Matemàtiques

Geometria de l'espai

Solucions · 136 exercicis

Proves d'accés a la universitat (PAU) de Catalunya. Ordenats del més recent al més antic.
Retalls dels exàmens i pautes oficials (selecat.cat / universitats.gencat.cat).

1. PAU 2026 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 4 (Opció B)

OPCIÓ B

4.1

Podem trobar el quart vèrtex de la tapa, D, de diverses maneres. Per exemple:

$$D = B + \overrightarrow{AC} = (4,1,5) + (0,9,0) = (4,10,5).$$

La tapa és un rectangle. La llargada serà la distància entre el punt A i el punt B:

$$d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} = 5\ u.$$

I l'amplada serà la distància entre el punt A i el punt C:

$$d(A,C) = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{0^2 + 9^2 + 0^2} = 9\ u.$$

L'Aina ha fet el croquis d'una caixa rectangular amb dos costats de 5 i 9 unitats, respectivament.

4.2

Sabem que el pla inferior π, paral·lel al pla de la tapa, té per equació $-4x + 3z = 24$. Per tant, l'alçada de la caixa és la distància de qualsevol dels punts de la tapa, per exemple el punt A, al pla π

$$d(A,\pi) = \frac{|-4 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 24|}{\sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 3^2}} = \frac{|-25|}{5} = 5\ u.$$

Per tant, la caixa mesura 5 unitats d'alçada. Per a calcular el vèrtex sota del punt A, només hem de projectar A perpendicularment al pla π: la recta perpendicular a π passant per A és

$$(x,y,z) = (1,1,1) + \lambda(-4,0,3).$$

Per tant, la projecció A' del punt A al pla π serà la intersecció d'aquesta recta amb el pla π:

$$-4(1 - 4\lambda) + 3(1 + 3\lambda) = 24 \ \rightarrow\ 25\lambda - 1 = 24 \ \rightarrow\ \lambda = 1.$$

Es tracta, doncs, del punt $A' = (1,1,1) + (-4,0,3) = (-3,1,4)$.

2. PAU 2026 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4 (Opció B)

OPCIÓ B.

4.1.

Comencem trobant els vectors $\overrightarrow{PQ} = (2, -2, 1)$ i $\overrightarrow{PR} = (0, 1, 2)$. El vector normal al pla buscat és

$$\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4i + 2k - i - 4j = (-5, -4, 2).$$

Així doncs el pla buscat té equació de la forma $5x + 4y - 2z + D = 0$. Substituint les coordenades del punt R a l'equació anterior deduïm $D = -7$ i, per tant, l'equació buscada és

$$\pi\colon\ 5x + 4y - 2z - 7 = 0.$$

4.2.

i pensem el triangle ΔPQR amb base PQ, aquesta mesura

$$d(P, Q) = \sqrt{(3-1)^2 + (-2-0)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Per altra banda, la recta $\overline{PQ}$ té equació

$$(x, y, z) = (1, 0, -1) + \lambda(2, -2, 1) = (1 + 2\lambda, -2\lambda, -1 + \lambda),$$

i vector director $(2, -2, 1)$. Per tant, el pla perpendicular que passa per R té equació de la forma $2x - 2y + z + D = 0$, amb $2 - 2 + 1 + D = 0 \longrightarrow D = -1$. I la projecció de R sobre la recta $\overline{PQ}$ serà la intersecció del pla $2x - 2y + z - 1 = 0$ amb la recta $\overline{PQ}$, és a dir

$$2(1 + 2\lambda) - 2(-2\lambda) + (-1 + \lambda) - 1 = 0 \longrightarrow 9\lambda = 0 \longrightarrow \lambda = 0,$$

és el punt $(1,0,-1)$ (és casualitat que sigui P; això vol dir que l'angle $\widehat{RPQ}$ és recte). Així l'àrea del triangle ΔPQR és

$$\text{Àrea}(PQR) = \frac{base \cdot alçada}{2} = \frac{d(P,Q) \cdot d(P,R)}{2} = \frac{3 \cdot \sqrt{(1-1)^2 + (1-0)^2 + (1+1)^2}}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}\ u^2.$$

Alternativament, també podem calcular l'àrea més ràpidament, aprofitant el producte vectorial de l'apartat anterior i la fórmula

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-5)^2 + (-4)^2 + 2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{45} = \frac{3}{2}\sqrt{5}\ u^2.$$

4.3.

El volum del tetraedre determinat pels punts P, Q, R, S és

$$Volum(PQRS) = \frac{\text{Àrea}(PQR) \cdot \text{ alçada}}{3} = \frac{\frac{3\sqrt{5}}{2} \cdot d(S, \pi)}{3}.$$

Com que la distància del punt $S = (x, y, z)$ al pla $\pi: 5x + 4y - 2z - 7 = 0$ és

$$d(S, \pi) = \frac{|5x + 4y - 2z - 7|}{\sqrt{5^2 + 4^2 + (-2)^2}} = \frac{|5x + 4y - 2z - 7|}{\sqrt{45}},$$

el lloc geomètric dels punts S tals que el tetraedre format per P, Q, R, S tingui volum 1 ve donat per

$$\frac{\frac{3\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{|5x + 4y - 2z - 7|}{3\sqrt{5}}}{3} = 1,$$

$$5x + 4y - 2z - 7 = \pm 6,$$

és a dir, són dos plans paral·lels al pla π, d'equacions

$5x + 4y - 2z - 1 = 0, \quad i \quad 5x + 4y - 2z - 13 = 0.$

Criteris de correcció: (4.1) Compteu 0,75 punts pel càlcul de l'equació correcta del pla. **(4.2)** Compteu 0,5 punts pel càlcul de la base i l'alçada del triangle, i 0,25 per l'àrea. **(4.3)** Compteu 0,5 punts pel planteig i desenvolupament del problema; 0,25 per tractar correctament el valor absolut i 0,25 per les equacions dels dos plans finals.

3. PAU 2026 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 4 (Opció B)

OPCIÓ B.

4.1. Calculem la distància entre els punts $\boldsymbol{A(1,2,3)}$ i $\boldsymbol{B(5,3,7)}$:

$$d(A,B) = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \|(4,1,4)\| = \sqrt{4^2+1^2+4^2} = \sqrt{33} \approx 5{,}74\ cm.$$

Per tant, el sensor ha recorregut 5,74 cm.

4.2. Hem de calcular la distància del punt $\boldsymbol{B}$ al pla $\boldsymbol{\pi}$, $\boldsymbol{d(B,\pi)}$. Per fer-ho, necessitem l'equació general del pla:

$$\begin{vmatrix} x-6 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff x-6-(y-1)=0 \iff x-y-5=0.$$

Aplicant la fórmula de la distància punt-pla, obtenim

$$d(B,\pi) = \frac{|1\cdot 5 - 1\cdot 3 + 0 - 5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2{,}12\ cm.$$

4.3. Per trobar el punt de xoc, hem de buscar el punt de tall del pla $\boldsymbol{\pi}$ amb la recta que passa per $\boldsymbol{A}$ i per $\boldsymbol{B}$. Primer explicitem l'equació d'aquesta recta:

$$(x,y,z) = (1,2,3) + \lambda(4,1,4) = (1+4\lambda, 2+\lambda, 3+4\lambda),$$

i ara busquem el punt en comú imposant l'equació del pla:

$$1+4\lambda-(2+\lambda)-5=0,$$

d'on $3\lambda - 6 = 0$ i $\lambda = 2$. Això vol dir que el punt de xoc és

$$(x,y,z) = (1,2,3) + 2(4,1,4) = (9,4,11).$$

Criteris de correcció: (4.1.) Compteu 0,5 pel càlcul de la distància entre els dos punts. **(4.2.)** Compteu 0,5 per trobar l'equació general del pla i 0,5 pel càlcul de la distància. **(4.3.)** Compteu 0,5 per l'equació de la recta i 0,5 pel càlcul del punt intersecció.

4. PAU 2025 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 4 (Opció B)

4. OPCIÓ B. a) Només cal aplicar la fórmula de la distància punt-pla per comprovar que

$$d(P,\pi) = \frac{|2\cdot 0 - 1 + 3 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

b) Tot pla paral·lel a π és de la forma $2x - y + z = D$ per algun D real. Com que volem que passi pel punt P tenim

$$2\cdot 0 - 1 + 3 = D$$

i, per tant, $D = 2$. El pla buscat és $\pi_1: 2x - y + z = 2$. Clarament la distància entre π_1 i π és $d(\pi_1,\pi) = d(P,\pi) = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

c) Per trobar un segon pla π_2 també paral·lel a π i que també estigui a distància $\frac{\sqrt{6}}{2}$ de π, buscarem el punt simètric, P', de P respecte al pla π. Busquem la recta perpendicular a π que passa pel punt P. L'equació paramètrica d'aquesta recta és

$$r: (x,y,z) = (0,1,3) + \lambda\cdot(2,-1,1) = (2\lambda, 1-\lambda, 3+\lambda).$$

Busquem el punt d'intersecció M de la recta r amb el pla π:

$$\begin{gathered} 2\cdot(2\lambda) - (1-\lambda) + 3 + \lambda = 5 \\ 6\lambda = 3 \\ \lambda = \frac{1}{2}. \end{gathered}$$

Per tant, $M = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$. Ara ens cal trobar el punt simètric P' de P respecte de π, fent per exemple $P' = P + 2\overrightarrow{PM} = (0,1,3) + 2\cdot\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (2,0,4)$.

Finalment el pla buscat és de la forma $2x - y + z = E$ per algun E real i passa per P', així doncs,

$$2\cdot 2 - 0 + 4 = E,$$

i $E = 8$. Tenim doncs que π_2 és el pla d'equació $2x - y + z = 8$.

Alternativament, també poden plantejar l'equació de la distància d'un pla paral·lel genèric, a un punt qualsevol de π i demanar que sigui $\sqrt{6}/2$. Una solució serà el π_1 i l'altra el pla buscat π_2. Compteu bé aquesta manera alternativa si està ben justificada i calculada.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,5 per la comprovació que la distància és la que diu l'enunciat (inclosa la simplificació de la fracció amb arrels). **(b)** Compteu 0,5 per l'equació del pla paral·lel i 0,25 per argumentar que la distància és la mateixa. **(c)** Compteu 0,5 pel càlcul de la projecció, 0,5 pel càlcul del punt simètric, i 0,25 per l'equació final del pla.

5. PAU 2025 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4 (Opció B)

4. OPCIÓ B. a) El pla π' que busquem té vectors directors $(1,1,0)$ i $\overrightarrow{PQ} = (3,\ -3,6) - (1,-1,2) = (2,-2,4) \sim (1,\ -1,2)$. Fent-lo passar pel punt P, serà el pla d'equació:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2x - 2 - z + 2 - z + 2 - 2y - 2 = 0$$

és a dir, $2x - 2y - 2z = 0$; o, simplificant, $x - y - z = 0$.

b) La recta que ens demanen és la intersecció del pla π' amb el pla perpendicular a $\overrightarrow{PQ} \sim (1,-1,2)$ que passa pel punt mig:

$$M = \frac{P+Q}{2} = \frac{1}{2}(4,-4,8) = (2,-2,4).$$

Aquest pla té equació $x - y + 2z = D$ amb $D = 2 - (-2) + 2 \cdot 4 = 12$; és a dir, $x - y + 2z = 12$. Per tant, la recta demanada és:

$$\left.\begin{matrix} x - y - z = 0 \\ x - y + 2z = 12 \end{matrix}\right\}.$$

Com que restant obtenim $z = 4$, es tracta de la recta:

$$(x,y,z) = (k+4,k,4) = (4,0,4) + k(1,1,0).$$

Criteris de correcció: a) Compteu 0,5 punts per plantejar correctament el problema i 0,5 pel càlcul de l'equació. **b)** Compteu 0,75 p. per calcular l'equació del pla perpendicular a $\overline{PQ}$ passant pel punt mig, i 0,75 p. per l'equació paramètrica de la recta intersecció amb π'.

6. PAU 2024 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 6

(a) Per ser perpendicular a π, la recta r tindrà com a vector director $\vec{v} = (1,2,-2)$. I, com que ha de passar per $P = (1,3,0)$, es tracta de la recta $(x,y,z) = (1,3,0) + \lambda(1,2,-2) = (1+\lambda, 3+2\lambda, -2\lambda)$. Imposant l'equació del pla π, obtenim

$$1 + \lambda + 2(3+2\lambda) - 2(-2\lambda) = -7,$$

$$9\lambda + 7 = -7,$$

és a dir, $\lambda = -\frac{14}{9}$. Això correspon al punt $Q = \left(1 - \frac{14}{9},\ 3 - \frac{28}{9},\ \frac{28}{9}\right) = \left(\frac{-5}{9},\ \frac{-1}{9},\ \frac{28}{9}\right)$.

(b) Com que el punt Q que hem calculat és la projecció ortogonal de P sobre el pla π, la distància demanada és

$$d(P,\pi) = d(P,Q) =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{-5}{9} - 1\right)^2 + \left(\frac{-1}{9} - 3\right)^2 + \left(\frac{28}{9} - 0\right)^2} = \frac{1}{9}\sqrt{14^2 + 28^2 + 28^2} = \frac{42}{9} = \frac{14}{3}.$$

Alternativament, la podem calcular amb la fórmula de la distància punt-pla:

$$d(P,\pi) = \frac{|1 + 2\cdot 3 - 2\cdot 0 + 7|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{14}{3}.$$

(c) Per ser paral·lel, π' haurà de tenir equació de la forma $x + 2y - 2z = D$. I imposant que la distància a $P = (1,3,0)$ també sigui de $\frac{14}{3}$ obtenim

$$\frac{14}{3} = d(P,\pi') = \frac{|1 + 2\cdot 3 - 2\cdot 0 - D|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|7 - D|}{3},$$

és a dir, $|7 - D| = 14,\ 7 - D = \pm 14,\ D = 7 \mp 14 = \begin{cases} -7 \\ 21 \end{cases}$. El valor $D = -7$ correspon al pla π que ja coneixem, i l'altre pla π' demanat serà el d'equació $x + 2y - 2z = 21$.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0.5 per la parametrització de la recta r, 0.25 per imposar l'equació del pla π, i 0.25 pel càlcul final. (b) Compteu 0.5 pel càlcul de la distància (per qualsevol dels dos mètodes). (c) Compteu 0.5 per imposar l'equació (amb el valor absolut tractat correctament), i 0.5 per aïllar D i donar la resposta.

Comentaris: L'apartat (a) es pot fer també trobant primer l'equació cartesiana de la recta r i després fent el sistema d'equacions amb el pla π. Compteu-ho bé, en la mesura que el que facin sigui correcte i estigui ben explicat.

