_n)(I_n - A) = AI_n - AA + I_n I_n - I_n A = A - A^2 + I_n - A = -O + I_n = I_n \,, \end{aligned}$$

tal com volíem.

Notes:

• De què $A^2 = O$, no se'n pot deduir que la matriu A és la matriu nul·la. Considerar $A = O$ és un error molt greu.

• Si s'utilitza la fórmula $(A + I_n)^2 = A^2 + 2AI_n + I_n^2$ (que és incorrecta el general), cal justificar que les matrius A i I_n "commuten" entre elles.

• En l'apartat (b) n'hi ha prou en comprovar una de les dues igualtats, ja que es pot demostrar que llavors l'altra també és certa.

77. PAU 2012 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 5

5.- Contesteu les preguntes següents:

(a) ***Expliqueu raonadament si una matriu d'ordre 3 i una matriu d'ordre 2 poden tenir el mateix determinant.***

(b) ***Considereu les matrius següents:***

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & p \\ 1 & 1-p & 2 \\ 1 & 2 & p \end{pmatrix} \quad \textbf{\textit{i}} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & p \\ 0 & p & 4 \end{pmatrix} .$$

Calculeu, si és possible, el valor del paràmetre p ***perquè*** $\det A = \det B$ ***.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) El determinant de qualsevol matriu quadrada és un número (un escalar) i no depèn en absolut de l'ordre de la matriu. Així el determinant d'una matriu d'ordre 3 i el d'una d'ordre dos poden ser iguals.

Per exemple, $\det(I_3) = 1$ i $\det(I_2) = 1$.

(b) Tenim que $\det A = p - 2$ i $\det B = 4 - p^2$. Aquests determinants són iguals si $p - 2 = 4 - p^2$, equació que té com a solucions $p = -3$ i $p = 2$.

78. PAU 2012 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 4

4.- Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ***i*** $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(a) ***Comproveu que es compleix la igualtat*** $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ **.**

(b) ***És certa aquesta igualtat per a qualsevol parell de matrius quadrades*** A ***i*** B ***del mateix ordre? Responeu raonadament utilitzant les propietats generals de les operacions entre matrius, sense utilitzar matrius*** A ***i*** B ***concretes.***

[1 punt per apartat]

Solució

(a) Fem els càlculs que ens demanen,

$$(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ -8 & -8 \end{pmatrix};$$
$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ -8 & -8 \end{pmatrix}.$$

Efectivament, són iguals.

Aquest apartat es pot fer també comprovant que les matrius donades compleixen que $AB = BA$,

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$
$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Llavors,

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 - BA + BA - B^2 = A^2 - B^2.$$

(b) La igualtat proposada no és certa sempre, ja que

$$(A+B)(A-B) = AA - AB + BA - BB = A^2 - AB + BA - B^2,$$

i la matriu $-AB + BA$ no és, en general, la matriu nul·la, perquè el producte de matrius no és commutatiu.

79. PAU 2011 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 1

1.- Donada la matriu $M = \begin{pmatrix} 0 & k-2 & 1 \\ 0 & k-2 & -k \end{pmatrix}$***,***

(a) Calculeu els valors del paràmetre k ***per als quals la matriu*** M ***no és invertible.***

(b) Per a $k = 0$***, calculeu*** M^{-1}***.***

[1 punt per apartat]

Solució

(a) Sabem que una matriu és invertible si i sol si el seu determinant és no nul. Busquem, doncs, el determinant de la matriu M,

$$\det M = \begin{vmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 0 & k-2 & -k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 0 & 0 & -k-1 \end{vmatrix} = (k+1)(k-2)(-k-1) = -(k+1)^2(k-2)\,.$$

Aquest determinant val zero quan $k = -1$ o $k = 2$; aquests són els valors per als que la matriu no és invertible.

(b) Per $k = 0$ la matriu és $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ i la seva inversa es pot calcular utilitzant el mètode de Gauss-Jordan,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3/2 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3/2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)\,.$$

També es pot calcular utilitzant la matriu complementària (matriu adjunta transposta).

La matriu inversa és

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \dfrac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\,.$$

80. PAU 2011 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 4

4.- Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Calculeu A^2 ***i*** A^3.

(b) Deduïu el valor de A^{101}.

NOTA: ***treballeu amb radicals; no utilitzeu la representació decimal dels elements de la matriu.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Tenim que

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3\,.$$

(b) Com que $101 = 33 \cdot 3 + 2$, ens queda

$$A^{101} = A^{33\cdot 3+2} = (A^3)^{33} \cdot A^2 = (I_3)^{33} \cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

81. PAU 2011 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2

2.- Si tenim la matriu invertible A ***i l'equació matricial*** $X \cdot A + B = C$***:***

(a) Aïlleu la matriu X.

(b) Trobeu la matriu X ***quan***

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{\textit{i}} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

[1 punt per cada apartat]

(a) Tenim que $X \cdot A + B = C \Longrightarrow X \cdot A = C - B \Longrightarrow X = (C - B) \cdot A^{-1}$.

(b) Com que

$$C - B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ i } A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

ens queda

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Evidentment, també es pot resoldre aquest apartat posant $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ i plantejant el sistema

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

82. PAU 2011 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4

4.- Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{array}{rcl} x + 2y - az = -3 \\ 2x + (a-5)y + z = 4a+2 \\ 4x + (a-1)y - 3z = 4 \end{array}\right\}$$

(a) Calculeu els valors del paràmetre a perquè el sistema no sigui compatible determinat.

(b) Hi ha algun valor de a per al qual $x = 1$, $y = -3$, $z = -1$, sigui l'única solució del sistema?

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Com que la matriu del sistema és quadrada d'ordre 3, els valors del paràmetre que fan que el sistema no sigui compatible determinat són aquells que anul·len el seu determinant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -a \\ 2 & a-5 & 1 \\ 4 & a-1 & -3 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -a \\ 0 & a-9 & 2a+1 \\ 0 & a-9 & 4a-3 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} a-9 & 2a+1 \\ a-9 & 4a-3 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} \begin{vmatrix} a-9 & 2a+1 \\ 0 & 2a-4 \end{vmatrix} = (a-9)(2a-4)\,.$$

Les operacions elementals fetes a cada pas han estat:

(1) $F_2 - 2F_1$; $F_3 - 4F_1$. (2) Desenvolupament per la primera columna. (3) $F_2 - F_1$.

Com que $\det A = 0$ si i sol si $a = 2$ o $a = 9$, aquest són els valors per als quals el sistema no és compatible determinat.

Aquest estudi es pot fer també escalonant la matriu ampliada (o inclús sense ampliar) del sistema,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -a & -3 \\ 2 & a-5 & 1 & 4a+2 \\ 4 & a-1 & -3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -a & -3 \\ 0 & a-9 & 2a+1 & 4a+8 \\ 0 & a-9 & 4a-3 & 16 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -a & -3 \\ 0 & a-9 & 2a+1 & 4a+8 \\ 0 & 0 & 2a-4 & 8-4a \end{array}\right).$$

Els valors que fan que rang $A \neq 3$ són, evidentment, $a = 2$ i $a = 9$.

(b) Quan $x = 1$, $y = -3$ i $z = -1$, el sistema es transforma en

$$\left.\begin{array}{rcl} 1 - 6 + a = -3 \\ 2 - 3(a-5) - 1 = 4a+2 \\ 4 - 3(a-1) + 3 = 4 \end{array}\right\}.$$

Les tres equacions donen el mateix valor per al paràmetre: $a = 2$. És molt important comprovar que a les tres equacions surt el mateix valor de a; si no es comprova, l'apartat està mal resolt.