7. PAU 2024 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 6

6.

a)

[1 punt]

El pla buscat ha de ser perpendicular al vector $\overrightarrow{AB} = (-3,-2,3) - (1,2,3) = (-4,-4,0) \sim (1,1,0)$, per tant, té equació de la forma $x + y + 0z + D = 0$. A més, ha de passar pel punt mitjà $\frac{1}{2}(A + B) = (-1,0,3)$; per tant, $-1 + D = 0$ i es tracta del pla d'equació $x + y + 1 = 0$.

Geomètricament és clar que aquest pla π està format, precisament pels punts a igual distància de A que de B. Efectivament, per a un punt arbitrari $P = (x,y,z)$, l'equació $d(P,A) = d(P,B)$ és equivalent a

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2},$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 6z + 9 = x^2 + 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 6z + 9,$$

$$-2x + 1 - 4y = 6x + 9 + 4y,$$

$$-8x - 8y - 8 = 0$$

que simplificant-la és, precisament, l'equació del pla π, $x + y + 1 = 0$.

b)

[0,75 punts]

Usant la fórmula de la distància punt-pla, tenim

$$d(A,\pi) = \frac{|1+2+1|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}, \qquad d(B,\pi) = \frac{|-3-2+1|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}.$$

No és casualitat que doni el mateix resultat: les projeccions ortogonals de A i de B al pla π són, precisament el punt mitjà $\frac{1}{2}(A + B) = (-1,0,3)$ per on hem fet passar el pla π, perpendicular al vector $\overrightarrow{AB}$.

c)

[0,75 punts]

El punt $C = (-7,6,3)$ compleix $-7 + 6 + 1 = 0$ i per tant pertany al pla π de l'apartat anterior. Això vol dir que $d(C,A) = d(C,B)$ i, per tant, el triangle ABC té almenys dos costats iguals; per tant, és isòsceles.

Per calcular la seva àrea només necessitem la longitud de la base $d(A,B) = 2\frac{4}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$, i la seva alçada, que és la distància de C al punt mitjà entre A i B:

$$h = d\big((-7,6,3),(-1,0,3)\big) = \sqrt{6^2+6^2+0^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}.$$

Per tant el triangle ABC té àrea

$$\text{Àrea} = \frac{4\sqrt{2}\cdot 6\sqrt{2}}{2} = 24\ u^2.$$

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,5 per calcular l'equació del pla π, i 0,5 per justificar que es tracta exactament dels punts equidistants d'A i de B. (b) Compteu 0,25 per calcular les dues distàncies, i 0,5 per reconèixer que no és casualitat i explicar el motiu pel qual són iguals. (c) Compteu 0,25 per raonar que el triangle és isòsceles, 0,25 per calcular l'alçada, i 0,25 per calcular la longitud de la base i l'àrea final.

Comentaris: Poden argumentar que el triangle és isòsceles calculant directament la longitud dels tres costats i veient que dues coincideixen; compteu-ho bé si ho fan així, en la mesura que el que facin sigui correcte i estigui ben argumentat.

8. PAU 2023 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 5

A partir de les equacions contínues de l'enunciat podem escriure les rectes r_1 i r_2 en forma vectorial i paramètrica:

$$r_1: (x, y, z) = (1,0,0) + \lambda\,(1,1,-1) = (1\ +\ \lambda\,, \lambda, -\lambda\,)$$

$$r_2: (x, y, z) = (0,0,0) + \mu\,(1,1,1) = (\mu, \mu, \mu\,)$$

Un vector qualsevol $\overrightarrow{A_1A_2}$ format en prendre $A_1 \in r_1$, $A_2 \in r_2$ vindrà expressat en termes de $\overrightarrow{A_1A_2} = (\mu - \lambda - 1,\ \mu - \lambda,\ \mu + \lambda\,)$ amb $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$.

La recta que passi per A_1 i A_2 tallarà r_1 i r_2 perpendicularment si el vector $\overrightarrow{A_1A_2}$ és perperndicular als vectors directors de cada recta, és a dir si es compleixen les condicions següents:

$$\overrightarrow{A_1A_2} \perp (1,1,-1) \ \rightarrow\ (\mu - \lambda - 1, \mu - \lambda, \mu + \lambda\,) \cdot (1,1,-1) = 0$$

$$\overrightarrow{A_1A_2} \perp (1,1,1) \ \rightarrow\ (\mu - \lambda - 1, \mu - \lambda, \mu + \lambda\,) \cdot (1,1,1) = 0.$$

Efectuant els dos productes escalars les condicions anteriors es converteixen en el sistema d'equacions:

$$\mu - 3\lambda - 1 = 0$$

$$3\mu - \lambda - 1 = 0$$

Si a la segona equació li restem 3 vegades la primera obtenim $8\lambda = -2$ i per tant $\lambda = \frac{-1}{4}$, i quan substituïm en la primera obtenim $\mu = 1 + 3\lambda = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

Així els punts respectius de cada recta són: $A_1 = \left(\frac{3}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ i $A_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

La recta que uneix aquests punts és la perpendicular que talla totes dues rectes i tindrà vector director $\overrightarrow{A_1A_2} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \approx (-1,1,0)$ i equació vectorial

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) + \alpha\,(-1,1,0)$$

I, per tant, l'equació paramètrica serà

$$\boxed{(x, y, z) = \left(\frac{1}{4} - \alpha, \frac{1}{4} + \alpha, \frac{1}{4}\right), amb\ \alpha\ \in \mathbb{R}}$$

b)

Aplicant l'apartat anterior tenim que

$$d\,(r_1, r_2) = d\,(A_1, A_2) = \|\overrightarrow{A_1A_2}\| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\,u}.$$

Observació: Amb independència de l'apartat a) aquest apartat b) es pot resoldre aplicant sigui la fórmula general per a la distància entre dues rectes o bé via la distància entre una recta i llur projecció perpendicular sobre l'altra.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per les expressions de r_1 i r_2.
0,25 punts pel vector $\overrightarrow{A_1A_2}$.
0,5 punts per la condició doble perpendicularitat.
0,5 punts pel càlcul de A_1 i A_2.
0,25 punts per l'equació de la recta final.

b) 0,25 punts pel plantejament de la distància entre les rectes.
0,5 punts pel càlcul de la distància

9. PAU 2023 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 6

Resolució:

a) Com que el pla buscat és perpendicular a π_1 i π_2, els seus vectors directors seran els vectors normals de π_1 i π_2: $\overrightarrow{v_1} = (1,1,0)$ i $\overrightarrow{v_2} = (1,0,-1)$.

Trobem l'equació general del pla amb vectors directors $\overrightarrow{v_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$ i que passa pel punt $P = (4,1,2)$, en què $X(x,y,z)$ és un punt genèric del pla:

$$\begin{vmatrix} x-4 & 1 & 1 \\ y-1 & 1 & 0 \\ z-2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \boxed{x-y+z-5=0}$$

b) Busquem la solució del sistema $\begin{cases} x+y=3 \\ x-z=-2 \end{cases}$. Aïllant obtenim:

$$\begin{matrix} y = 3-x \\ z = 2+x \end{matrix} \rightarrow Si\ x=\lambda, \text{ tenim: } \begin{cases} x=\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}$$

La recta buscada en forma vectorial és:

$$\boxed{r: (x,y,z) = (0,3,2) + \lambda \cdot (1,-1,1), \lambda \in \mathbb{R}}$$

c)

Trobem l'equació del pla perpendicular a la recta r i que passa pel punt P. Aquest és el pla que ens han demanat en l'apartat *a*: $x-y+z-5=0$.

En cas que no ens adonem que ja tenim el pla d'un apartat anterior, aquest pla tindrà com a vector normal el vector director de la recta. Per tant, serà de la forma:

$x-y+z+D=0$.

Imposem que P estigui contingut en el pla: $4-1+2+D=0 \rightarrow D=-5$.

Ara hem de calcular el punt de tall de la recta L i el pla:

$$\begin{cases} x=\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases} \text{ i } x-y+z=5 \rightarrow \lambda-(3-\lambda)+(2+\lambda)=5 \rightarrow \lambda=2$$

Substituint $\lambda=2$ en les equacions paramètriques de la recta obtenim el punt : $\boxed{Q=(2,1,4)}$.

De forma alternativa:

El punt Q és la projecció ortogonal del punt P sobre la recta r, ja que és el punt que està a menor distància de P.

Sigui Q un punt genèric de la recta r: $Q = (\lambda, 3 - \lambda, 2 + \lambda)$ i $\vec{v} = (1, -1, 1)$ el vector director de L.

Per la condició d'ortogonalitat tenim que $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = 0$:

$$(-4 + \lambda, 2 - \lambda, \lambda) \cdot (1, -1, 1) = 0 \rightarrow -4 + \lambda - 2 + \lambda + \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 2$$

Substituint $\lambda = 2$ al punt genèric Q obtenim les coordenades del punt: $\boxed{Q = (2, 1, 4)}$.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts pels vectors directors.

0,25 punts per indicar com trobar el pla.

0,25 punts pel càlcul de l'equació.

b) 0,25 punts per formular la resolució del sistema.

0,5 punts per trobar l'equació.

c) 0,25 punts per indicar que el punt buscat és la projecció ortogonal.

0,25 punts pel punt genèric / per plantejar el sistema entre el pla i la recta.

0,25 punts pel producte escalar / per resoldre el sistema.

0,25 punts per trobar el punt.

10. PAU 2023 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 3

a)

Determinem el vector director i un punt de cada recta:

$$r: x = -y = z + m \rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1,-1,1) \\ P(0,0,-m) \end{cases} \quad s: \left.\begin{matrix} x + y = 1 \\ x - z = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_s} = (1,1,0) \times (1,0,-1) = (-1,1,-1) \\ x = 1 \Rightarrow Q(1,0,1) \end{cases}$$

Com que $\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_s}$ els vectors directors de *r* i *s* són linealment dependents i les rectes seran o bé coincidents o bé paral·leles. Si són coincidents tenen tots els punts en comú, en concret $Q \in s$.

Comprovem si $Q \in r$: $1 \neq -0 = 1 + m$

Com que no se satisfà per cap valor de *m*, podem assegurar que les rectes sempre seran paral·leles independentment de *m*.

b)

Calculem la distància entre les dues rectes:

$$d(P,S) = \frac{\left|\overrightarrow{v_s} \times \overrightarrow{PQ}\right|}{|v_s|} = \frac{\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1+m \end{vmatrix}}{\sqrt{3}} = \frac{|(1+m,m,-1)|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{(1+m)^2 + m^2 + 1}}{\sqrt{3}}$$

Calculem el valor de *m* per tal que sigui $\sqrt{2}$:

$$d(P,S) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(1+m)^2 + m^2 + 1} = \sqrt{2}\sqrt{3} \Leftrightarrow (1+m)^2 + m^2 + 1 = 6 \Leftrightarrow 2m^2 + 2m - 4 = 0$$

D'on s'obtenen les solucions $m = 1$ i $m = -2$.

a) 0,75 punts per determinar que les rectes són coincidents o paral·leles.
0,5 punts per justificar que són paral·leles per tot *m*.

b) 0,75 punts per obtenir correctament la distància entre les dues rectes.
0,5 punts per resoldre correctament l'equació i determinar els dos valors de *m*.

11. PAU 2022 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 1

a) El pal estarà contingut en la recta que passa pel punt $P = (30, 1, 0)$ i que té per direcció el vector normal al pla del terra $\vec{n} = (1, 0, -1)$.

Per tant, l'equació paramètrica és:

$$\boxed{r: \begin{cases} x = 30 + k \\ y = 1 \\ z = -k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}}$$

b) Necessitem el punt $Q = r \cap \pi$, intersecció de la recta anterior amb el pla del terra. Si substituïm l'equació paramètrica de la recta en l'equació del pla, tenim:

$$30 + k - (-k) = 6 \implies 30 + 2k = 6 \implies k = -12.$$

El punt de la base serà: $\boxed{Q = (18,1,12)}$.

I la longitud del pal és:

$$d(P, Q) = \left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \|Q - P\| = \|(-12,0,12)\| = 12 \cdot \|(-1,0,1)\|$$
$$= 12 \cdot \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \boxed{12\sqrt{2} \text{ unitats de longitud}}$$

Observació: aquesta distància també es pot trobar calculant la distància del punt *P* al pla π.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per la identificació del vector normal del pla.

0,25 punts pels elements que defineixen la recta que conté el pal.

0,5 punts per l'equació paramètrica.

b) 0,5 punts pel plantejament de trobar la intersecció de la recta que conté el pal amb el pla del terra.

0,5 punts pel càlcul del punt.

0,5 punts pel càlcul de la norma del vector (o equivalent).

12. PAU 2022 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 3

Resolució:

a)

Comprovem si la recta r es troba continguda en el pla substituint el punt

$P(2,-1,3)\ \epsilon\ r$ en l'equació del pla π: $2-2\cdot(-1)+4\cdot 3-4=12\neq 0$; llavors no està continguda al pla.

Comprovem si la recta és paral·lela al pla. El producte escalar del vector normal al pla i el vector director de la recta hauria de ser nul ja que serien perpendiculars: $(1,3,1)\cdot(1,-2,4)=1-6+4\neq 0$; llavors no són paral·lels.

Així doncs, $\boxed{\text{la recta } r \text{ és secant al pla } \pi}$.

El punt de tall entre la recta i el pla es pot calcular substituint x, y i z de la recta dins l'equació del pla:

$$(2+\lambda)-2(-1+3\lambda)+4(3+\lambda)-4=0$$

$$2+\lambda+2-6\lambda+12+4\lambda-4=0\rightarrow -\lambda+12=0\rightarrow \lambda=12$$

El punt de tall és: $(2+12,-1+3\cdot 12,3+12)=\boxed{(14,35,15)}$.

Observació: També es pot plantejar directament el sistema format per la recta i el pla per trobar la intersecció, estudiar-lo i resoldre'l.

b)

L'equació de la recta s perpendicular al pla π i que talli la recta r en el punt P té per vector director el vector normal al pla: $\vec{v}=(1,-2,4)$.

El punt P ha de satisfer que:

$$2+\lambda=5\cdot(-1+3\lambda)\rightarrow 2+\lambda=-5+15\lambda\rightarrow 7=14\lambda\rightarrow\lambda=\frac{1}{2}$$

Llavors el punt P és $(2+1/2,-1+3/2,3+1/2)=(5/2,1/2,7/2)$ i la recta és:

$$\boxed{(x,y,z)=(5/2,1/2,7/2)+\mu(1,-2,4)}$$

S'accepta l'equació de la recta en qualsevol format que també sigui correcte.