Per tant, quan $a = 2$, els valors proposats formen una solució del sistema. Ara bé, a l'apartat anterior hem vist que per $a = 2$ el sistema no és compatible determinat. Això vol dir que per a $a = 2$ el sistema és compatible indeterminat.

En definitiva, no existeix cap valor del paràmetre a per al qual els valors proposats siguin solució única.

83. PAU 2011 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 4

4.- Analitzeu, segons els valors del paràmetre k, el caràcter (és a dir, si és compatible o no i si és determinat o no) del sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{array}{c} 2x+y-z=k-4 \\ (k-6)y+3z=0 \\ (k+1)x+2y=3 \end{array}\right\}$$

[2 punts]

Solució

La matriu del sistema és quadrada. Busquem el seu determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & k-6 & 3 \\ k+1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3(k+1) - [-(k+1)(k-6)+12] = k^2-2k-15\,.$$

Busquem els valors de k perquè aquest determinant valgui zero,

$$k^2-2k-15=0 \Longrightarrow k=-3 \;\text{ o }\; k=5\,.$$

També es pot realitzar aquest estudi escalonant la matriu, ampliada o no, del sistema,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & k-4 \\ 0 & k-6 & 3 & 0 \\ k+1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & k-4 \\ 0 & k-6 & 3 & 0 \\ 0 & 3-k & k+1 & 10+3k-k^2 \end{array}\right)\,.$$

A partir d'aquí, l'escalonament es fa molt feixuc. Per això la millor forma d'acabar és veient per a quins punts les files segona i tercera de la matriu sense ampliar són proporcionals.

$$\frac{k-6}{3-k}=\frac{3}{k+1} \iff k=-3 \;\text{ o }\; k=5\,.$$

D'una o altra manera, tenim:

- Si $k\neq -3$ i $k\neq 5$, el rang de la matriu del sistema és 3; el de l'ampliada també és tres. Així, en aquest cas, el sistema és compatible determinat.
- Quan $k=-3$, escalonem la matriu ampliada del sistema,

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & -9 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)\,.$$

  Clarament, rang $A=2$ i rang $(A|b)=3$; el sistema és incompatible.
- Finalment, pel valor $k=5$,

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\,.$$

  Ara, rang $A=$ rang $(A|b)=2<3$. El sistema és compatible indeterminat.

Observeu que si s'ha realitzat l'escalonament de la matriu, l'estudi dels casos $k=-3$ i $k=5$ se simplifiquen, substituint el valor de la k a la matriu que ja està mig escalonada.

84. PAU 2010 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 4

4.- Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ ***.***

(a) ***Comproveu que compleix la igualtat*** $A^2 - 5A = I_2$***, on*** I_2 ***és la matriu identitat d'ordre 2.***

(b) ***Utilitzeu aquesta igualtat per a calcular la matriu inversa de*** A***.***

(c) ***Resoleu l'equació matricial*** $A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$***, utilitzant la matriu inversa de*** A ***.***

[0,5 punts per l'apartat a; 0,75 punts per l'apartat b; 0,75 punts per l'apartat c]

Solució

(a) En primer lloc, realitzem els càlculs indicats,

$$A^2 - 5A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 35 & 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 35 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2\,,$$

tal com volíem.

(b) Per calcular la matriu inversa de A, cal treure factor comú al membre esquerra de la igualtat donada, $A^2 - 5A = I_2 \iff A(A - 5I_2) = I_2$. Recordant que la matriu inversa de A és aquella que multiplicada per ella dóna la identitat, podem assegurar que

$$A^{-1} = A - 5I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

(c) Tenim que

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \iff X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

85. PAU 2010 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2

2.- Donat el sistema d'equacions lineals $\left.\begin{array}{c} x+2y-z=-1 \\ 2x+y+z=4 \\ x-y+(p-3)z=5 \end{array}\right\}$ ***:***

(a) ***Estudieu-ne el caràcter (és a dir, si és compatible o no i si és determinat o no) en funció del paràmetre*** p***.***

(b) ***Comproveu que si*** $p \neq 5$ ***la solució del sistema no depèn del valor d'aquest paràmetre.***

[1,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b]

Solució

(a) Escalonem la matriu del sistema,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & p-3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & p-2 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & p-5 & 0 \end{array}\right).$$

A partir d'aquí,

- Si $p \neq 5$ el rang de la matriu del sistema i el de l'ampliada valen 3, que és igual al número d'incògnites. Per tant, el sistema és compatible determinat.
- Quan $p = 5$, els rangs valen 2, menor que el número d'incògnites. Per tant, el sistema és compatible indeterminat.

La qüestió es pot resoldre també buscant el determinant de la matriu del sistema, que dóna $15 - 3p$; en igualar-lo a zero, resulta $p = 5$ com a cas a estudiar. Si es fa així, en el cas $p = 5$ cal estudiar el rang de la matriu ampliada arribant a la conclusió de què rang $A =$ rang $(A|b) = 2$.

(b) D'acord amb l'escalonament anterior, si $p \neq 5$ el sistema a resoldre és

$$\left.\begin{array}{c} x+2y-z=-1 \\ -y+z=2 \\ (p-5)z=0 \end{array}\right\}.$$

que té per solució $z = 0$, $y = -2$ i $x = 3$, independentment del valor de p, sempre que $p \neq 5$.

86. PAU 2010 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 6

6.- Sigui $A = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix}$***. Trobeu els valors de les variables*** x ***i*** y ***perquè es compleixi que*** $A^2 = A$***.***

Solució

Busquem el valor de la matriu A^2,

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 6 & 3x + 3y \\ -2x - 2y & -6 + y^2 \end{pmatrix} .$$

La igualtat $A^2 = A$ ens porta al sistema d'equacions

$$x^2 - 6 = x \; ; \quad 3x + 3y = 3 \; ; \quad -2x - 2y = -2 \; ; \quad y^2 - 6 = y \; .$$

De fet, la segona i la tercera equacions són la mateixa, $x + y = 1$. De la primera equació,

$$x^2 - 6 = x \iff x^2 - x - 6 = 0 \iff x = 3 \;\text{ o }\; x = -2 \; .$$

La quarta equació és similar a la primera amb diferent variable. Les solucions són $y = 3$, $y = -2$. En principi, sembla que hi ha quatre solucions diferents,

$$x = 3 \;\text{ amb }\; y = 3; \quad x = 3 \;\text{ amb }\; y = -2; \quad x = -2 \;\text{ amb }\; y = 3; \quad x = -2 \;\text{ amb }\; y = -2.$$

Ara bé, d'aquestes quatre solucions solament dues compleixen l'equació $x + y = 1$:

$$x = 3 \;\text{ amb }\; y = -2 \; ; \quad x = -2 \;\text{ amb }\; y = 3 \; .$$

87. PAU 2010 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 2

2.- Considereu la igualtat matricial $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$***.***

(a) ***Comproveu si les matrius*** $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ***i*** $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ ***compleixen o no la igualtat anterior.***

(b) ***En general, donades dues matrius qualssevol*** A ***i*** B ***quadrades del mateix ordre, expliqueu raonadament si hi ha alguna condició que hagin de complir perquè la igualtat de l'enunciat sigui certa.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Realitzem els càlculs demanats.

$$(A + B)^2 = \left[\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right]^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

$$\begin{aligned} A^2 + 2AB + B^2 &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2 + 2 \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

(b) En realitat, $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2+AB+BA+B^2 \neq A^2+2AB+B^2$, ja que, en general, $AB \neq BA$. Així, la condició que han de complir les matrius A i B perquè es verifiqui la igualtat de l'enunciat és que $AB = BA$.