Pautes de correcció:

a) 0,75 punts per la posició relativa de la recta i el pla.
0,5 punts per calcular el punt de tall de la recta i el pla.

b) 0,25 punts per identificar el vector director de la recta s.
0,25 punts per formular el càlcul del punt.
0,25 punts per trobar el punt P.
0,5 punts per l'equació de la recta.

13. PAU 2022 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 5

a)

Per a trobar els tres punts alineats calculem els vectors

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1,1,0)$$
$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-1,-1,0)$$
$$\overrightarrow{AD} = D - A = (1,0,0)$$

i com que $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC} \nparallel \overrightarrow{AD}$, els tres punts alienats són: A, B i C.

La recta que defineixen està determinada, per exemple, pel punt $A = (0,0,1)$ i el vector director $\overrightarrow{AB} = (1,1,0)$. Per tant:

$$\text{Equació contínua: } r_{AB}: x = y = \frac{z-1}{0}$$

$$\text{Equació paramètrica: } r_{AB}: \begin{cases} x = k \\ y = k, \\ z = 1 \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

b)

Busquem el pla π determinat pels punts A, B i D: el punt *A* i els vectors directors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$ determinen el pla. Si $X = (x, y, z)$ és un punt genèric del pla π tindrem

$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolupant el determinant per Sarrus:

$$\pi: -(z-1) = 0$$

Per tant l'equació general del pla és: $\pi: z = 1$.

Observació: De forma equivalent es pot trobar l'equació a partir del vector normal al pla $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (0,0,-1)$.

14. PAU 2021 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 3

a)

Quatre punts són coplanaris si pertanyen al mateix pla. Considerem els tres vectors que tenen origen en un dels punts, per exemple, el punt B i extrem en cada un dels altres tres punts:

$\overrightarrow{BA} = (3,1,0)$, $\overrightarrow{BC} = (4,1,1)$ i $\overrightarrow{BD} = (1,1,t-1)$

Per a que els quatre punts siguin coplanaris, cal que aquests tres vectors siguin linealment dependents, és a dir:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & t-1 \end{vmatrix} = 3t - 3 + 1 - (3 + 4t - 4) = -t - 1 = 0 \rightarrow t = -1$$

Així per $t = -1$ els quatre punts donats són coplanaris.

b)

Per $t \neq -1$, els quatre punts no són coplanaris, per tant, formaran un tetraedre.

Per calcular-ne el volum fem servir la fórmula $V = \frac{1}{6}\left|det\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right)\right|$:

$$\text{Així, } V = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & t-1 \end{vmatrix}\right| = \frac{|-t-1|}{6}$$

Atès que volem trobar t tal que $V = 5u^3$ tenim que:

$$V = \frac{|-t-1|}{6} = 5 \rightarrow |-t-1| = 30 \rightarrow \begin{cases} -t-1 = 30 \\ -t-1 = -30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = -31 \\ t = 29 \end{cases}$$

De manera que tenim dues solucions: $t = -31$ i $t = 29$.

Pautes de correcció:

a) 0,5 punts pel plantejament, on s'indiqui la condició per a que quatre punts siguin coplanaris.

0,5 punts per la solució.

b) 0,5 punts pel plantejament, on s'associï el volum a la fórmula donada.

0,5 punts pel volum en funció de t.

0,5 punts per a les dues solucions.

15. PAU 2021 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 3

3.

a)

[1,25 punts]

L'equació de la recta perpendicular al pla $x = y$ que passa pel punt $(-1, 3, 1)$ té com a vector director $(1, -1, 0)$, per tant l'equació és:

$$(x, y, z) = (-1, 3, 1) + t(1, -1, 0) = (-1 + t, 3 - t, 1)$$

Fem la intersecció d'aquesta recta amb el pla i trobarem M, el punt mig del segment PP':

$$x = y \rightarrow -1 + t = 3 - t \rightarrow t = 2\ ; \quad M = (1, 1, 1)$$

Finalment, $M = \frac{P+P'}{2} \rightarrow P' = 2M - P = (2 + 1, 2 - 3, 2 - 1) = (3, -1, 1)$

b)

[1,25 punts]

El vector normal al pla que ens demanen és perpendicular a la recta r i també ha de ser perpendicular al pla π. El calculem fent el producte vectorial:

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 - 3\vec{e}_3 + \vec{e}_1 \rightarrow (1, 1, -5)$$

L'equació del pla és $x + y - 5z + D = 0$ i si imposem que ha de passar pel punt $(1, 0, 2)$ determinem el terme independent D:

$$1 - 10 + D = 0 \rightarrow D = 9$$

Finalment, l'equació del pla demanat és $x + y - 5z + 9 = 0$

Pautes de correcció:

a) 0,5 punts pel plantejament, on s'expliqui com es calcula el punt simètric.

0,25 punts per la recta perpendicular.

0,25 punts pel punt mig.

0,25 punts per la solució.

b) 0,5 punts pel plantejament.

0,25 punts pel vector normal al pla.

0,5 punts per l'equació cartesiana del pla.

En cas de resoldre qualssevol dels apartats per estratègies diferents a les donades en aquestes pautes també es considerarà correcte.

16. PAU 2021 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 3

[2,5 punts]

a)

Per a què els punts siguin coplanaris el determinant dels vectors $\overrightarrow{\mathrm{DA}}, \overrightarrow{\mathrm{DB}}, \overrightarrow{\mathrm{DC}}$ ha de ser 0, per tant:

$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1 + 2a + a) - (1 + 2 + a^2) = 0$, o sigui $a^2 - 3a + 2 = 0$,

i, per tant, $a = 1$ o bé $a = 2$.

Pel valor $a = 1$, els punts A i C són el mateix, en canvi per $\boxed{a = 2}$ tots els punts són diferents.

b)

Utilitzem la fórmula de l'àrea del triangle a l'espai: $S = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} \right\|$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (1, -1, 1) \times (0, -1, 0) = (1, 0, -1)$ i per tant l'àrea és $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\ u^2}$.

a)

0,25 punts pel plantejament del determinant.

0,25 punts pel càlcul del determinant.

0,5 punts per les solucions possibles.

0,25 punts per la justificació del valor $a = 2$.

b)

0,25 punts pel càlcul dels dos vectors.

0,5 punts per càlcul del producte vectorial.

0,25 punts per la norma.

0,25 punts per la superfície.

2. Un avió es desplaça des d'un punt $A = (0,3,1)$ cap a una plataforma plana d'equació $\pi: x - 2y + z = 1$ seguint una recta r paral·lela al vector $v = (1,-1,0)$.
   a) Calculeu les coordenades del punt de contacte B de l'avió amb el pla i la distància recorreguda.
   [1,25 punts]
   b) Calculeu l'equació general del pla perpendicular a la plataforma i que conté a la recta r seguida per l'avió des del punt A.
   [1,25 punts]

Resolució:

a) L'equació paramètrica de la recta r és

$$(x, y, z) = (0,3,1) + \lambda\,(1,-1,0) = (\lambda, 3 - \lambda, 1).$$

Per a trobar el punt de contacte cal trobar la intersecció de la recta r amb el pla π:

$$\lambda - 2 \cdot (3 - \lambda) + 1 = 1$$
$$\lambda - 6 + 2\lambda + 1 = 1$$

d'on deduïm que $\lambda = 2$. Per tant, el punt de contacte buscat és $\boxed{B = (2,1,1)}$.

Finalment per a calcular la distància demanada apliquem la fórmula de la distància entre dos punts, els punt $A = (0,3,1)$ i el punt $B = (2,1,1)$, i obtenim

$$dist(A,B) = \sqrt{2^2 + (1-3)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{8} = \boxed{2\sqrt{2}\,u}$$

b) El pla buscat conté com a vectors directors el vector $v = (1,-1,0)$ (vector director de la recta r) i un vector normal al pla π, $n = (1,-2,1)$. Per tant, per a obtenir un vector normal al pla buscat calculem

$$n \times v = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ i & j & k \end{vmatrix} = (1,1,1)$$

Per tant, el pla buscat té equació de la forma $x + y + z = k$ on k és un paràmetre real. Com que el punt A pertany al pla buscat, tenim $0 + 3 + 1 = k$ i, per tant, l'equació demanada del pla és $\boxed{x + y + z = 4}$.

Observació: Qualsevol altra manera equivalent i correcta serà també donada per resposta correcta.

a) 0,25 punts per l'equació paramètrica (o equivalent) de la recta *r*.
   0,25 punts pel punt intersecció de la recta i el pla.
   0,25 punts pel plantejament de la distància.
   0,25 punts pel vector entre els dos punts.
   0,25 punts per la distància final.
b) 0,25 punts pels elements del pla.
   0,25 punts pel vector normal del pla.
   0,25 punts pel plantejament de l'equació el pla.
   0,25 punts pel càlcul del valor del terme independent.
   0,25 punts per l'equació general del pla.

6. Siguin les rectes *r* i *s*, expressades per $\frac{x-3}{2} = y = z - 1$ i $(\mu, -\mu, \mu)$, respectivament.
   a) Determineu la posició relativa de les rectes.
   [1,25 punts]
   b) Calculeu la distància entre la recta *r* i la recta *s*.
   [1,25 punts]

Resolució:

a) Determinem un vector director de cada recta per a saber si són vectors linealment dependents (coincidents o paral·leles) o linealment independents (secants o que es creuen).
$v_r = (2,1,1)$ i $v_s = (1,-1,1)$.
Com que no són proporcionals, són vectors linealment independents. Per tant, les dues rectes o bé són secants (s'intersecten en un punt comú) o bé es creuen.

Verifiquem si són secants buscant la intersecció de *r* i *s*. Per això, substituint un punt genèric de la recta *s* en la recta *r*:

$$\frac{\mu - 3}{2} = -\mu = \mu - 1$$

De la primera igualtat: $\mu - 3 = -2\mu \Rightarrow \mu = 1$

De la segona igualtat: $-\mu = \mu - 1 \Rightarrow \mu = \frac{1}{2}$

Com que s'obtenen valors diferents per al paràmetre μ, no hi ha punt intersecció i per tant les rectes *r* i *s* es creuen.

Observació: Qualsevol altra manera equivalent i correcta serà també donada per resposta correcta.

b) En aquest cas en què les rectes es creuen la distància entre elles la calcularem com a distància d'un punt d'una recta al pla paral·lel que conté l'altra recta, és a dir:
$d(s, r) = d(P_s, \pi)$, on π és el pla que conté la recta *r* i és paral·lel a la recta *s*.

Els vectors directors del pla seran $v_r = (2,1,1)$ i $v_s = (1,-1,1)$.

El seu producte vectorial ens dona el vector normal al pla:

$$n = v_r \times v_s = \begin{vmatrix} i & 2 & 1 \\ j & 1 & -1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2,-1,-3) = (A,B,C)$$

Ara amb un punt de la recta *r*, $P_r = (3,0,1)$ construïm l'equació del pla:

$$\pi: 2(x-3) - 1(y-0) - 3(z-1) = 0 \Rightarrow \pi: 2x - y - 3z - 3 = 0$$

La distància serà:

$$d(s,r) = d(P_s,\pi) = d\big((0,0,0),\pi\big) = \frac{|2\cdot 0 - 0 - 3\cdot 0 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-3)^2}} = \frac{3}{\sqrt{14}} = \boxed{\frac{3\sqrt{14}}{14}u}$$

Observació: Qualsevol altra manera equivalent i correcta serà també donada per resposta correcta.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts pels vectors directors de les rectes.
   0,25 punts per justificar el no paral·lelisme.
   0,25 punts pel plantejament de la posició relativa.
   0,25 punts pels càlculs o passos intermitjos.
   0,25 punts per la justificació que les rectes es creuen.

b) 0,25 punts pel plantejament de com calcular la distància.
   0,25 punts pels elements del pla a calcular.
   0,25 punts pel càlcul del pla paral·lel.
   0,25 punts per l'aplicació de la fórmula de la distància d'un punt a un pla.
   0,25 punts pel càlcul final.

3.

a) Calculeu l'equació general del pla π que passa pel punt $(8,8,8)$ i té vectors directors $\boldsymbol{u} = (1,2,-3)$ i $\boldsymbol{v} = (-1,0,3)$.
[1,25 punts]

b) Determineu el valor del paràmetre a perquè el punt $(1,-5,a)$ pertanyi al pla π i calculeu l'equació paramètrica de la recta que passa per aquest punt i és perpendicular al pla π.
[1,25 punts]

Resolució:

a) L'equació general del pla és:

$$\begin{vmatrix} x-8 & 1 & -1 \\ y-8 & 2 & 0 \\ z-8 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 6x + 2z = 64 \rightarrow \boxed{3x + z = 32}.$$

Observació: Naturalment, també es donarà per bona la construcció de l'equació del pla a partir del vector normal del pla calculat com el producte vectorial dels dos vectors directors, o equivalent.

b) Perquè el punt $(1,-5,a)$ sigui del pla, ha de satisfer l'equació, per tant:

$$3 + a = 32 \rightarrow \boxed{a = 29}$$

Ens demanen la recta que passa pel punt $(1,-5,29)$ i té vector director el vector normal al pla, que és $(A,B,C) = (3,0,1)$. Així l'equació paramètrica de la recta demanada és:

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -5 \quad \text{amb } t \in \boldsymbol{R} \\ z = 29 + t \end{cases}$$

Pautes de correcció:

a) 0,5 punts pel plantejament.
0,25 punts pel desenvolupament.
0,5 punts per la solució.

b) 0,5 punts per calcular el valor de a.
0,25 punts per les coordenades del punt.
0,25 punts pel vector director.
0,25 punts per l'equació paramètrica de la recta.

Observació: Tot i que l'apartat a) pugui estar mal resolt, l'apartat b) és puntuarà correctament encara que el pla inicial no sigui correcte sempre que el procediment i càlcul siguin els adequats.

5. Considereu la recta r d'equació $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1}$ i la recta s que passa pel punt $P = (2,-5,1)$ i que té per vector director (-1,0,-1).

a) Estudieu la posició relativa de les rectes r i s.
[1,25 punts]

b) Calculeu l'equació general del pla que és paral·lel a la recta r i conté la recta s.
[1,25 punts]

Resolució:

a) El vector director de r és $v_r = (2,-2,1)$ i un punt és $P_r = (1,3,0)$.
El vector director de s és $v_s = (-1,0,-1)$ i un punt és $P_s = (2,-5,1)$

La seva posició relativa l'obtindríem a partir de:

$$\overrightarrow{P_rP_s} = (1,-8,1) \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -8 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 8 - 16 - 2 = -8 \neq 0$$

Per tant les dues rectes es creuen a l'espai tridimensional.

b) El vector normal del pla serà perpendicular als vectors directors respectius de cada recta.

$$n = v_r \times v_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2i + j - 2k = (2,1,-2)$$

Com que la recta s ha d'estar continguda al pla ($P_s \in \pi$) $\rightarrow$

$$\pi: 2(x-2) + 1(y+5) - 2(z-1) = 0$$

per tant el pla serà $\pi: 2x + y - 2z = -3$

o també:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+5 & z-1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2x + y - 2z + 3 = 0$$

a) 0,25 per la identificació de les dues rectes.
0,25 punts pel vector que uneix les rectes.
0,25 punts pel plantejament.
0,25 punts pel càlcul del determinant.
0,25 punts per la resposta final.
Observació: Qualsevol mètode alternatiu correcte també s'avaluarà amb la totalitat de la puntuació.

b) 0,5 punts pel plantejament d'algun procediment correcte per a trobar el pla (a partir de punt i dos vectors, a partir de vector normal i punt).
0,75 punts pel càlcul de l'equació general a partir del procediment anterior.

21. PAU 2019 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 5

5. Siguin P, Q i R els punts d'intersecció del pla d'equació $x + 4y + 2z = 4$ amb els tres eixos de coordenades OX, OY i OZ, respectivament.
   a) Calculeu els punts P, Q i R, i el perímetre del triangle de vèrtexs P, Q i R.
   [1 punt]
   b) Calculeu l'àrea del triangle de vèrtexs P, Q i R.
   [1 punt]

   Nota: Per a calcular l'àrea del triangle definit pels vectors v i w podeu fer servir l'expressió $S = \frac{1}{2}\|v \times w\|$, en què $v \times w$ és el producte vectorial del vectors v i w.

Resolució:

a)

Eix OX: $x = ?, y = 0, z = 0 \implies x = 4 \implies \boxed{P = (4,0,0)}$

Eix OY: $y = ?, x = 0, z = 0 \implies 4y = 4 \implies y = 1 \implies \boxed{Q = (0,1,0)}$

Eix OZ: $z = ?, x = 0, y = 0 \implies 2z = 4 \implies z = 2 \implies \boxed{R = (0,0,2)}$

El perímetre serà $\|\overrightarrow{PQ}\| + \|\overrightarrow{PR}\| + \|\overrightarrow{QR}\| = \|(-4,1,0)\| + \|(-4,0,2)\| + \|(0,-1,2)\| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + 0} + \sqrt{(-4)^2 + 0 + 2^2} + \sqrt{0 + (-1)^2 + 2^2} =$
$\boxed{\sqrt{17} + \sqrt{20} + \sqrt{5} = \sqrt{17} + 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = \sqrt{17} + 3\sqrt{5} \cong 10{,}83\ u}$.

b) Si apliquem l'expressió de la fórmula, obtenim la igualtat següent:
$S = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\|$.

Calculem el producte vectorial $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$:

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} i & -4 & -4 \\ j & 1 & 0 \\ k & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2,8,4).$$

Per tant, $S = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\| = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 8^2 + 4^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 64 + 16} = \frac{1}{2}\sqrt{84} = \frac{2}{2}\sqrt{21} =$
$\boxed{\sqrt{21} \cong 4{,}58\ u^2.}$

a)
0,25 punts pel càlcul dels punts P, Q i R.
0,25 punts pel càlcul dels vectors.
0,25 punts pel càlcul de les normes.
0,25 punts per l'expressió final (amb radicals o aproximada).

b)
0,5 punts pel càlcul del producte vectorial.
0,5 punts pel càlcul de la norma i l'expressió final (amb radical o aproximada).

22. PAU 2019 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3

3. Un dron es troba en el punt $P=(2,-3,1)$ i volem dirigir-lo en línia recta fins al punt més proper del pla d'equació $\pi: 3x+4z+15=0$.

a) Calculeu l'equació de la recta, en forma paramètrica, que ha de seguir el dron. Quina distància ha de recórrer fins a arribar al pla?
[1 punt]

b) Trobeu les coordenades del punt del pla on arribarà el dron.
[1 punt]

Nota: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació $Ax+By+Cz+D=0$ amb l'expressió $\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Resolució:

a) La trajectòria que ha de seguir el dron és la recta que passa pel punt $P=(2,-3,1)$ i té vector director perpendicular al pla $\pi: 3x+4z+15=0$. El vector director serà $v_r = (A,B,C) = (3,0,4)$. Per tant, en forma paramètrica

$$\begin{cases} x = 2+3t \\ y = -3 \\ z = 1+4t \end{cases} \qquad t \in \mathbf{R}$$

La distància que ha de recórrer és:

$$d(P,\pi) = \frac{|3\cdot 2+0\cdot(-3)+4\cdot 1+15|}{\sqrt{3^2+0^2+4^2}} = \frac{25}{5} = 5u$$

b) Cal trobar el punt d'intersecció de la recta amb el pla:

$$\begin{cases} (x,y,z) = (2+3t,-3,1+4t) \\ \pi: 3x+4z+15=0 \end{cases} \rightarrow 3(2+3t)+4(1+4t)+15=0 \rightarrow t=-1$$

Així, el punt buscat és $(-1,-3,-3)$.

a) 0,25 punts per identificar el vector director de la recta.
0,25 punts per donar la forma paramètrica de la recta.
0,5 punts per calcular la distància.

b) 0,5 punts per plantejar la intersecció de la recta amb el pla.
0,5 punts per la resolució i trobar el punt demanat.

2. Siguin la recta r: $\begin{cases} x = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$ i el pla π: $x - z = 3$.

a) Calculeu l'equació paramètrica de la recta que és perpendicular al pla π i que el talla en el mateix punt en què el talla la recta r.
[1 punt]

b) Trobeu els punts de r que estan a una distància de $\sqrt{8}$ unitats del pla π.
[1 punt]

Nota: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Resolució:

- La recta que es demana té vector director $n = (1,0,-1)$ i passa pel punt d'intersecció de r i π. Busquem el punt de la rectaz r,$P_r = (2,1+\lambda,\lambda)$, substituint-lo a l'equació del pla : $2 - \lambda - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1$.

El punt de la recta és (2, 0, -1)

Per tant, l'equació paramètrica de la recta buscada serà: $\left.\begin{array}{l} x = 2 + \mu \\ y = 0 \\ z = -1 - \mu \end{array}\right\}$

- Busquem els punts de r tals que $d(P_r, \pi) = \sqrt{8}$.

$$d(P_r, \pi) = \frac{|2 - \lambda - 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-1 - \lambda|}{\sqrt{2}} = \sqrt{8} \Rightarrow |-1 - \lambda| = 4 \Rightarrow \lambda = -5 \; o \; \lambda = 3$$

Per tant els punts són (2, -4, -5) i (2, 4, 3).

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts pel vector normal del pla.
0,25 punts per la forma paramètrica de r.
0,25 punts pel punt intersecció del pla i la recta.
0,25 punts per l'equació paramètrica de la recta que es demana.

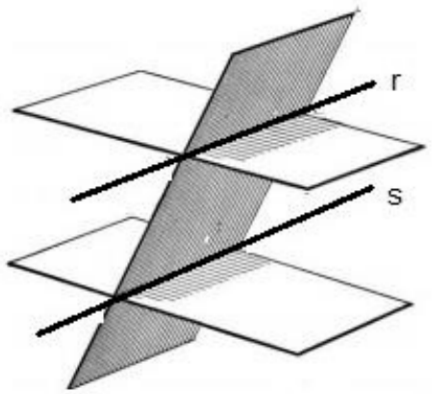
b)
0,25 punts per plantejar l'equació a resoldre.
0,25 punts pel valors solució.
0,25 punts per un primer punt.
0,25 punts per un segon punt.

24. PAU 2019 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 5

5. Considereu els plans $\pi_1: 2x + ay + z = 5$, $\pi_2: x + ay + z = 1$ i $\pi_3: 2x + (a+1)y + (a+1)z = 0$, en què a és un paràmetre real.

   a) Estudieu per a quins valors del paràmetre a els tres plans es tallen en un punt. [1 punt]

   b) Comproveu que per al cas $a = 1$ la interpretació geomètrica del sistema format per les equacions dels tres plans és la que es mostra en la imatge següent:



[1 punt]

Resolució:

a) Perquè els tres plans es tallin en un punt la matriu del sistema format per les tres equacions ha de ser compatible determinat. Cal que la matriu M del sistema tingui rang 3. Llavors la matriu ampliada també tindrà rang 3 i per tant el sistema serà compatible determinat.

$$M = \begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & a+1 & a+1 \end{vmatrix} = 2a(a+1) + 2a + a + 1 - 2a - 2(a+1) - a(a+1)$$

$$= 2a^2 + 2a + 2a + a + 1 - 2a - 2a - 2 - a^2 - a = a^2 - 1$$

rang M = 3 quan $a^2 - 1 \neq 0$, és a dir $a \neq \pm 1$. En aquests casos els tres plans es tallen en un punt.

b) La situació representada mostra dos plans paral·lels i un altre que els talla.

En el cas $a = 1$ tenim:

$$\left.\begin{array}{c} 2x+y+z=5 \\ x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=0 \end{array}\right\}$$ En aquest cas els plans π_2 i π_3 són paral·lels i diferents ja que

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\neq\frac{1}{0}$$

i no paral.lels amb el pla π_1 perqué

$$\frac{2}{1}\neq\frac{1}{1}=\frac{1}{1}$$

per tant, el pla π_1 els tallarà de manera que s'obtindrà, efectivament, la situació geomètrica de la figura.

a)
0,25 punts pel plantejament del sistema d'equacions lineals.
0,25 punts pel càlcul del determinant.
0,25 punts per la resolució de la igualtat.
0,25 punts per la identificació del cas SCD.

b)
0,5 punts per la justificació que els plans π_2 i π_3 són paral.lels i diferents.
0,5 punts per la justificació que el pla π_1 no és paral.lel amb els altres dos i els talla en rectes paral.leles. No cal que l'estudiant comprovi que el vector director de la recta *r* i el de la recta *s* són proporcionals.

25. PAU 2018 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 3

3. Considereu el pla de vectors directors $u = (-1, 3, 2)$ i $v = (2, 1, 0)$ i que passa pel punt $A = (1, 0, 3)$.

a) Calculeu l'equació de la recta que és perpendicular al pla i passa pel punt A.
[1 punt]

b) Calculeu la distància del punt $P = (1, 5, 0)$ al pla.
[1 punt]

Nota: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Resolució:

a) El vector director de la recta perpendicular al pla és:

$$\bar{n} = \bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2i + 4j - 7k = (-2, 4, -7)$$

Per tant, l'equació vectorial de la recta serà $(x, y, z) = k\cdot(-2, 4, -7) + (1, 0, 3)$.

b) L'equació general del pla és:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad -2x + 4y - 7z + 23 = 0$$

La distància al punt P és: $d(P, pla) = \frac{|-2\cdot1+4\cdot5-7\cdot0+23|}{\sqrt{(-2)^2+4^2+(-7)^2}} = \frac{41}{\sqrt{69}} = \frac{41\sqrt{69}}{69}\ u = 4{,}94\ u$

a)
0,5 punts pel vector normal al pla.
0,5 punts per l'equació de la recta.

b)
0,5 punts per l'equació del pla.
0,5 punts pel càlcul de la distància.

5. Considereu els punts de l'espai tridimensional $A = (1, 1, 0)$, $B = (3, 5, 0)$ i $C = (1, 0, 0)$ i la recta r: $x = y - 1 = \frac{z}{2}$.

a) Trobeu el punt d'intersecció de la recta r amb el pla que passa pels punts A, B i C.
[1 punt]

b) Trobeu els punts P de la recta r per als quals el tetraedre de vèrtexs P, A, B i C té un volum de 2u^3.
[1 punt]

Nota: El volum d'un tetraedre de vèrtexs P, Q, R i S es pot calcular amb l'expressió $\frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS})\right|$.

Resolució:

a) L'equació del pla que passa pels punts A, B i C es pot obtenir (a partir, per exemple, del punt C i dels vectors directors $\overrightarrow{CB}$ i $\overrightarrow{CA}$): $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ y & 5 & 1 \\ z & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

D'això en resulta $2z = 0$, o sigui, $\boxed{z = 0}$.

Ara trobem la intersecció amb la recta r:

$x = y - 1 = \frac{z}{2}$; per tant, els punts de la recta r són de la forma $(x, y, z) =$

$(\lambda, 1 + \lambda, 2\lambda)$. Com que $z = 0$, obtenim $\lambda = 0$, i per tant, el punt d'intersecció és $\boxed{(0,1,0).}$

b) Els punts P de la recta r són de la forma $P = (\lambda, 1 + \lambda, 2\lambda)$.
Calculem el volum del tetraedre: $V = \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})\right|$; per tant,

$$\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 2 \\ \lambda + 1 & 1 & 5 \\ 2\lambda & 0 & 0 \end{vmatrix}\right| = 2.$$

O sigui, $\frac{1}{6}\ |-4\lambda| = 2$; és a dir, $|\lambda| = 3$, i per tant, hi ha dues solucions: $\lambda = 3$ *i* $\lambda = -3$, i d'aquí en resulta $\boxed{P_1 = (3,4,6) \text{ i } P_2 = (-3,-2,-6).}$

Pautes de correcció:

a)
0,5 punts per l'equació del pla.
0,5 punts per la intersecció.
b)
0,25 punts per l'expressió general dels punts de r.
0,25 punts pel plantejament de la igualtat.
0,25 punts per un punt solució.
0,25 punts per l'altre punt solució.

27. PAU 2018 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2

2. Sigui *r* la recta que passa pels punts $A = (0, 1, 1)$ i $B = (1, 1, -1)$.

a) Trobeu l'equació paramètrica de la recta *r*.
[1 punt]

b) Calculeu tots els punts de la recta *r* que estan a la mateixa distància dels plans $\pi_1: x + y = -2$ i $\pi_2: x - z = 1$
[1 punt]
Nota: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Resolució:

a) Recta per A = (0, 1, 1) i B = (1, 1, –1). Si agafem com a punt per on ha de passar la recta el punt A i com a vector director el vector $\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 0, -2)$

$$(x, y, z) = (0, 1, 1) + t(1, 0, -2).$$

En forma paramètrica serà:

$$\boxed{\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 1 - 2t \end{cases}}$$

o equivalentment $(x, y, z) = (t, 1, 1 - 2t)$.

b) Plantegem la igualtat de les dues distàncies a partir dels punts de la recta en forma paramètrica:

$$\frac{|t + 1 + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{|t - 1 + 2t - 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}}$$

Eliminem els denominadors perquè són iguals i ens queda

$$|t + 3| = |3t - 2|$$

D'aquí obtenim dues possibilitats:

- $t + 3 = 3t - 2 \Rightarrow t = \frac{5}{2} \Rightarrow \boxed{P_1 = \left(\frac{5}{2}, 1, -4\right)}$
- $t + 3 = -3t + 2 \Rightarrow t = -\frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{P_2 = (-\frac{1}{4}, 1, \frac{3}{2})}$

Pautes de correcció:

a)
0,5 punts pel plantejament de punt i vector.
0,5 punts per l'equació en forma paramètrica.

b)
0,25 punts per la igualtat de distàncies a partir de la fórmula.
0,25 punts pels càlculs preliminars.
0,25 punts pel primer punt.
0,25 punts pel segon punt.