88. PAU 2010 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 4

4.- Hem escalonat la matriu ampliada d'un sistema d'equacions lineals, $A \cdot X = b$***, i hem obtingut:***

$$(A|b) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & a+2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 & 3 \end{array}\right) .$$

(a) ***Discutiu aquest sistema en funció del paràmetre*** a***.***

(b) ***Resoleu-lo quan*** $a = 2$***.***

[1,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b]

Solució

(a) Vist l'enunciat, hi ha dos valors del paràmetre a a estudiar; en efecte,

- Si $a \neq -2$ i $a \neq 1$, tenim que rang $A =$ rang $(A|b) = 3$, que coincideix amb el nombre d'incògnites. Llavors, el sistema és compatible determinat.
- Per $a = 1$, és clar que rang $A = 2$ i rang $(A|b) = 3$. El sistema és, doncs, incompatible (també es pot raonar veient que la tercera equació és $0 = 3$).
- Quan $a = -2$, la matriu no està acabada d'escalonar. Acabant l'escalonament,

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) ,$$

  es veu que rang $A =$ rang $(A|b) = 2$; el sistema és compatible indeterminat.

(b) Quan $a = 2$, el sistema d'equacions inicial és equivalent al sistema

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y + 3z = 2 \\ 4y + z = -1 \\ z = 3 \end{array}\right\}$$

que té per solució $x = -9$, $y = -1$, $z = 3$.

89. PAU 2010 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 1

1.- Considereu un sistema qualsevol de dues equacions amb tres incògnites. Responeu raonadament les qüestions següents:

(a) ***És possible que el sistema considerat sigui compatible determinat?***

(b) ***Pot ser incompatible?***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Si el sistema té solament dues equacions, el rang màxim que poden tenir la matriu del sistema i la matriu ampliada és 2. Com que hi ha 3 incògnites, és impossible que el sistema sigui compatible determinat.

(b) Sí que pot ser-ho. Per exemple, el sistema $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{array}\right\}$ és incompatible.

90. PAU 2010 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 4

***4.- Siguin** A, B **i** C **matrius quadrades d'ordre** n.*

(a) ***Expliqueu raonadament si és possible que*** $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$ ***i*** $\det(A \cdot B) = 0$. ***Si és possible, poseu-ne un exemple.***

(b) ***Si sabem que*** $\det A \neq 0$ ***i*** $A \cdot B = A \cdot C$, ***expliqueu raonadament si podem assegurar que*** $B = C$.

[1 punt per apartat]

Solució

(a) Una de les propietats dels determinants ens assegura que $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$. Per tant, la situació proposada és impossible.

(b) Quan $\det A \neq 0$ podem assegurar que la matriu és invertible. Per tant,

$$A \cdot B = A \cdot C \iff A^{-1}(A \cdot B) = A^{-1}(A \cdot C) \iff (A^{-1} \cdot A)B = (A^{-1} \cdot A)C \iff B = C\ .$$

91. PAU 2009 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 1

QÜESTIONS

1.- Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -b \end{pmatrix}$. ***Calculeu el valor dels paràmetres*** a ***i*** b ***perquè*** $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

[2 punts]

Solució

Calculem el valor de la matriu A^2,

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ a-b & b^2 \end{pmatrix}.$$

Quan igualem aquest resultat a la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ens queden les equacions $a^2 = 1$, $a - b = -2$ i $b^2 = 1$. La segona equació permet assegurar que $a = b - 2$. Llavors, la primera equació és $(b-2)^2 = 1$ que té per solucions $b = 3$ i $b = 1$; la tercera equació té per solucions $b = 1$ i $b = -1$. El valor que les compleix simultàniament és $b = 1$; d'aquí, $a = 1 - 2 = -1$.

També es pot treballar de la forma explicitada a continuació.

De la primera equació, resulta $a = \pm 1$; igualment, de la tercera en deduïm que $b = \pm 1$. Ara cal comprovar aquests valors en la segona equació.

- Quan $a = 1$ i $b = 1$, tenim que $a - b = 0$.
- Per $a = 1$ i $b = -1$, surt que $a - b = 2$.
- Si $a = -1$ i $b = 1$, ens queda que $a - b = -2$.
- Finalment, quan $a = -1$ i $b = -1$, tenim que $a - b = 0$.

Així l'única solució és $a = -1$ i $b = 1$.

92. PAU 2009 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 6

6.- Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{array}{c} x+5y+z+a=0 \\ (a-2)z+x+2y-1=0 \\ (a-1)y+(1-a)x+z+a+2=0 \end{array}\right\}$$

a) ***Expliqueu, raonadament, si es tracta d'un sistema lineal homogeni.***

b) ***Construïu-ne la matriu de coeficients i la matriu ampliada.***

c) ***Trobeu els valors del paràmetre*** a ***per als quals el sistema no és compatible determinat, i estudieu el caràcter del sistema en cada un d'aquests casos.***

d) ***Resoleu-lo solament quan el conjunt de les seves solucions és una recta de*** $\mathbb{R}^3$***.***

[0,5 punt per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b; 2 punts per l'apartat c; 1 punt per l'apartat d]

Solució

a) Un sistema d'equacions lineals és homogeni quan tots els termes independents són nuls, cosa que no passa al nostre cas; per exemple, el terme independent de la segona equació és -1 (o 1, si es considera translladat a la dreta de la igualtat). No és, doncs, un sistema homogeni.

b) La matriu de coeficients del sistema i la matriu ampliada són, respectivament,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & a-2 \\ 1-a & a-1 & 1 \end{pmatrix}\ ;\qquad \overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & -a \\ 1 & 2 & a-2 & 1 \\ 1-a & a-1 & 1 & -a-2 \end{pmatrix}.$$

c) Escalonem la matriu ampliada per tal de calcular el rang que té, tant ella com la matriu de coeficients,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & -a \\ 1 & 2 & a-2 & 1 \\ 1-a & a-1 & 1 & -a-2 \end{array}\right) \overset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & -a \\ 0 & -3 & a-3 & a+1 \\ 0 & 6a-6 & a & -a^2-2 \end{array}\right)$$

$$\overset{(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & -a \\ 0 & -3 & a-3 & a+1 \\ 0 & 0 & 2a^2-7a+6 & a^2-4 \end{array}\right)$$

En (1) s'ha restat la fila 1 a la fila 2 (F_2-F_1) i la fila 1 multiplicada per $1-a$ a la fila 3 ($F_3-(1-a)F_1$); en (2) s'ha sumat la fila 2 multiplicada per $2a-2$ a la fila 3 ($F_3+(a-2)F_1$).

Cal analitzar quins valors del paràmetre a fan que l'element de la tercera fila tercera columna sigui nul,

$$2a^2-7a+6=0 \Longrightarrow a=2,\ a=3/2.$$

Quan $a=2$ o $a=3/2$ el sistema no és compatible determinat.

Per $a=2$, la matriu resultant de l'escalonament és $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. En aquest cas, rang $A=$ rang $\overline{A}=2$; el sistema és compatible indeterminat (amb un grau de llibertat).

Per $a=3/2$, la matriu resultant de l'escalonament és $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -3/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & -7/4 \end{array}\right)$, i el sistema és incompatible, ja que rang $A=2<3=$ rang $\overline{A}$.

d) El conjunt de solucions del sistema és una recta a $\mathbb{R}^3$ si i sol si es tracta d'un sistema compatible indeterminat amb un grau de llibertat. Això passa per $a=2$. Llavors, la solució és, per exemple, $x=1-2y$, $z=-3-3y$.

93. PAU 2009 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 1

QÜESTIONS

1.- Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & b \\ b & a^2 \end{pmatrix}$***. Trobeu els valors dels paràmetres*** a ***i*** b ***perquè tingui rang 1.***

[2 punts]

Solució

Escalonem la matriu, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & b \\ b & a^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & b-2a \\ 0 & a^2-2b \end{pmatrix}$.

Perquè el rang sigui 1 cal que $b-2a=0$ i $a^2-2b=0$. De la primera equació se'n dedueix que $b=2a$; posant-ho a la segona queda $a^2-4a=0$; és a dir, $a=0$ o $a=4$. Llavors les solucions són:

$$a=0,\ b=0 \qquad \text{o bé} \qquad a=4,\ b=8\ .$$

També es pot plantejar l'exercici, per exemple, forçant que les dues columnes siguin proporcionals, però les equacions a resoldre seran les mateixes.

94. PAU 2009 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 3

3.- Donat el sistema $\begin{cases} x+py=p \\ px+y=p \end{cases}$***:***

a) ***Discutiu-ne el caràcter en funció del paràmetre*** p***.***

b) ***Resoleu-lo quan*** $p=2$***.***

[1,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b]

Solució

a) Escalonem la matriu ampliada del sistema,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & p & p \\ p & 1 & p \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & p & p \\ 0 & 1-p^2 & p-p^2 \end{array}\right)$$

Analitzem el valor de l'element $1-p^2$. Tenim que $1-p^2=0$ si i sol si $p=\pm 1$. Per tant,

- Si $p\neq -1$ i $p\neq 1$, el sistema és compatible determinat, ja que el rang de la matriu del sistema i el de l'ampliada és 2, coincidint, a més a més, amb el número d'incògnites.
- Si $p=-1$, la matriu escalonada és $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$. El rang de la matriu del sistema és 1 i el de l'ampliada és 2. El sistema és incompatible.
- Si $p=1$, la matriu escalonada és $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. El sistema és compatible indeterminat perquè el rang de la matriu del sistema i el de l'ampliada coincideixen (valen 1), però és inferior al número d'incògnites.

b) Per $p=2$, el sistema és $\begin{cases} x+2y=2 \\ 2x+y=2 \end{cases}$ o, escalonat, $\begin{cases} x+2y=2 \\ -3y=-2 \end{cases}$. La solució és $x=2/3$, $y=2/3$.

95. PAU 2009 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 2

2.- Siguin $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ***i*** $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$***.***

a) ***Comproveu que la inversa de*** A ***és*** A^2***.***

b) ***Comproveu també que*** $A^{518} = B$***.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

a) Per comprovar que $A^{-1} = A^2$, cal veure que $A \cdot A^2 = I$, essent I la matriu identitat d'ordre 3. Calculem primer el valor de A^2,

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Llavors,

$$A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Naturalment, la qüestió es pot resoldre calculant A^{-1} directament de la matriu A i comprovant després que $A^{-1} = A^2$, encara que no és aquest el procediment demanat; o sigui, en aquesta qüestió no es demana que l'estudiant sigui capaç de calcular la inversa d'una matriu 3×3.

b) Com que $A \cdot A^2 = A^3 = I$, tenim

$$A^{518} = A^{3 \cdot 172 + 2} = (A^3)^{172} \cdot A^2 = A^2 = B.$$

96. PAU 2009 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 4

4.- En la resolució pel mètode de Gauss d'un sistema de tres equacions amb tres incògnites ens hem trobat amb la matriu següent:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 6 \end{array}\right).$$

a) ***Expliqueu, raonadament, quin és el caràcter del sistema inicial.***

b) ***Si és compatible, trobeu-ne la solució.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

a) Com que el rang de la matriu de coeficients del sistema i el de la matriu ampliada és dos, podem assegurar que el sistema inicial és compatible indeterminat.

b) El sistema inicial és equivalent al sistema $\left.\begin{array}{r} 3x - 5y + 2z = -5 \\ y - 2z = 2 \end{array}\right\}$, que té per solució $x = (5 + 8z)/3$, $y = 2 + 2z$, on z és un paràmetre.

97. PAU 2008 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 2

2.- Sigui $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) ***Calculeu*** A^2 ***i*** A^3.

b) ***Determineu, raonadament, el valor de*** A^{60124}.

PUNTUACIÓ: 1 punt per cada apartat.

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_3$

c) A la vista del resultat anterior, podem assegurar que $A^6 = I_3$. Llavors,

$$A^{60124} = A^{1020 \cdot 6 + 4} = (A^6)^{1020} \cdot A^4 = I_3 \cdot A^4 = A \cdot A^3 = -A \ .$$

98. PAU 2008 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 3

3.- Considereu un sistema de dues equacions amb tres incògnites.

a) Pot ser incompatible?

b) Pot ser compatible determinat?

Raoneu les respostes

PUNTUACIÓ: un punt cada apartat.

Solució:

a) Efectivament, un sistema de dues equacions amb tres incògnites pot ser incompatible. Per exemple, ho és

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}.$$

En general, un sistema $\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z = D_1 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z = D_2 \end{cases}$ és incompatible si i sol si $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$ (observeu que aquesta és la condició per a què els plans representats per les dues equacions siguin paral·lels).

b) Un sistema de dues equacions amb tres incògnites no pot ser compatible determinat, perquè el rang de la matriu del sistema és, com a màxim, 2 (té solament dues files), mentre que el número d'incògnites és 3.

99. PAU 2008 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 2

2.- Siguin $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ ***i*** $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}$***.***

a) Trobeu la matriu M***, quadrada d'ordre 2, tal que*** $M\cdot A=B$***.***

b) Comproveu que $M^2=I_2$ ***(matriu identitat d'ordre 2); deduïu l'expressió de*** M^n***.***

PUNTUACIÓ: 1 punt cada apartat.

Solució:

a) Podem calcular M utilitzant la matriu inversa de la matriu A,

$$M=B\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1/4 & 3/8\\ -1/4 & 1/8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2 & 3/4\\ 1 & 1/2\end{pmatrix}.$$

També es pot resoldre com un sistema d'equacions, posant $M=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$. Llavors,

$$\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{r}x+2y=1\\ -3x+2y=3\\ z+2t=2\\ -3z+2t=-2\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1/2\\ y=3/4\\ z=1\\ t=1/2\end{cases}$$

b) En efecte, $M^2=M\cdot M=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$. Amb això, $M^n=\begin{cases}M, & \text{si } n \text{ és senar}\\ I_2, & \text{si } n \text{ és parell}\end{cases}$.