4. Considereu els punts $P = (3,-2,1)$, $Q = (5,0,3)$, $R = (1,2,3)$ i la recta

$$r:\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$$

a) Determineu l'equació general (és a dir, la que té la forma Ax + By + Cz = D) del pla que passa per P i Q i és paral·lel a la recta *r*.

[1 punt]

b) Donats el pla $x + 2y + m \cdot z = 7$ i el pla que passa per P, Q i R, trobeu *m* perquè siguin paral·lels i no coincidents.
[1 punt]

Resolució:

a) Un vector direcció de *r* és: $(1, 1, 0) \times (0, 2, 3) = \begin{vmatrix} i & 1 & 0 \\ j & 1 & 2 \\ k & 0 & 3 \end{vmatrix} = (3, -3, 2)$.

El vector $\overrightarrow{PQ}$ = Q- P = (2, 2, 2) o equivalentment (1, 1, 1).

Busquem un pla paral·lel als dos vectors que acabem de calcular, (3, -3, 2) i (1, 1, 1). Per tant, un vector normal del pla que busquem serà

$\vec{n}$ = (3, -3, 2) × (1, 1, 1) = (5, 1, -6).

L'equació del pla que passa per P i té vector normal $\vec{n}$ és:

5(x – 3) + (y +2) – 6 (z –1) = 0.

La seva equació general és $\boxed{5x + y - 6z = 7}$.

b) Calculem el vector $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (2, 2, 2)$ o equivalentment (1, 1, 1) (si no s'ha fet en l'apartat anterior)

I el vector $\overrightarrow{PR} = R - P = (-2, 4, 2)$ o equivalentment (-1, 2, 1).

Calculem el vector normal al pla: $\vec{n} = (1, 1, 1) \times (-1, 2, 1) = (-1, -2, 3)$.

Perquè els dos plans siguin paral·lels cal que els respectius vectors normals siguin proporcional, és a dir, que $\frac{1}{-1} = \frac{2}{-2} = \frac{m}{3}$. Per tant, $\boxed{m = -3}$.

Comprovem que els plans no són coincidents perquè el punt *P*, per exemple, no hi pertany, x+2y-3z ≠7; efectivament 3-4-3 ≠7.

Observació: La comprovació de la no coincidència dels plans es pot provar també a partir de la no proporcionalitat dels termes independents.

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts pel vector director de la recta *r*.
0,25 punts pel vector que uneix P i Q.
0,25 punts pel plantejament de l'equació general.
0,25 punts pel càlcul final.

b)
0,25 punts pel vector normal del pla.
0,25 punts pel plantejament del paral·lelisme a partir de la proporcionalitat.
0,25 punts pel valor de *m*.
0,25 punts per la comprovació que els plans no són el mateix.

29. PAU 2018 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 2

2. Siguin el pla d'equació $\pi: x + y - z = 0$ i el punt $P = (2, 3, 2)$.

a) Calculeu el punt simètric del punt *P* respecte del pla π.

[1 punt]

b) Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) dels dos plans paral·lels a π que estan a distància $\sqrt{3}$ del punt P.

[1 punt]

Nota: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades $(\mathrm{x_0}, \mathrm{y_0}, \mathrm{z_0})$ al pla d'equació $\mathrm{Ax + By + Cz + D = 0}$ amb l'expressió $\frac{|\mathrm{Ax_0+By_0+Cz_0+D}|}{\sqrt{\mathrm{A^2+B^2+C^2}}}$.

Resolució:

a) Per a calcular el simètric de P, diguem-ne P', respecte del pla $\pi: x + y - z = 0$ primer calcularem la projecció ortogonal del punt P sobre el pla π, diguem-ne Q, i després calcularem $P' = P + 2 \cdot \overrightarrow{PQ}$.

La recta que passa pel punt P i és perpendicular al pla té per vector director el vector normal del pla $(1,1,-1)$ i per tant té equació paramètrica

$$(x, y, z) = (2 + \lambda, 3 + \lambda, 2 - \lambda).$$

Calculem la intersecció del pla π amb aquesta recta:

$$2 + \lambda + 3 + \lambda - (2 - \lambda) = 0$$
$$3\lambda = -3$$
$$\lambda = -1 \Rightarrow Q = (1, 2, 3)$$

$$P' = (2, 3, 2) + 2 \cdot \big((1, 2, 3) - (2, 3, 2)\big) = (2, 3, 2) + 2 \cdot (-1, -1, 1) = \boxed{(0, 1, 4)}.$$

Observació: També es pot buscar el punt P' imposant que sigui un punt que compleixi que el vector $\overrightarrow{PP'}$ sigui proporcional al vector normal del pla i que el punt mig del segment $\overline{PP'}$ pertanyi al pla.

b) Si els plans han de ser paral.lels al pla $\pi: x + y - z = 0$ aleshores hauran de tenir el mateix vector normal i per tant seran de la forma $\pi': x + y - z = D$.

Imposem ara que quedin a distància $\sqrt{3}$ del punt P.

$$d(P, \pi') = \frac{|2 + 3 - 2 - D|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|3 - D|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$
$$|3 - D| = 3 \Rightarrow 3 - D = 3 \; o \; 3 - D = -3$$

- Si $3 - D = 3 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': x + y - z = 0}$.
- Si $3 - D = -3 \Rightarrow D = 6 \Rightarrow \boxed{\pi': x + y - z = 6}$.

Apartat a)

0,25 punts pel càlcul de la recta perpendicular.

0,25 punts pel punt intersecció.

0,25 punts pel plantejament del càlcul del simètric.

0,25 punts pel punt simètric.

Apartat b)

0,25 punts per l'equació a resoldre.

0,25 punts per la resolució de l'equació.

0,25 punts per un pla.

0,25 punts per l'altre pla.

30. PAU 2018 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 5

5. Siguin les rectes $r_1: x-1=\frac{y-2}{-1}=z-5$ i $r_2: (x,y,z)=(2-3\lambda,-1+\lambda,2)$.

a) Trobeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla que conté la recta r_1 i és paral·lel a la recta r_2.

[1 punt]

b) Digueu quina condició s'ha de complir perquè existeixi un pla que contingui la recta r_1 i sigui perpendicular a la recta r_2. Amb les rectes r_1 i r_2 de l'enunciat, comproveu si existeix un pla que contingui la recta r_1 i sigui perpendicular a la recta r_2.

[1 punt]

Resolució:

a) $r_1: (x, y, z) = (1, 2, 5) + \mu(1, -1, 1)$ i $r_2: (x, y, z) = (2, -1, 2) + \lambda(-3, 1, 0)$

Si el pla ha de contenir la recta r_1 haurà de passar pel punt $(1, 2, 5)$ i contenir el vector $v_1 = (1, -1, 1)$ a la direcció del pla. I si el pla ha de quedar paral.lel a la recta r_2 també haurà de tenir el vector $v_2 = (-3, 1, 0)$ a la direcció.

Per tant el vector normal del pla serà $v_1 \times v_2$.

$$v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} i & 1 & -3 \\ j & -1 & 1 \\ k & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, -3, -2) \sim (1, 3, 2)$$

Així l'equació cartesiana del pla serà $x + 3y + 2z = D$ i per obtenir D imposem que el pla passi pel punt $(1, 2, 5)$, és a dir $D = 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 5 = 17$. Per tant l'equació que ens demanen és $\boxed{x + 3y + 2z = 17}$.

b) Per tal que existeixi un pla que contingui una recta i quedi perpendicular a l'altra recta, les dues rectes inicials han de ser perpendiculars entre sí. En altres termes, els vectors directors de les rectes han de ser perpendiculars, és a dir, han de tenir producte escalar igual a zero.

En el nostre cas tenim

$$v_1 \cdot v_2 = (1, -1, 1) \cdot (-3, 1, 0) = -3 - 1 + 0 = -4 \neq 0.$$

i, per tant, no existeix cap pla que contingui la recta r_1 i sigui perpendicular a la recta r_2, ni a l'inrevés, ja que d'existir aleshores les dues rectes serien perpendiculars quan no ho són ja que el producte escalar dels seus vectors directors és diferent de 0.

Apartat a)

0,25 punts per veure que el vector $v_1$està a la direcció del pla.

0,25 punts per veure que el vector v_2 està a la direcció del pla.

0,25 punts pel càlcul del vector normal.

0,25 punts per l'equació del pla.

Apartat b)

0,5 punts per la condició de perpendicularitat entre les rectes (qualsevol és suficient).

0,25 punts per la comprovació d'alguna de les condicions.

0,25 punts per l'explicitació del raonament i conclusió final.

31. PAU 2017 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 1

1. Considereu el pla $\pi: x + y + z = 1$ i la recta r que passa pels punts $P = (0, 0, 6)$ i $Q = (1, 2, 3)$.

a) Estudieu la posició relativa de la recta r i el pla π.
[1 punt]

b) Calculeu la distància entre la recta r i el pla π.
[1 punt]

Nota: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Resolució:

a)

El producte escalar entre el vector normal al pla $\vec{n} = (1, 1, 1)$ i el vector $\overrightarrow{PQ} = (1, 2, -3)$ és 1 + 2 – 3 = 0, per tant, la recta és paral·lela al pla o hi està continguda. Només cal veure que el punt P o el punt Q no estan en el pla per concloure que són paral·lels.

L'estudi d'aquesta posició relativa es pot fer d'altres maneres:

- Passant la recta a forma general es facilita l'estudi del sistema format per les tres equacions, que condueix a veure el paral·lelisme entre la recta i el pla.
- Passant la recta a forma paramètrica, la intersecció amb el pla mostra que no hi ha solució, fet que mostra el paral·lelisme entre la recta i el pla.

b) Atès que la recta i el pla són paral·lels, per a calcular la distància entre ambdós n'hi ha prou a considerar un punt de la recta i calcular la seva distància al pla. Un punt de la recta és, per exemple, el punt $P = (0,0,6)$, i la distància demanada és:

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = d(P = (0,0,6), \pi: x + y + z - 1 = 0) =$$
$$= \frac{|1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 6 - 1|}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3} = 2{,}887\ u}$$

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts pel vector normal al pla.
0,25 punts pel vector director de la recta.
0,25 punts pel producte escalar i concloure el paral·lelisme.
0,25 punts pel paral·lelisme estricte.

b)
0,25 punts per la formulació a partir d'un punt de la recta.
0,5 punts per la correcta aplicació de la fórmula.
0,25 punts pel càlcul final (sigui racionalitzat o no o amb expressió decimal).

32. PAU 2017 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 5

5. A R^3, siguin la recta $r: \begin{cases} x - z = 2 \\ 2y + z = 4 \end{cases}$ i el punt $P = (0,1,-1)$.

a) Calculeu l'equació general (és a dir, la que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla π perpendicular a la recta r i que passa pel punt P.
[1 punt]

b) Calculeu el punt simètric del punt P respecte del pla $x + y + z = -3$.
[1 punt]

Resolució:

a) π perpendicular a r té per vector normal el vector director de r : $\vec{n} = \overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (2,-1,2)$. I si ha de passar per $P(0,1,-1) \rightarrow \pi: 2x - y + 2z = D \rightarrow$

$-1 - 2 = D \rightarrow D = -3 \rightarrow \boxed{\pi: 2x - y + 2z = -3}$

b) Hem de calcular primer la recta perpendicular al pla $x + y + z = -3$ i que passa per P. El vector normal del pla, (1,1,1), serà el vector director de la recta i, per tant, la recta serà $(x, y, z) = (t, 1 + t, -1 + t)$.

Caldrà buscar ara el punt d'intersecció de la recta $(x, y, z) = (t, 1 + t, -1 + t)$ amb el pla $x + y + z = -3$.

Si substituïm un punt genèric de la recta en el pla obtenim:

$$t + 1 + t - 1 + t = -3$$
$$3t = -3$$
$$t = -1$$

Per tant, el punt intersecció és $Q = (-1,0,-2)$ i el punt simètric serà

$$P' = P + 2 \cdot \overrightarrow{PQ} = (0,1,-1) + 2 \cdot (-1,-1,-1) = \boxed{(-2,-1,-3)}$$

a)
0,25 punts pel càlcul del vector normal al pla.
0,25 punts per la forma d'equació del pla.
0,25 punts per l'obtenció de D.
0,25 punts per l'equació general del pla.

b)
0,25 punts per l'equació de la recta perpendicular.
0,25 punts pel punt intersecció de la recta i el pla.
0,25 punts per la formulació del punt simètric.
0,25 punts pel càlcul final.

33. PAU 2017 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2

a)

Si el pla ha de ser perpendicular als dos plans π_1 i π_2, aleshores el seu vector normal, $n = (A, B, C)$ haurà de ser perpendicular als respectius vectors normals $n_1 = (5, -1, -7)$ i $n_2 = (2, 3, 1)$.

Així doncs $n = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & 5 & 2 \\ j & -1 & 3 \\ k & -7 & 1 \end{vmatrix} = (20, -19, 17)$.

El pla tindrà la forma $20x - 19y + 17z = D$, però si ha de passar per l'origen de coordenades (0,0,0), aleshores D = 0 i el pla buscat serà $\boxed{20x - 19y + 17z = 0}$.

b) L'angle entre els dos plans serà l'angle que formin els respectius vectors normals. Així doncs:

$$\boxed{\alpha} = \alpha(\pi_1, \pi_2) = \alpha(n_1, n_2) = \alpha\big((5, -1, -7), (2,3,1)\big) = arccos \frac{n_1 \cdot n_2}{\|n_1\| \cdot \|n_2\|} =$$

$$= arccos \frac{10 - 3 - 7}{\|n_1\| \cdot \|n_2\|} = arc\cos 0 = \boxed{90° = \frac{\pi}{2} rad}.$$

Els dos plans són perpendiculars.