100. PAU 2008 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 3

3.- Donat el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases}x+y+(m-1)z=1\\ x+(m-1)y+z=m-1\\ (m-1)x+y+z=m+2\end{cases}$$

discutiu-lo en funció dels valors del paràmetre m***.***

PUNTUACIÓ: 2 punts

Solució:

Primerament es fa l'escalonament de la matriu ampliada,

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & m-1 & 1\\ 1 & m-1 & 1 & m-1\\ m-1 & 1 & 1 & m+2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & m-1 & 1\\ 0 & m-2 & 2-m & m-2\\ 0 & -m+2 & 2m-m^2 & 3\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & m-1 & 1\\ 0 & m-2 & 2-m & m-2\\ 0 & 0 & 2+m-m^2 & m+1\end{array}\right)\quad;\quad 2+m-m^2=0\Leftrightarrow m=-1\,,\quad m=2\,.$$

S'observa que els valors que cal estudiar separadament són $m=-1$ i $m=2$.

S'arriba a la mateixa conclusió igualant a zero el determinant de la matriu de coeficients

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m-1 \\ 1 & m-1 & 1 \\ m-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -m^3 + 3m^2 - 4 = -(m-2)^2(m+1).$$

Llavors, quan m és diferent de 2 i de -1, el sistema és compatible determinat.

Si $m=2$, la matriu ampliada, després d'escalonar, és $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$ i el sistema és incompatible ja que la matriu de coeficients té rang 1 i l'ampliada rang 2.

Finalment, si $m=-1$ la matriu és $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ i el sistema és compatible indeterminat ja que tant la matriu de coeficients com l'ampliada tenen rang 2.

101. PAU 2008 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 2

2.- Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$***, on*** a ***i*** b ***són nombres reals.***

a) Calculeu el valor de a ***i*** b ***per tal que*** $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$***.***

b) Per als valors obtinguts a l'apartat anterior, calculeu A^3 ***i*** A^4***.***

c) Sigui n ***un nombre natural qualsevol. Doneu l'expressió de*** A^n ***en funció de*** n***.***

PUNTUACIÓ: 1 punt per l'apartat a); 0.5 punts per l'apartat b); 0.5 punts per l'apartat c).

Solució:

a) Calculem A^2 i igualem a la matriu que ens indiquen.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+b)^2 & 2a \\ 0 & (a-b)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'aquí, cal que $(a+b)^2 = 1$, $(a-b)^2 = 1$ i $2a = 2$. La solució de la tercera equació és $a = 1$. De la primera i tercera equació deduïm que $b = 0$.

b) La matriu obtinguda a l'apartat anterior és $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Llavors,

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \; A^4 = A \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) A la vista dels resultats obtinguts fins ara, l'expressió de la potència n-ésima de la matriu A és $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

102. PAU 2008 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 5

PROBLEMES

5.- Considereu el sistema d'equacions

$$\begin{cases} 2x + y - (a-1)z = 4 \\ x - 2y + z = -4 \\ 4x - (a+1)y + z = -2a \end{cases}$$

a) Discutiu-lo en funció del paràmetre a***.***

b) Resoleu-lo quan sigui compatible indeterminat.

c) En el cas (b), trobeu una solució del sistema en què x***,*** y ***i*** z ***tinguin valors enters.***

PUNTUACIÓ: 2 punts per l'apartat a); 0.5 punts per l'apartat b); 1 punt per l'apartat c); 0.5 punts per l'apartat d).

Solució:

a) Escalonant la matriu ampliada del sistema ens queda

$$(A|b) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 1-a & 4 \\ 4 & -a-1 & 1 & -2a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -a-1 & 12 \\ 0 & -a+7 & -3 & 16-2a \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -a-1 & 12 \\ 0 & 0 & -a^2+6a-8 & 2a-4 \end{array}\right)$$

Nota: ens podem estalviar l'últim pas mirant si la segona i la tercera files de la matriu del sistema (no de l'ampliada) són proporcionals:

$$\frac{5}{-a+7} = \frac{-a-1}{-3} \Leftrightarrow -15 = a^2 - 6a - 7 \Leftrightarrow a^2 - 6a + 8 = 0$$

Sigui d'una o altra manera, cal buscar els valor del paràmetre a per als quals $-a^2+6a-8=0$. Les solucions d'aquesta equació de segon grau són $a=2$, $a=4$. Llavors,

- Si $a \neq 2$ i $a \neq 4$, tenim que $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|b) = 3$. El sistema és compatible determinat.
- Si $a=2$,

$$(A|b) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

  El sistema és compatible indeterminat, ja que $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|b) = 2$.

- Si $a=4$,

$$(A|b) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right).$$

  El sistema és incompatible, ja que $\operatorname{rang} A = 2 \neq \operatorname{rang}(A|b) = 3$.

b) La resolució del sistema en el cas compatible indeterminat ens porta a què

$$y = \frac{12+3z}{5}, \quad x = \frac{4+z}{5}, \text{ per a qualsevol valor de } z.$$

c) Qualsevol valor de la forma $z = 1+5n$ dóna lloc a solucions amb components enteres.

En efecte, si $z = 1+5n$, llavors

$$x = \frac{4+(1+5n)}{5} = 1+n \quad \text{i} \quad y = \frac{12+3(1+5n)}{5} = \frac{15+15n}{5} = 3+3n.$$

Per exemple, per $n=0$, la solució és $x=1$, $y=3$, $z=1$.

103. PAU 2007 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 2

2.- Donada la matriu següent depenent d'un paràmetre *m*,

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & m & 2m\\ m & 2 & 2+m\end{pmatrix}$$

a) Estudieu el seu rang segons els valors de *m*.

b) Digueu quina és la posició relativa dels plans $\pi_1 : x+y+2z=2$,
$\pi_2 : 2x+my+2mz=2+m$ i $\pi_3 : mx+2y+(2+m)z=0$, segons els valors de *m*.

a) Esglaonant,

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & m & 2m\\ m & 2 & 2+m\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & m-2 & 2m-4\\ 0 & 2-m & 2-m\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & m-2 & 2m-4\\ 0 & 0 & m-2\end{pmatrix}$$

Llavors, el rang de la matriu es 3 si $m\neq 2$ i 1 si $m=2$.

L'obtenció del valor de m que discrimina també es pot fer igualant a zero el determinant de la matriu.

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & m & 2m\\ m & 2 & 2+m\end{vmatrix}=m^2-4m+4=(m-2)^2=0\rightarrow m=2.$$

A partir d'aquí cal esbrinar quin rang té la matriu quan $m=2$

b) Val la pena observar que la matriu de l'apartat anterior és la matriu de coeficients dels plans donats. Així, si $m\neq 2$, el sistema és compatible determinat; per tant, els plans es tallen en un punt. Si $m=2$, les equacions són $\pi_1 : x+y+2z=2$, $\pi_2 : 2x+2y+4z=4$ i $\pi_3 : 2x+2y+4z=0$, els dos primers plans són coincidents i el tercer és paral·lel a ells.

PUNTUACIÓ:

1 punt per cada apartat.

104. PAU 2007 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 3

3.- Considereu la matriu $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}$. Trobeu els valors de p i q que fan que es verifiqui $A^2 = A$. En aquest cas, raoneu sense calcular què val A^{10}.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ pq & p+q^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}$$

i la igualtat es compleix quan $p=0$ i $q=1$.

Si la matriu verifica $A^2 = A$, llavors, $A^3 = A \cdot A^2 = A \cdot A = A$. Procedint de manera successiva, es pot veure que qualsevol altra potència de la matriu A també val A.

1 punt per trobar els valors de p i q.

1 punt per justificar que $A^{10} = A$. No es demana fer una demostració per inducció o similar. Simplement que justifiquin aquest resultat sense fer càlculs.

105. PAU 2007 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 6

6.- Discutiu el següent sistema $\begin{cases} 2x+py+2z=10 \\ px+6y+3z=12 \end{cases}$ en funció del paràmetre p. Doneu la interpretació geomètrica del sistema en cada cas i resoleu-lo quan sigui compatible.

Amb un sol pas d'esglaonament de la matriu ampliada ja es poden treure conclusions.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & p & 2 & 10 \\ p & 6 & 3 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & p-4 & 0 & 0 \\ 0 & 6-2p & 3-p & 12-5p \end{pmatrix}.$$

- Si $p=4$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -8 \end{pmatrix}.$$

En aquest cas els rangs de la matriu de coeficients i de l'ampliada valen 2 i el sistema és compatible indeterminat.

El sistema queda $\begin{cases} x+2y+z=5 \\ -2y-z=-8 \end{cases}$ i la solució es pot escriure com $x=-3$, $z=8-2y$.

Per a aquest valor de *p*, el sistema original és $\begin{cases} x+2y+z=5 \\ 2x+4y+2z=10 \\ 4x+6y+3z=12 \end{cases}$. Si s'interpreta que cada equació correspon a un pla, les dues primeres representen el mateix. El tercer el talla sobre la recta d'equació $x=-3$, $z=8-2y$.

- Si $p=3$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ara la matriu de coeficients té rang 2 i l'ampliada 3. El sistema és incompatible.

En aquest cas el sistema s'escriu $\begin{cases} x+2y+z=5 \\ 2x+3y+2z=10 \\ 3x+6y+3z=12 \end{cases}$. Els plans primer i tercer són paral·lels i el segon els talla de manera que no hi ha intersecció comuna.

- Si $p\neq 3$ i $p\neq 4$ tots dos rangs valen 3 i el sistema és compatible determinat. Per a aquests valors del paràmetre, si es fa un pas més d'esglaonament, s'obté

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & p-4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-p & 12-5p \end{pmatrix}.$$

Llavors, la solució és $z = \dfrac{12-5p}{3-p}$, $y = 0$ i $x = \dfrac{3}{3-p}$, corresponent a tres plans que es tallen en un punt.

Probablement, molts estudiants, en lloc d'esglaonar, calcularan el determinant de la matriu de coeficients que, com es veu a continuació, quan s'iguala a zero condueix als valors de *p* que discriminen.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ p & 6 & 3 \\ 2 & p & 2 \end{vmatrix} = p^2 - 7p + 12 = 0 \rightarrow p = 3,4\,.$$

A partir d'aquí cal continuar la discussió com abans. Les resolucions també es poden dur a terme usant el mètode de Cramer.

PUNTUACIÓ:
0.5 punts per obtenir per algun mitjà correcte els valors de *p* que discriminen.
1 punt per la discussió completa. Si es deixen un cas per discutir resteu 0.5. Si se'n deixen dos o tres compteu zero punts per la discussió.
0.5 punts per cada una de les dues resolucions (total 1 punt per la part de resolució).
0.5 punts per cada interpretació geomètrica (total 1.5 punts per la part d'interpretació).

106. PAU 2006 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 6

6. Considereu el sistema d'equacions $\begin{cases} x+y+z=200 \\ 7x+py+8z=1395 \end{cases}$.

a) Discutiu-lo en funció del paràmetre p.

b) Doneu la interpretació geomètrica en els casos en què el sistema és incompatible.

c) Resoleu el sistema per a $p=6$.

a) Esglaonant la matriu ampliada del sistema ens queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} p & 7 & 8 & 1370 \\ 1 & 1 & 1 & 200 \\ 7 & p & 8 & 1395 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 7 & p & 8 & 1395 \\ p & 7 & 8 & 1370 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & p-7 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 9-p & 1365-200p \end{array}\right).$$

Per a $p=9$ i per a $p=7$, el rang de la matriu del sistema és igual a 2 i el rang de la matriu ampliada és 3. Aquests valors fan que el sistema sigui incompatible. Per a qualsevol altre valor el sistema és compatible determinat.

Evidentment, el problema es pot començar calculant el determinant de la matriu del sistema,

$$\begin{vmatrix} p & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & p & 8 \end{vmatrix} = -p^2+16p-63,$$

que té com a arrels els valors $p=7$ i $p=9$. Per a $p=7$, la primera i la tercera equacions ens deixen veure ja que el sistema és incompatible; per a $p=9$ cal esglaonar la matriu ampliada del sistema.

b) Per a $p=7$, les equacions primera i tercera corresponen a dos plans paral·lels; és a dir, tenim dos plans paral·lels i un tercer que els talla.

Per a $p=9$, no hi ha cap pla paral·lel. Això vol dir que els plans es tallen dos a dos en rectes que són paral·leles entre sí.

c) Quan $p=6$, la solució del sistema (que pot estar resolt pel mètode de Gauss o qualsevol altre) és $x=85$, $y=60$ i $z=55$.

Apartat a): 1.5 punts (0.5 punts per cada un dels casos).
Apartat b): 1.5 punts.
Apartat c): 1 punt.

107. PAU 2006 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2

2.- Esbrineu si el sistema següent pot ser compatible indeterminat per algun valor de m.

$$\left.\begin{array}{rcl} x+3y+2z & = & 0 \\ 2x+4y+3z & = & 0 \\ x+y+mz & = & 0 \end{array}\right\}$$

És incompatible per algun valor de m?.

En primer lloc s'estudia el rang de la matriu de coeficients.

$$A=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&4&3\\1&1&m\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&2\\0&-2&-1\\0&-2&m-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&2\\0&-2&-1\\0&0&m-1\end{pmatrix}.$$

Per tant, si $m=1$ $\operatorname{rang}(A)=2$ i és igual a 3 per a la resta de valors de m.

Així, si $m=1$ el sistema és compatible indeterminat.

Finalment, com que el sistema és homogeni mai pot ser incompatible.

1 punt per l'estudi del rang o, simplement, per esbrinar quin valor de m discrimina.
0.5 punts per dir quan és compatible indeterminat.
0.5 punts per raonar que el sistema no pot ser incompatible

108. PAU 2006 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3

3.- Donades les matrius $A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&-1\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}1&1\\4&-1\end{pmatrix}$

a) Calculeu $A\cdot B$ i $B\cdot A$.

b) Comproveu que $(A+B)^2=A^2+B^2$.

a) $A\cdot B=\begin{pmatrix}1&-1\\2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\4&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&2\\-2&3\end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix}1&1\\4&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2\\2&-3\end{pmatrix}$.

b) $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2=A^2+B^2$, ja que al primer apartat es comprova que $AB=-BA$.

a) 0.5 punts per cada producte.
b) 1 punt. Evidentment, els estudiants ho poden comprovar operant les matrius.

109. PAU 2006 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 4

4. Sigui la matriu $A=\begin{pmatrix}4&1&-m\\0&m&3\end{pmatrix}$. Determineu els valors de m per als quals $\operatorname{rang}(A)<3$.

Pot ser $\operatorname{rang}(A)=1$ per algun valor de m?

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\4&1&m\\0&m&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&4-m\\0&m&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&4-m\\0&0&3-4m+m^2\end{pmatrix}.$$

Si $m^2-4m+3=0$, és a dir, si $m=1$ o $m=3$, $\operatorname{rang}(A)=2<3$.