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts pel plantejament de perpendicularitat entre vectors normals.
0,25 punts pel producte vectorial.
0,25 punts per la forma inicial del pla.
0,25 punts per l'equació final del pla.

b)
0,25 punts per l'angle a partir de l'angle entre els vectors normals.
0,25 punts per la formulació de l'angle.
0,25 punts pel producte escalar.
0,25 punts per la perpendicularitat (o l'angle de 90º, sense indicar perpendicularitat).

34. PAU 2017 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 1

Un vector director de *r* es pot obtenir amb el producte vectorial dels vectors normals dels dos plans: $\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\vec{e_1} + 4\vec{e_2} + 2\vec{e_3} \equiv (2,4,2)$

Un vector director de *s* el tenim als denominadors de l'equació contínua: $\vec{v} = (1,2,1)$

Un punt de *s* és $P = (-1,2,1)$, que podem comprovar que no pertany a *r* ja que no satisfà la primera equació.

Com que els dos vectors directors són proporcionals i $P \notin r$, deduïm que les dues rectes són paral·leles.

b) Un punt de *r* és $Q = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$.

El pla buscat queda determinat pel punt $P = (-1,2,1)$ i pels vectors $\begin{cases} \overrightarrow{QP} = \left(-\frac{3}{2}, 2, 1\right) \\ \vec{v} = (1,2,1) \end{cases}$ i la seva equació vectorial és:

$$\pi : (x,y,z) = (-1,2,1) + \lambda \cdot (1,2,1) + \mu \cdot \left(-\frac{3}{2}, 2, 1\right)$$

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts pel vector director de la recta *r*.
0,25 punts pel vector director de la recta *s*.
0,25 punts per un punt d'una recta.
0,25 punts per la proporcionalitat i raonament final.

b)
0,25 punts per un punt de l'altra recta.
0,25 punts per un primer vector director.
0,25 punts per un segon vector director.
0,25 punts per l'equació vectorial.

35. PAU 2016 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 1

1. Siguin la recta $r: (x, y, z) = (5 + k, k, -2 - 2k)$ i els punts $P = (1, 0, -1)$ i $Q = (2, 1, 1)$.

a) Calculeu l'equació paramètrica de la recta que passa pel punt Q i és perpendicular al pla determinat per la recta r i el punt P.

[1 punt]

b) Calculeu el punt de la recta r que equidista dels punts P i Q.

[1 punt]

Resolució:

a) La recta que ens demanen tindrà per vector director el vector normal del pla determinat per la recta r i el punt P, és a dir el producte vectorial d'un vector director de la recta r i un vector que uneixi el punt P amb un punt de r.

Si $r: (x, y, z) = (5 + k, k, -2 - 2k)$ aleshores un vector director de r és $v_r = (1,1,-2)$ i un punt de la recta és el $R = (5, 0, -2)$.

Un vector que uneix el punt i la recta és $\overrightarrow{PR} = R - P = (5, 0, -2) - (1, 0, -1) = (4, 0, -1)$.

Per tant, un vector normal al pla i director de la recta que se'ns demana és:

$$v = (1, 1, -2) \times (4, 0, -1) = \begin{vmatrix} i & 1 & 4 \\ j & 1 & 0 \\ k & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-1, -7, -4) \sim (1, 7, 4)$$

Així doncs, la recta solució és

$$\boxed{(x, y, z) = Q + \lambda v = (2,1,1) + \lambda(1,7,4) = (2 + \lambda, 1 + 7\lambda, 1 + 4\lambda)}$$

b) Un punt qualsevol de la recta r és: $R = (5+k, k, -2-2k)$. Aquest punt ha de complir

$$d(P, R) = d(Q, R)$$

$$\|(4 + k, k, -1 - 2k)\| = \|(3 + k, k - 1, -3 - 2k)\|$$

$$\sqrt{(4 + k)^2 + k^2 + (-1 - 2k)^2} = \sqrt{(3 + k)^2 + (k - 1)^2 + (-3 - 2k)^2}$$

Fent càlculs s'obté $\boxed{4k + 2 = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{2} \Rightarrow R = \left(\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)}$

Apartat a)

0,25 punts pel punt R i el vector v_r de la recta r.

0,25 punts pel vector $\overrightarrow{PR}$.

0,25 punts pel producte vectorial.

0,25 punts per l'equació final.

Apartat b)

0,25 punts pel plantejament de la igualtat entre distàncies.

0,25 punts pel càlcul de les normes (o normes al quadrat) dels vectors.

0,25 punts per la resolució de l'equació.

0,25 punts pel punt solució.

6. Responeu a les qüestions següents:

a) Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla que passa pel punt de coordenades $(0, 0, 1)$ i és perpendicular als plans $3x + y - z = 1$ i $x + y + 2z = 5$.

[1 punt]

b) Suposeu que un pla π_1 és perpendicular a un segon pla π_2 i que el pla π_2 és a la vegada perpendicular a un tercer pla π_3. Raoneu si necessàriament els plans π_1 i π_3 han de ser perpendiculars entre ells.

[1 punt]

Resolució:

a) Per tal que dos plans siguin perpendiculars, el vector normal a un d'ells ha de ser director de l'altre, per tant, el pla que busquem tindrà per vectors directors els vectors normals de cadascun dels plans i té per equació cartesiana:

$$\begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ y & 1 & 1 \\ z-1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$, o sigui $\boxed{3x - 7y + 2z = 2}$.

b) Si n_1, n_2 i n_3 són els vectors normals del respectius plans, el que tenim és que

$$n_1 \cdot n_2 = 0$$
$$n_2 \cdot n_3 = 0$$

que no implica, necessàriament, que $n_1 \cdot n_3 = 0$

L'apartat anterior n'és una mostra:

$\pi_1 : 3x + y - z = 1$

$\pi_2 : 3x - 7y + 2z = 2$

$\pi_3 : x + y + 2z = 5$, en què veiem que es compleix:

$\pi_1 \perp \pi_2$; $\pi_2 \perp \pi_3$, i l'angle que formen π_1 i π_3 no és 90º ja que el producte escalar dels vectors normals és $(3,1,-1)\cdot(1,1,2) = 3 + 1 - 2 = 2 \neq 0$.

Per tant, $\boxed{\text{no necessàriament els plans } \pi_1 \text{ i } \pi_3 \text{ han de ser perpendiculars entre ells.}}$

Observació: no cal referir-se a l'exemple de l'apartat a). Una bona il·lustració gràfica (per exemple del cas de dos plans paral·lels tallats per un de perpendicular comú) acompanyat del raonament és més que suficient.

Apartat a)

0,5 punts pel plantejament del determinant.

0,5 punts pel càlcul del determinant i l'equació final.

Apartat b)

0,5 punts per les hipòtesis inicials i la no implicació de la perpendicularitat.

0,5 punts per un exemple numèric o gràfic (aquesta part pot no ser necessària si l'argumentació anterior és prou sòlida, i aleshores es puntuaria amb tot el punt sencer).

37. PAU 2016 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 2

2. A R^3, siguin la recta r que per equació $(x, y, z) = (1 + \lambda, \lambda, 1 - \lambda)$ i el pla π d'equació $2x - y + z = -2$.

a) Determineu la posició relativa de la recta r i el pla π.
[1 punt]
b) Calculeu la distància entre la recta r i el pla π.
[1 punt]

Resolució:

a) Els punts de la recta r són de la forma $(1 + \lambda, \lambda, 1 - \lambda)$ per tant r és la recta que passa pel punt $P = (1,0,1)$ i que té vector director $v_r = (1,1,-1)$.

Per altra banda, el vector normal del pla està format pels coeficients A, B i C de l'equació cartesiana i és $n = (2,-1,1)$.

Si fem el producte escalar $v_r \cdot n = (1,1,-1) \cdot (2,-1,1) = 2 - 1 - 1 = 0$, per tant són dos vectors ortogonals (perpendiculars) entre sí amb la qual cosa tenim que la recta r és paral·lela al pla π. Com que el punt P no satisfà l'equació del pla π, la recta queda paral·lela exterior (no continguda) al pla.

Observació: El paral·lelisme també pot ser demostrat via la resolució del sistema d'equacions lineals format per la recta i el pla i veient que és un Sistema Incompatible.

b) Per a fer la distància de r a π, com que són paral·lels, és suficient agafar un P de r i fer $d(P, \pi)$

Així tenim $\boxed{d(r,\pi)} = d(P,\pi) = \frac{|2\cdot 1 - 1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \boxed{\frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{6}}$.

Observació: En lloc d'aplicar una fórmula també es pot calcular el punt Q projecció perpendicular de P sobre π i calcular $d(P,Q)$.

Pautes de correcció:

Apartat a)
0,25 punts per la identificació de la recta r, a partir d'un punt i un vector director.
0,25 punts per veure el vector normal del pla.
0,25 punts pel producte escalar igual a 0 i deduir el paral·lelisme.
0,25 punts per veure que la recta no està inclosa en el pla.
Apartat b)
0,50 punts per indicar que la distància es pot fer a partir d'un punt de r.
0,5 punts per la substitució i càlcul final (no cal eliminar els radicals del denominador).

38. PAU 2016 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 5

5. Considereu el tetraedre que té per vèrtexs el punts $A = (x,0,1)$, $B = (0,x,1)$, $C = (3,0,0)$ i $D = (0,x,0)$ amb $0 < x < 3$.

a) Comproveu que el volum del tetraedre és donat per l'expressió $V(x) = \frac{1}{6}(-x^2 + 3x)$.

[1 punt]

b) Determineu el valor de x que fa que el volum sigui màxim i calculeu aquest volum màxim.

[1 punt]

Resolució:

a) El volum del tetraedre de vèrtexs *ABCD* es pot calcular amb l'expressió

$$V = \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|$$

Calculem els tres vectors arestes: $\overrightarrow{AB} = (-x, x, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (3-x, 0, -1)$ i $\overrightarrow{AD} = (-x, x, -1)$.
Per tant

$$V(x) = \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} -x & 3-x & -x \\ x & 0 & x \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}|x^2 - x^2 + x(3-x)|$$

$$= \frac{1}{6}|x(3-x)|$$

Ara bé observem que $0 < x < 3$ i per tant l'expressió $x(3-x)$ serà sempre positiva i aleshores el seu valor absolut serà $x(3-x)$.

Tenim doncs $V(x) = \frac{1}{6}\big(x(3-x)\big) = \frac{1}{6}(-x^2 + 3x)$, com volíem demostrar.

Observació: El volum es pot calcular també a partir de l'àrea del triangle de la base i de l'alçada del tetraedre. La puntuació en aquest cas, que és una mica més llarg, es repartirà per igual entre els diferents passos.

b) Per a obtenir el volum màxim buscarem un punt que anul·li la derivada primera i que faci negativa la derivada segona.

$V(x) = \frac{1}{6}(-x^2 + 3x)$,
$V'(x) = \frac{1}{6}(-2x + 3)$ i
$V''(x) = \frac{1}{6}(-2) = \frac{-1}{3}$.
Els punts singulars vindran d'anul·lar la primera derivada.
Resolem l'equació $-2x + 3 = 0$ d'on obtenim que hi ha un únic candidat que és $x = \frac{3}{2}$.
Com que en substituir la derivada segona ens dóna negatiu, tenim

$x = \frac{3}{2}$ hi ha el màxim que se'ns demana.

I el volum màxim $V\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{6}\left(-\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{-9}{4} + \frac{9}{2}\right) = \frac{1}{6}\cdot\frac{9}{4} = \frac{3}{8}$ unitats cúbiques

Pautes de correcció:
Apartat a)
0,50 punts pel càlcul dels vectors aresta.
0,25 punts pel càlcul del determinant (sense arribar al càlcul del valor absolut)
0,25 punts per l'argument del valor absolut a partir del signe del resultat del determinant.
Apartat b)
0,25 punts per les derivades.
0,25 punts pel plantejament d'anul·lar la derivada primera.
0,25 punts pel valor de x que maximitza el volum.
0,25 punts pel volum màxim.

39. PAU 2016 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 2

2. Siguin a R^3 el pla π d'equació $x - y + 2z = 2$ i els punts $A = (3, -1, 2)$ i $B = (1, 1, -2)$.

c) Comproveu que els punts A i B són simètrics respecte del pla π.

[1 punt]

d) Si r és la recta dels punts P de la forma $P = B + \lambda v$ en què λ és un paràmetre real i $v = (1, 1, 0)$, verifiqueu que els punts mitjans dels segments $\overline{AP}$ pertanyen al pla π.

[1 punt]

Resolució:

a) Per veure que els punts A i B són simètrics respecte del pla π, comprovarem que el vector $\overrightarrow{AB}$ és perpendicular al pla π (és a dir, que el vector $\overrightarrow{AB}$ és proporcional al vector normal del pla) i que el punt mitjà del segment $\overline{AB}$ pertany al pla π.

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = B - A = (-2, 2, -4) \sim (1, -1, 2) = v_n}$$

Per altra banda, el punt mitjà del segment $\overline{AB}$ és $M = \frac{A+B}{2} = (2, 0, 0)$ que pertany al pla π ja que $\boxed{2 - 0 + 2 \cdot 0 = 2}$.

b) Tenim $P = (1, 1, -2) + \lambda(1, 1, 0) = (1 + \lambda, 1 + \lambda, -2)$.
Els punts mitjans del segments $\overline{AP}$ són de la forma

$$M = \frac{A + P}{2} = \frac{(4 + \lambda, \lambda, 0)}{2} = (2 + \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, 0)$$

Comprovem que les coordenades del punt M satisfan l'equació del pla:

$$\boxed{2 + \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} + 2 \cdot 0 = 2, \text{efectivament.}}$$

Apartat a)

0,25 punts pel vector $\overrightarrow{AB}$.

0,25 punts per la proporcionalitat amb el vector normal del pla.

0,25 punts pel càlcul del punt mitjà.

0,25 punts per la comprovació que el punt mitjà pertany al pla.

Apartat b)

0,5 punts per l'expressió dels punts de la recta.

0,25 punts per l'expressió dels punts mitjans.

0,25 punts per la comprovació de pertinença al pla.

40. PAU 2016 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 5

5. Siguin les rectes $r\colon (x,y,z) = (2,3,-3) + \lambda(1,-1,0)$ i $s\colon \frac{x-3}{2} = y-5 = z+2$.

c) Estudieu si les rectes r i s són paral·leles o perpendiculars.

[1 punt]

d) Determineu la posició relativa entre les rectes r i s i calculeu l'equació paramètrica de la recta t que talla perpendicularment la recta r i la recta s.

[1 punt]

Resolució:

a) Els vectors directors respectius són $v_r = (1,-1,0)$ i $v_s = (2,1,1)$.