Tal com es veu a les dues primeres files, el rang no pot valer 1 ja que mai poden ser proporcionals.

1 punt per l'esglaonament de les matrius. Si es calcula el determinant, cal comptar també 1punt.
0.5 punts per determinar els valors que proporcionen rangs inferiors a 3.
0.5 punts per justificar que el rang no pot valer 1.

110. PAU 2005 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 1

QÜESTIONS

1. En un sistema hi ha, entre d'altres, aquestes dues equacions: $x+2y-3z=5$ i $2x+4y-6z=-2$. Què podem dir de les solucions del sistema?

SOLUCIÓ [2 punts] El rang de la matriu $\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 4 & -6\end{pmatrix}$ és 1, mentre que el rang de la matriu $\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -3 & 5\\ 2 & 4 & -6 & -2\end{array}\right)$ és 2. Això ens diu que les dues equacions donades són incompatibles. Qualsevol sistema que les contingui, també serà incompatible.

111. PAU 2005 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

QÜESTIONS

1. Considereu el sistema següent en funció del paràmetre real a:

$$\begin{cases} x-ay &= 1\\ ax+y &= 3. \end{cases}$$

   a) Discutiu-lo en funció del paràmetre a.
   b) Resoleu els casos compatibles.

SOLUCIÓ. [2 punts] Per Gauss, $\begin{pmatrix}1 & -a & 1\\ a & 1 & 3\end{pmatrix} \square \begin{pmatrix}1 & -a & 1\\ 0 & 1+a^2 & 3-a\end{pmatrix}$. Per a qualsevol valor de a, el rang de la matriu del sistema és 2 i coincideix amb el de la matriu ampliada i el nombre d'incògnites. El sistema és, doncs, compatible determinat per a tot valor de a.

(O bé, el determinant del sistema és $\begin{vmatrix}1 & -a\\ a & 1\end{vmatrix} = 1+a^2$ que és sempre diferent de 0. El sistema és, doncs, compatible determinat per a tot valor de a.)
La solució és:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & -a\\ 3 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -a\\ a & 1\end{vmatrix}}=\frac{1+3a}{1+a^2};\quad y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ a & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -a\\ a & 1\end{vmatrix}}=\frac{3-a}{1+a^2}.$$

Puntueu amb 1 punt per la discussió correcta i 1 punt per la solució correcta

112. PAU 2005 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2

2. La següent matriu expressa els preus unitaris, en euros, de quatre articles A, B, C i D procedents de les fàbriques f1, f2 i f3:

$$P=\begin{pmatrix}34 & 40 & 36\\ 11 & 8 & 12\\ 23 & 27 & 32\\ 25 & 21 & 30\end{pmatrix}$$

Si una comanda ve representada per un vector fila $C=\begin{pmatrix}x & y & z & t\end{pmatrix}$, què representa cadascun dels elements del resultat del producte $C\cdot P$? Si volem comprar 25 unitats de A, 30 de B, 60 de C i 75 de D, quina de les fàbriques ens ofereix el millor preu?

SOLUCIÓ [2 punts] Com que la matriu té 4 files i 3 columnes, és clar que cada columna representa la fàbrica i cada fila el producte. Així, una unitat del producte B de la fàbrica 3 té un preu de 12 € (fila 2, columna 3). El producte $C\cdot P$,

$$C\cdot P=\begin{pmatrix}x & y & z & t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}34 & 40 & 36\\ 11 & 8 & 12\\ 23 & 27 & 32\\ 25 & 21 & 30\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}34x+11y+23z+25t & 40x+88+27z+21t & 36x+12y+32z+30t\end{pmatrix}$$

és una matriu fila 1x3 i cada element representa el COST de la comanda en cada fàbrica. Pel cas concret $C=\begin{pmatrix}25 & 30 & 60 & 75\end{pmatrix}$, el cost de la comanda en cada fàbrica és $\begin{pmatrix}4435 & 4435 & 5430\end{pmatrix}$. En conseqüència, tant la fàbrica f1 com la f2 ens ofereixen el millor preu, 4435€.

Puntueu amb 1 punt per donar la interpretació correcta a cada element del producte i 1 punt per la solució correcta.

113. PAU 2005 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 1

QÜESTIONS

1. Donades les matrius $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, on a i b són nombres reals, trobeu els valors de a i b que fan que les dues matrius commutin, és a dir, que fan que es compleixi $A\cdot B=B\cdot A$.

SOLUCIÓ [2 punts] Tenim que $A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & a+b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ i $B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & a+b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Per tant, A i B commuten per a tot a i b.

114. PAU 2005 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 5

PROBLEMES

5. De tres nombres, x, y i z, sabem el següent: que el primer més el segon sumen 0; que el primer més el tercer sumen 1; que la suma de tots tres val 0 i, per últim, ens diuen que el primer multiplicat per un nombre k més el doble de la suma del segon i del tercer dóna 1. Es demana:
a) què podem dir del valor de k?
b) quan valen els tres nombres?

SOLUCIÓ

a) [2 punts] Els nombres han de ser solució del sistema:

$$\begin{cases} x+y & = & 0 \\ x+z & = & 1 \\ x+y+z & = & 0 \\ kx+2(y+z) & = & 1 \end{cases}$$

Podem optar per dos maneres de resoldre el problema. Una és resoldre el sistema format pels tres primeres equacions: $x=1; y=-1; z=0$. Ara, substituint a la quarta equació, tenim que $k=3$.
També podem discutir el sistema segons els valors de k. Si triangulem per Gauss la matriu ampliada del sistema, tindrem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ k & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2-k & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4-k & 3-k \end{array}\right) \to$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4-k & 3-k \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-k \end{array}\right).$$

Es veu clar que, per tal que el sistema sigui compatible, $k=3$.

b) [2punts] Per $k=3$, el sistema es pot resoldre a partir de la matriu triangulada de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x+y & = & 0 \\ -y+z & = & 1 \\ z & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & = & 1 \\ y & = & -1 \\ z & = & 0 \end{cases}$$

115. PAU 2004 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 3

3. Donades les matrius $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ es demana:

a) trobeu una matriu X tal que $A\cdot X=B$;

b) calculeu B^{100}. Raoneu la resposta.

SOLUCIÓ.

a) **[1 punt]** Podem procedir de dues maneres:

Observant que A és invertible, $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -2 & -3\end{pmatrix}$,

$$A\cdot X=B\Rightarrow X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -2 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -3\\ -5 & -5\end{pmatrix}.$$

O bé podem fer $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ i llavors

$$\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}3a-2c=1\\ -2a+c=1\\ 3b-2d=1\\ -2b+d=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-3\\ b=-3\\ c=-5\\ d=-5\end{cases}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}-3 & -3\\ -5 & -5\end{pmatrix}.$$

b) **[1 punt]**

$$B^2=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix};\quad B^3=B^2\cdot B=\begin{pmatrix}4 & 4\\ 4 & 4\end{pmatrix};\quad\cdots\quad B^n=\begin{pmatrix}2^{n-1} & 2^{n-1}\\ 2^{n-1} & 2^{n-1}\end{pmatrix};\quad\Rightarrow B^{100}=\begin{pmatrix}2^{99} & 2^{99}\\ 2^{99} & 2^{99}\end{pmatrix}.$$

Puntueu 0,25 o 0,5 punts si calculen correctament algunes potències de B però no arriben a veure el patró general.