Observem que v_r i v_s no són proporcionals, per tant les rectes r i s no són paral·leles.
v_r i v_s no són perpendiculars ja que $v_r \cdot v_s = 2 - 1 + 0 = 1 \neq 0$, per tant les rectes r i s no són perpendiculars.

b) Mirem si les rectes r i s es tallen.

Igualem, per exemple, les equacions paramètriques

$$(2+\lambda, 3-\lambda, -3) = (3+2\mu, 5+\mu, -2+\mu)$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 2+\lambda & = & 3+2\mu \\ 3-\lambda & = & 5+\mu \\ -3 & = & -2+\mu \end{array}\right\}$$

De la tercera equació tenim $\mu = -1$, i substituint a la primera i a la segona obtenim $\lambda = -1$. Per tant, les rectes r i s es tallen en el punt $(1,4,-3)$.

Si la recta t ha de tallar perpendicularment la recta r i s, t passa pel punt $(1,4,-3)$ i té per vector director $v_r \times v_s$.

$$v_r \times v_s = \begin{vmatrix} i & 1 & 2 \\ j & -1 & 1 \\ k & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-1,3) \sim (1,1,-3)$$

I, per tant, tenim: $t\colon (x,y,z) = (1+\alpha, 4+\alpha, -3-3\alpha)$.

Apartat a)

0,5 punts per la resolució del no paral·lelisme.

0,5 punts per la resolució de la no perpendicularitat.

Apartat b)

0,25 punts per la posició relativa.

0,25 punts pel punt intersecció.

0,25 punts pel vector director de la recta *t*.

0,25 punts per l'equació paramètrica de la recta.

41. PAU 2015 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 2

2. A l'espai tridimensional considerem la recta $r: (x, y, z) = (3 + 2\alpha, -\alpha, 3 - \alpha)$ i els plans $\pi_1 : x + y + z = -1$ i $\pi_2 : (x, y, z) = (2 + \lambda, 1 - \lambda + \mu, \mu)$.

a) Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, que te la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla π_2.

[1 punt]

b) Trobeu els dos punts de la recta *r* que equidisten dels plans π_1 i π_2.

[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació

$Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Resolució:

a) Per a escriure π_2 en forma general o cartesiana fem

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 \\ y-1 & -1 & 1 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-2)(-1) + z - (y-1) = 0,\ -x + 2 + z - y + 1 = 0$$

Per tant l'equació cartesiana del pla és $\boxed{x + y - z = 3}$.

b) La distància d'un punt de *r* de la forma $P = (3 + 2\alpha, -\alpha, 3 - \alpha)$ a π_1 i π_2 ha de ser la mateixa, és a dir

$$\frac{|3 + 2\alpha - \alpha + 3 - \alpha + 1|}{\sqrt{3}} = \frac{|3 + 2\alpha - \alpha - 3 + \alpha - 3|}{\sqrt{3}}$$

$$|7| = |2\alpha - 3| \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha - 3 = 7 \rightarrow & \alpha = 5 \\ 2\alpha - 3 = -7 \rightarrow & \alpha = -2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} P_1 = (13, -5, -2) \\ P_2 = (-1, 2, 5) \end{matrix}}$$

Apartat a)

0,5 punts per la formulació de l'equació cartesiana del pla a partir del determinant o del càlcul del vector normal.

0,5 punts pel càlcul final.

Apartat b)

0,25 punts per la igualtat entre distàncies a partir de la fórmula.

0,25 punts pel primer desenvolupament.

0,25 punts per l'obtenció d'un dels punts.

0,25 punts per l'obtenció del segon punt.

---

42. PAU 2015 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 4

4. Siguin els plans de R^3 $\pi_1: -y + z = 2$, $\pi_2: -2x + y + z = 1$ i $\pi_3: 2x - 2z = -1$.

a) Calculeu la posició relativa dels tres plans.

[1 punt]

b) Comproveu que el pla π_3 és paral·lel a la recta definida per la intersecció dels plans π_1 i π_2.

[1 punt]

Resolució:

a) Plantegem el sistema d'equacions lineals format pels tres plans i estudiem l'existència de solucions. La matriu del sistema queda

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ \underbrace{2 \quad 0 \quad -2}_{A} & & & -1 \end{array}\right)}_{A'}$$

Calculem el determinant de la matriu de coeficients. $\det(A) = -2 - 2 + 4 = 0$, per tant tenim que $rang(A) < 3$ però com que el menor $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ és no nul tenim que $rang(A) = 2$.

Per a saber el rang de la matriu ampliada orlem el menor amb la tercera fila i la columna dels termes independents i com que $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 4 + 2 = -4 \neq 0 \Rightarrow$ $rang(A') = 3 \neq rang(A)$ i per tant el sistema és incompatible, és a dir, el tres plans no tenen cap punt en comú.

Observem també que els plans no són paral·les dos a dos, ja que els vectors normals no són proporcionals.

Per tant, els tres plans es tallen dos a dos però no tenen cap punt en comú.

b) La recta definida pels plans π_1 i π_2 és $r:\begin{cases} -y+z=2 \\ -2x+y+z=1 \end{cases}$ que té per vector director el producte vectorial dels vectors normals de cada pla, és a dir

$$v_r = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & 0 & -2 \\ j & -1 & 1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2,-2,-2) \equiv (1,1,1)$$

Per a comprovar que el pla π_3 és paral·lel a la recta *r* és suficient comprovar que el seu vector normal, $n_3 = (2,0,-2)$, és perperdicular amb $v_r = (1,1,1)$. I efectivament

$$n_3 \times v_r = 2+0-2=0 \Rightarrow \boxed{r||\pi_3}$$

Observació: El paral·lelisme de l'apartat b) també es pot demostrar argumentant que π_3 no pot tallar la recta $r = \pi_1 \cap \pi_2$, ja que si fos així aleshores hi hauria un punt en comú a tots tres plans, que no pot ser pel resultat de l'apartat a).

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts pel plantejament a partir de l'existència de solucions del sistema

0,25 punts pel càlcul dels rangs.

0,25 punts pel no tenir cap punt en comú.

0,25 punts pel no paral·lelisme

Apartat b)

0,25 punts pel vector director de *r*.

0,25 punts pel vector normal del pla.

0,25 punts pel plantejament de l'ortogonalitat entre els vectors.

0,25 punts pel càlcul final.

43. PAU 2015 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 2

2. Sigui r la recta de l'espai que té per equació r: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = z$ i sigui P el punt de coordenades (6, 0, -1).

a) Trobeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla que passa pel punt P i talla perpendicularment la recta r.

[1 punt]

b) Trobeu l'equació paramètrica del pla que passa pel punt P i conté la recta r.

[1 punt]

Resolució:

a) La recta r passa pel punt $Q = (1, -3, 0)$ i té vector director $v = (2, -1, 1)$.

Si el pla ha de tallar perpendicularment la recta r això vol dir que el vector v serà normal al pla i formarà els coeficients (A, B, C) de l'equació cartesiana.

Per tant l'equació del pla serà $2x - y + z = D$ i si ha de passar pel punt $P = (6, 0, -1)$ tenim $2 \cdot 6 - 0 + (-1) = D$ i per tant $D = 11$.

Així doncs el pla que es demana és el d'equació cartesiana $\boxed{2x - y + z = 11}$.

b) El pla que ens demanen té com a vectors directors el vector director de la recta $v = (2, -1, 1)$ i $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (1, -3, 0) - (6, 0, -1) = (-5, -3, 1)$. Per tant, tenint en compte que el pla passa per P, l'equació paramètrica del pla serà

$$(x, y, z) = (6, 0, -1) + \lambda(2, -1, 1) + \mu(-5, -3, 1)$$

$$= (6 + 2\lambda - 5\mu, -\lambda - 3\mu, -1 + \lambda + \mu)$$

Apartat a)

0,25 punts per identificar el vector director de r.

0,25 punts per veure el vector com a normal al pla.

0,25 punts per la part literal de l'equació general.

0,25 punts pel càlcul del terme independent.

Apartat b)

0,25 punts pel vector *v* com a un dels vectors directors.

0,25 punts pel vector PQ com a un dels vectors directors.

0,5 punts per l'equació paramètrica.

---

44. PAU 2015 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 4

4. Considereu a R^3 la recta que té per equació $r: (x, y, z) = (-4 + 2\lambda, -2, 1 - \lambda)$ i els plans π_1 i π_2 d'equacions $\pi_1: x + 2y + 2z = -1$ i $\pi_2: x - 2y + 2z = -3$, respectivament.

a) Determineu la posició relativa de π_1 i π_2.

[1 punt]

b) Comproveu que tots els punts de la recta *r* estan situats a la mateixa distància dels plans π_1 i π_2.

[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Resolució:

a) Els vectors normals dels respectius plans són $n_1 = (1,2,2)$ i $n_2 = (1,-2,2)$ que no són proporcionals i per tant els plans no són paral·lels. Per tant la posició relativa és que els plans π_1 i π_2 es tallen definint una recta intersecció.

b) Un punt genèric *R* de *r* és de la forma $R = (-4 + 2\lambda, -2, 1 - \lambda)$. Es tracta de demostrar que $d(R, \pi_1) = d(R, \pi_2)$, amb independència del paràmetre λ. Quan plantegem ambudes distàncies ens hem de preguntar si es compleix

$$\frac{|-4 + 2\lambda + 2(-2) + 2(1 - \lambda) + 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|-4 + 2\lambda - 2(-2) + 2(1 - \lambda) + 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}}.$$

I, efectivament, quan fem els càlculs obtenim la igualtat

$$\frac{|-5|}{3} = \frac{|5|}{3}$$

que és certa independentment del valor del paràmetre λ.
És a dir, tota la recta *r* equidista dels dos plans π_1 i π_2.

Observació: Com que l'enunciat només demana comprovar l'equidistància NO cal que l'estudiant expliciti que la recta és a 5/3 unitats dels plans.

Apartat a)

0,5 punts per la identificació dels dos vectors normals.

0,5 punts per la posició relativa.

Apartat b)

0,5 punts pel plantejament de la igualtat

0,5 punts per la resolució.

---

45. PAU 2015 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 3

3. Siguin el punt $P = (2,0,2)$ i el pla π d'equació $x - y + z = 1$.

a) Calculeu l'equació paramètrica de la recta que passa pel punt P i és perpendicular al pla π.

[1 punt]

b) Calculeu la distància del punt P al pla π.
[1 punt]

Resolució:

c) Un vector director de la recta que busquem, com que se'ns demana que sigui perpendicular al pla π, serà el vector normal del pla, $(A, B, C) = (1, -1, 1)$ i per tant l'equació paràmetrica de la recta

$$(x, y, z) = (2,0,2) + \lambda(1, -1, 1) = (2 + \lambda, -\lambda, 2 + \lambda)$$

d) Per a calcular la distància podem aplicar la fórmula

$$d(P, \pi) = \left| \frac{2 - 0 + 2 - 1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} \right| = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\ unitats.$$

Observació: Per al càlcul de la distància també es pot passar per la projecció ortogonal del punt P sobre el pla, que serà el punt $Q = (1,1,1)$, i calcular la distància de P a Q. En aquest cas també puntuació màxima.

Apartat a)

0,5 punts pel plantejament del vector normal del pla com a vector director de la recta.

0,5 punts per l'equació paramètrica.

Apartat b)

0,5 punts pel plantejament de la fórmula (o el càlcul de la projecció)

0,5 punts pel càlcul final (o el càlcul de la norma)

---

46. PAU 2015 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 6

6. Siguin a $\mathbb{R}^3$ el punt $P = (2,3,3)$ i la recta r: $(x,y,z) = (1,2,3) + t(1,1,1)$.

a) Calculeu l'equació paramètrica del pla que passa pel punt P i conté la recta r.

[1 punt]

b) Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla que passa pel punt P i és perpendicular a la recta r.

[1 punt]

Resolució:

a) r és la recta que passa per $R = (1,2,3)$ i que té vector director $v_r = (1,1,1)$.

Uns vectors directors del pla que se'ns demana seran $v_r = (1,1,1)$ i $\overrightarrow{PR} = R - P = (-1,-1,0)$. Per tant l'equació paramètrica del pla serà

$$(x,y,z) = (2,3,3) + \lambda(1,1,1) + \mu(-1,-1,0) = (2 + \lambda - \mu, 3 + \lambda - \mu, 3 + \lambda)$$

b) Com que el pla ha de ser perpendicular amb r, el vector director de la recta $v_r = (1,1,1)$ serà el vector normal del pla, és a dir els coeficients (A,B,C). Per tant el pla és de la forma $x + y + z = D$.

I quan fem passar el pla pel punt $P = (2,3,3)$ obtenim $x + y + z = 8$.

Apartat a)

0,25 punts per identificar el punt i el vector de r.

0,25 punts pel vector $\overrightarrow{PR}$.

0,25 punts pel plantejament de l'equació paramètrica.

0,25 punts per la solució final.

Apartat b)

0,5 punts per veure el vector director de r com el normal al pla.

0,5 punts per la solució final.

47. PAU 2014 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 1

1. Siguin r i s les rectes de $\mathbb{R}^3$ d'equacions

$$r: x+5 = y-5 = \frac{z-3}{2}$$
$$s: \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-1}$$

a) Estudieu el paral·lelisme i la perpendicularitat entre les rectes r i s.

[1 punt]

b) Trobeu l'equació general (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla π que conté la recta r i és paral·lel a la recta s. Calculeu la distància entre la recta s i el pla π obtingut.

[1 punt]

Resolució:

a) Els vectors directors de les rectes r i s són $v_r = (1,1,2)$ i $v_s = (2,3,-1)$.

Els vectors v_r i v_s no són proporcionals, ja que un no és múltiple de l'altre ($\frac{1}{2} \neq \frac{1}{3} \neq \frac{2}{-1}$) i per tant les rectes r i s no són paral·leles.

El producte escalar dels dos vectors directors és $v_r \cdot v_s = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) = 3 \neq 0$ per tant les rectes r i s no són perpendiculars.

b) Si el pla π ha de contenir la recta r aleshores $v_r = (1,1,2)$ serà un dels seus vectors directors i el pla π haurà de passar pel punt de la recta $P_r = (-5,5,3)$. Per altra banda si el pla π ha de ser paral·lel a la recta s aleshores $v_s = (2,3,-1)$ serà també un dels vectors directors del pla.

Així doncs, l'equació general del pla π s'obtindrà de la igualtat:

$$\begin{vmatrix} x+5 & 1 & 2 \\ y-5 & 1 & 3 \\ z-3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Quan desenvolupem obtenim $(x+5)(-7) - (y-5)(-5) + (z-3)1 = 0$.