116. PAU 2004 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

QÜESTIONS

1. La matriu ampliada d'un sistema d'equacions lineals, un cop reduïda pel mètode de Gauss, és

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) El sistema, és compatible o incompatible? Raoneu la resposta.
b) En cas que sigui compatible resoleu-lo.

SOLUCIÓ.

a) **[1 punt]** El sistema reduït té dues equacions i tres incògnites. El rang de la matriu del sistema i de la matriu ampliada és 2. Per tant, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

b) **[1 punt]** El sistema reduït és

$$\begin{cases} x + 2y - z &= 0 \\ y + 2z &= 1. \end{cases}$$

Fent servir z com a incògnita secundària, la solució és pot expressar com

$$\begin{cases} x &= 5z - 2 \\ y &= 1 - 2z \\ z &= z. \end{cases}$$

117. PAU 2004 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3

3. Considereu les matrius

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}.$$

Trobeu una matriu X que compleixi $A\cdot X+A=B$.

SOLUCIÓ.

[2 punts] La matriu *X* només pot ser quadrada d'ordre 2. El problema es pot resoldre directament, fent $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ i efectuant $A\cdot X+A$ i igualant a *B*. S'obté el sistema d'equacions:

$$\begin{cases}2a+c=-1\\ a+c=1\\ 2b+d=1\\ b+d=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\ b=0\\ c=3\\ d=1\end{cases}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}.$$

També és pot resoldre directament l'equació matricial:

$$AX+A=B\ \Rightarrow AX=B-A\ \Rightarrow X=A^{-1}(B-A)$$

La inversa de *A* és $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

Ara,

$$X=A^{-1}(B-A)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}.$$

Puntueu 1 punt si es planteja correctament el sistema o s'obté X correctament aïllada. L'altre punt per la resolució correcta.

118. PAU 2004 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 4

4. Considerem els punts de l'espai $A(1,1,0)$, $B(0,1,2)$ i $C(-1,2,1)$. Ens diuen que aquests tres punts formen part del conjunt de solucions d'un sistema de tres equacions lineals amb tres incògnites. Es demana:
a) aquests punts, estan alineats?
b) podem saber el rang de la matriu del sistema d'equacions?
Raoneu adequadament les respostes.

SOLUCIÓ.

a) **[1 punt]** Els tres punts no estan alineats perquè els vectors $A\vec{B}=(-1,0,2)$ i $A\vec{C}=(-2,1,1)$ són linealment independents (no són proporcionals).

b) **[1 punt]** Com que els tres punts no estan alineats, la solució del sistema d'equacions lineals no pot representar una recta. Ha de ser doncs un pla o tot l'espai (aquest últim cas, encara que tèoricament correcte, requeriria que la matriu dels sistema fos de rang 0, o sigui una matriu idènticament 0). Si la solució és un pla, el nombre de graus de llibertat del sistema és 2 i el rang de la matriu del sistema, 1: les tres equacions representen el mateix pla.

119. PAU 2004 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 5

PROBLEMES

5. Donat el sistema

$$\begin{cases} y + z = 2 \\ -2x + y + z = -1 \\ (2-2m)x + (2m-2)z = m-1, \end{cases}$$

on m és un paràmetre, es demana:
a) discutiu el sistema segons els valors de m;
b) resoleu els casos compatibles;
c) en cada un dels casos de la discussió de l'apartat a), feu una interpretació geomètrica del sistema.

SOLUCIÓ.

a) **[1,5 punts]** Si el discutim a través del determinant del sistema,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2-2m & 0 & 2m-2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (m-1);,$$

1) per $m \neq 1$, el sistema és compatible determinat.
2) per $m = 1,$ el sistema queda reduït a dues equacions,

$$\begin{cases} y + z = 2 \\ -2x + y + z = -1, \end{cases}$$

el rang de la matriu del sistema és 2 i, per tant, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

També es pot discutir tot observant que restant la segona equació de la primera s'obté $x = 3/2$. Substituint aquest valor a la tercera equació,

$$3(1-m)+2(m-1)z = m-1 \Rightarrow (m-1)z = 2(m-1).$$

Si $m \neq 1$, $z = 2$ i, substituint a la primera equació, $y = 0$. El sistema té, doncs, solució única: compatible determinat. De passada tenim la solució:

$$x = 3/2; \quad y = 0; \quad z = 2.$$

Si $m = 1$, el valor de *z* queda indeterminat i, de la primera equació, $y = 2 - z$. El sistema té doncs, infinites solucions que depenen del valor de *z*: sistema compatible indeterminat amb un grau de llibertat. Tenim també la solució:

$$x = 3/2; \quad y = 2 - z; \quad z = z.$$

Per últim, també es pot discutir per Gauss. Intercanviem l'ordre de les dues primeres equacions,

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2-2m & 0 & 2m-2 & m-1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{(tot suposant que } m \neq 1\text{)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-m & m-1 & 2m-2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2m-2 & 4m-4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

O sigui que si $m \neq 1$ el sistema és compatible determinat.
El cas $m = 1$ porta a la matriu reduïda,

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ de rang 2.}$$

per tant, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

b) **[1,5 punts]** El cas $m \neq 1$. La solució és $x = 3/2; \quad y = 0; \quad z = 2.$
El cas $m = 1$. La solució és $x = 3/2; \quad y = 2 - z; \quad z = z.$

Puntueu 0,5 punts la resolució del cas determinat i 1 punt la del cas indeterminat.

c) **[1 punt]** Cada equació representa l'equació d'un pla a l'espai.
En el cas $m \neq 1$, els tres plans es tallen en un únic punt.
En el cas $m = 1$, els dos plans que queden es tallen en una recta d'equació paramètrica

$$\begin{cases} x = 3/2 \\ y = 2 - s \\ z = s. \end{cases}$$

Puntueu 0,5 punts cada interpretació.

120. PAU 2003 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 4 (Qüestions)

4. *Per a quin o quins valors del paràmetre real λ el sistema d'equacions*

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + (\lambda + 2)z &= 0 \\ x + (2\lambda)y + 3z &= 9 \\ 2x - z &= 4 \end{aligned}\right\}$$

és compatible i indeterminat?

El determinant de la matriu de coeficients del sistema d'equacions val, per a cada λ,

$$-10\lambda + 14 - 4\lambda^2$$

Aquest determinant només s'anul·la per a $\lambda = 1$ o per a $\lambda = -7/2$. En el cas que $\lambda = 1$ surt un sistema incompatible, en el cas que $\lambda = -7/2$ el sistema és compatible i indeterminat, en tots els altres casos el sistema és compatible determinat.

En aquest exercici valoreu sobretot el coneixement que l'alumne demostri de la resolució de sistemes d'equacions lineals més que el resultat final correcte. Per errors en els càlculs, si la discussió que es fa és coherent amb els resultats obtinguts, no treieu més de mig punt (0.5).

121. PAU 2003 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 4 (Qüestions)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

122. PAU 2000 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3 (Qüestions)

3. (a) Basta afegir una equació incompatible amb qualsevol de les dues donades. Per exemple $3x - 2y + z = 0$.

   (b) Afegim una equació combinació lineal de les dues de l'enunciat. Per exemple, restant-les, $x + y = 1$.

   Compteu un punt per cada apartat.

123. PAU 2000 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 3 (Qüestions)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.