Amb el que tenim $\pi: -7x + 5y + z = 63$.

Com que el pla π és paral·lel a la recta s,

$$d(s,\pi) = d(P_s,\pi) = d\big((3,2,-1), -7x+5y+z-63=0\big)$$
$$= \frac{|(-7)\cdot 3 + 5\cdot 2 + (-1) - 63|}{\sqrt{(-7)^2+5^2+1^2}} = \frac{75}{\sqrt{75}} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}.$$

Apartat a)

0,5 punts per l'estudi de paral·lelisme.

0,5 punts per l'estudi de perpendicularitat.

Apartat b)

0,25 punts per la identificació dels vectors directors del pla.

0,25 punts per l'equació general del pla.

0,25 punts pel plantejament de la distància a partir d'un punt qualsevol de la recta.

0,25 punts pel càlcul de la distància d'un punt a un pla.

---

48. PAU 2014 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 5

5. Donats els vectors $u = (2, -1, 0)$, $v = (-1, 3, 4)$ i $w = (0, 3a - 1, 4a)$.

a) Calculeu els valors del paràmetre a perquè els vectors u, v i w siguin linealment dependents.

[1 punt]

b) Calculeu els valors del paràmetre a perquè que un tetraedre d'arestes u, v i w tingui un volum de 2/3 unitats cúbiques.

[1 punt]

Resolució:

a) Per tal que els vectors u, v i w siguin linealment dependents, la matriu quadrada d'ordre 3 formada pels tres vectors ha de tenir rang menor de 3, és a dir que el seu determinant s'ha d'anul·lar.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 3a-1 \\ 0 & 4 & 4a \end{vmatrix} = 24a - 8(3a-1) - 4a = 8 - 4a.$$

Per tant el rang serà inferior a 3 només quan $8 - 4a = 0$, és a dir $\boxed{a = 2}$.

b) El volum d'un tetraede d'arestes u, v i w es calcula amb l'expressió

$$V = \frac{1}{6}|[u, v, w]|$$

Així doncs tenim l'equació $\frac{|8-4a|}{6} = \frac{2}{3}$, és a dir $|8 - 4a| = 4$, que segons el signe de l'expressió de dins del valor absolut dóna lloc a dues diferents equacions.

- Si $8 - 4a \geq 0 \Rightarrow 8 - 4a = 4 \Rightarrow \boxed{a = 1}$.
- Si $8 - 4a < 0 \Rightarrow 8 - 4a = -4 \Rightarrow \boxed{a = 3}$.

Apartat a)

0,25 punts pel plantejament de la dependència en termes de determinant.

0,5 punts pel càlcul del determinant.

0,25 punts per la resolució de l'equació.

Apartat b)

0,25 punts per la formulació del volum.

0,25 punts pel plantejament de l'equació.

0,25 punts per la primera solució.

0,25 punts per la segona solució.

49. PAU 2014 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 2

2. Considereu el punt $A = (1, 2, 3)$.

a) Calculeu el punt simètric del punt A respecte de la recta d'equació

$$r: (x, y, z) = (3 + \lambda, 1, 3 - \lambda).$$

[1 punt]

b) Calculeu el punt simètric del punt A respecte del pla que té per equació

$$\pi: x + y + z = 3.$$

[1 punt]

Resolució:

a) Per a fer el simètric respecte de la recta r construirem primer el pla, diguem-ne π', que talla perpendicularment la recta r i que passa pel punt A. Aquest pla té per vector normal el vector director de r, és a dir $(1,0,-1)$.

Per tant és un pla d'equació $x - z = D$ i si ha de passar per A, tindrem $1 - 3 = D$, o sigui $D = -2$. Per tant el pla perpendicular té equació $\pi': x - z = -2$.

Calculem el punt intersecció, diguem-ne B, del pla amb la recta, el que seria el punt projecció del punt A sobre la recta r, substituint l'equació paràmetrica de la recta en l'equació del pla.

$$3 + \lambda - (3 - \lambda) = -2$$

D'on tenim $\lambda = -1$ i per tant $B = (2,1,4)$.

Així el punt simètric del punt A respecte de la recta, diguem-ne A', l'obtindrem fent $\boxed{A'} = A + 2\overrightarrow{AB} = (1,2,3) + 2\big((2,1,4) - (1,2,3)\big) = (1,2,3) + (2,-2,2) = \boxed{(3,0,5)}$.

b) Obtindrem primer el punt, diguem-ne B, projecció perpendicular del punt A sobre el pla π, construint la recta perpendicular al pla i que passa per A. El vector director d'aquesta recta serà el vector normal del pla, és a dir $(1,1,1)$.

Per tant, l'equació de la recta serà $s: (x, y, z) = (1 + \lambda, 2 + \lambda, 3 + \lambda)$.
La intersecció de s i π és quan

$$1 + \lambda + 2 + \lambda + 3 + \lambda = 3.$$

D'on tenim $\lambda = -1$ i per tant $B = (0,1,2)$.

Així el punt simètric del punt A respecte del pla, diguem-ne A', l'obtindrem fent $\boxed{A'} = A + 2\overrightarrow{AB} = (1,2,3) + 2\big((0,1,2) - (1,2,3)\big) = (1,2,3) + (-2,-2,-2) = \boxed{(-1,0,1)}$.

Apartat a)

0,25 punts per identificar el vector director de la recta.

0,25 punts per l'equació del pla perpendicular.

0,25 punts pel punt intersecció.

0,25 punts per la construcció del punt simètric.

Apartat b)

0,25 punts per identificar el vector normal del pla.

0,25 punts per l'equació de la recta perpendicular.

0,25 punts pel punt intersecció.

0,25 punts per la construcció del punt simètric.

---

50. PAU 2014 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 5

5. Siguin r i s les rectes de $\mathbb{R}^3$ d'equacions r: $\frac{x-2}{3} = y = \frac{z+1}{4}$ i s: $(x, y, z) = (1 + 2\alpha, 3 - \alpha, 4 + 3\alpha)$, amb $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Comproveu que els punts mitjans dels segments que tenen un extrem situat sobre la recta *r* i l'altre extrem situat sobre la recta *s* formen un pla.
[1 punt]

b) Trobeu l'equació general (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla de l'apartat anterior.
[1 punt]

Resolució:

a) Els punts generals de les rectes r i s són, respectivament, de la forma

$$R = (2 + 3\lambda, \lambda, -1 + 4\lambda)$$
$$S = (1 + 2\alpha, 3 - \alpha, 4 + 3\alpha).$$

.Calculem l'expressió dels punts mitjans:

$$M = \frac{R+S}{2} = \left(\frac{3 + 3\lambda + 2\alpha}{2}, \frac{3 + \lambda - \alpha}{2}, \frac{3 + 4\lambda + 3\alpha}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) + \lambda\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{4}{2}\right) + \alpha\left(\frac{2}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

I podem veure que efectivament formen un pla que és, a partir de l'expressió vectorial anterior, el que passa pel punt $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ i té per vectors directors els vectors directors de les dues rectes, és a dir $(3,1,4)$ i $(2, -1,3)$.

b) Sabem que és el pla que passa pel punt $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ i té per vectors directors els vectors directors $(3,1,4)$ i $(2, -1,3)$, per tant seran els punts (x, y, z) que satisfan l'equació

$$\begin{vmatrix} x - \frac{3}{2} & 3 & 2 \\ y - \frac{3}{2} & 1 & -1 \\ z - \frac{3}{2} & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$7\left(x - \frac{3}{2}\right) - 1\left(y - \frac{3}{2}\right) - 5\left(z - \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$\boxed{7x - y - 5z = \frac{3}{2}}$$

Apartat a)

0,25 punts per les equacions paramètriques de les rectes.

0,5 punts per l'expressió general dels punts mitjos.

0,25 punts per l'argumentació de formar un pla.

Apartat b)

0,5 punts per la formulació de l'equació.

0,5 punts pel càlcul final.

---

51. PAU 2014 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 3

3. Siguin els punts $P = (1, 1, 0)$, $Q = (1, 0, 1)$ i $R = (0, 1, 1)$ i el pla $\pi: x + y + z = 4$.

a) Trobeu l'equació general (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla que passa pels punts P, Q i R.

[1 punt]

b) Si S és un punt de π, comproveu que el volum del tetraedre de vèrtexs P, Q, R i S no depèn del punt S.

[1 punt]

Resolució:

a) El pla que passa pels punts P, Q i R té per vectors directors, per exemple, els vectors $\overrightarrow{PQ} = (1,0,1) - (1,1,0) = (0,-1,1)$ i $\overrightarrow{PR} = (0,1,1) - (1,1,0) = (-1,0,1)$ i per tant un punt (x, y, z) del pla haurà de satisfer la igualtat (demanant que passi pel punt P)

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ y-1 & -1 & 0 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = -x + 1 - y + 1 - z = 0.$$

És a dir $\boxed{x + y + z = 2}$.

b) Si S és un punt del pla $\pi: x + y + z = 4$, aleshores S és de la forma $(x, y, 4 - x - y)$.

Així doncs el tetraedre de vèrtexs P, Q, R i S tindrà per arestes els vectors

$\overrightarrow{PQ} = (1,0,1) - (1,1,0) = (0,-1,1)$,

$\overrightarrow{PR} = (0,1,1) - (1,1,0) = (-1,0,1)$ i

$\overrightarrow{PS} = (x, y, 4 - x - y) - (1,1,0) = (x - 1, y - 1, 4 - x - y)$

i per tant el seu volum serà

$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}\right]\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 0 & -1 & x-1 \\ -1 & 0 & y-1 \\ 1 & 1 & 4-x-y \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}|-x+1-y+1-4+x+y|$$

$$= \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}\ u^3}.$$

que és una constant i per tant independent del punt S.

Alternativament: El volum del tetraedre no depèn del punt S ja que es tracta d'un tetraedre amb tres punts (P, Q i R) sobre un pla $x + y + z = 2$ i un quart punt (S) sobre un pla que és paral·lel al pla anterior $x + y + z = 4$. Observem que els dos plans tenen per vector normal el vector $(1,1,1)$. Per tant tindrem sempre la mateixa "àrea de la base", l'àrea del triangle PQR, i la mateixa "alçada", la distància entre els dos plans.

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,5 punts per l'obtenció dels dos vectors directors.

0,25 punts pel plantejament de l'equació general.

0,25 punts pel càlcul final.

Apartat b)

0,5 punts per la forma paramètrica d'un punt del pla.

0,25 punts per la formulació del volum.

0,25 punts pel càlcul del volum.

Observació: Si l'apartat b) es resol de manera totalment correcta només argumentant a partir del paral.lelisme entre els plans i el fet que, aleshores, els tetraedres resultants tenen la mateixa àrea de la base i la mateix alçada, es puntuarà l'apartat amb 1 punt.

4. Donats els plans $\pi_1\colon\ x-4y+z=2m-1$ i $\pi_2\colon\ 2x-(2m+2)y+2z=3m+1$.

a) Determineu els valors de *m* perquè els plans π_1 i π_2 s'intersequin en una recta i calculeu un vector director de la recta resultant que no depengui de *m*.

[1 punt]

b) Sigui el pla $\pi\colon\ 3x-2y+3z=8$. Estudieu la posició relativa del pla π amb la recta *r* definida per la intersecció dels plans π_1 i π_2 quan $m=1$.

[1 punt]

Resolució:

a) Que els dos plans π_1 i π_2 s'intersectin en una recta, diguem-ne r vol dir que el sistema d'equacions format per les respectives equacions dels plans és compatible indeterminat.

El sistema és

$$\begin{cases}\pi_1\colon\ x-4y+z=2m-1\\ \pi_2\colon\ 2x-(2m+2)y+2z=3m+1\end{cases}$$

o en forma matricial

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -4 & 1 & 2m-1\\ 2 & -2m-2 & 2 & 3m+1\end{array}\right),$$

i només es tracta de garantir que la matriu de coeficients tingui rang 2, és a dir que el menor $\begin{vmatrix}1 & -4\\ 2 & -2m-2\end{vmatrix}$ sigui diferent de 0.

$$\begin{vmatrix}1 & -4\\ 2 & -2m-2\end{vmatrix}=-2m-2+8=-2m+6=0\Leftrightarrow m=3.$$

Per tant, π_1 i π_2 s'intersecten en una recta si i només si $m\neq 3$.

Per a aquests casos el vector director de la recta r serà el producte vectorial dels respectius vectors normals de cada pla, és a dir $(1,-4,1)$ i $(2,-2m-2,2)$, o el que és equivalent el producte vectorial de $(1,-4,1)$ i $(1,-m-1,1)$.

Per tant tindrem

$$v_r=(1,-4,1)\times(1,-m-1,1)=\begin{vmatrix}i & 1 & 1\\ j & -4 & -m-1\\ k & 1 & 1\end{vmatrix}=(m-3,0,-m+3).$$

Ara bé com que estem en el cas $m\neq 3$, la primera i tercera component del vector v_r són diferent de 0 i podem simplificar el vector dividint per $m-3$ i obtenint un vector director equivalent i que no depèn de *m*: $\boxed{v_r=(1,0,-1)}$.

b) El vector director de la recta *r* és $v_r=(1,0,-1)$ i el vector normal del pla π és $v_\pi=(3,-2,3)$. Com que $v_r\cdot v_\pi=3-3=0$ aleshores els dos vectors són perpendiculars, $v_r\perp v_\pi$, i per tant la recta *r* és paral·lela al pla π.

Per a saber si la recta *r* està continguda o no en el pla, podem agafar un punt de *r* i veure si satisfà l'equació del pla.

Si fem, per exemple, $x = 0$ en les equacions de *r*, obtenim el punt $(0, \frac{1}{2}, 3)$ que podem comprovar que també pertany al pla π, ja que $3 \cdot 0 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 3 = -1 + 9 = 8$. Per tant, la recta *r* està continguda en el pla π.

Observació: Alternativament, també es podia decidir a partir d'estudiar les interseccions dels plans π_1, π_2 i π, per al cas $m = 1$, i veure que es tracta d'un sistema compatible indeterminat.

Apartat a)

0,25 punts pel plantejament matricial.

0,25 punts pel valor que fa que el rang sigui 2.

0,25 punts pel vector director.

0,25 punts per veure que es pot reduir i és independent del paràmetre.

Apartat b)

0,5 punts pel paral·lelisme de la recta i el pla.

0,5 punts per veure que la recta està continguda en el pla.

---

53. PAU 2013 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 3

3.- Donats el pla $\pi\colon x+2y-z=3$ ***i la recta*** $r\colon \dfrac{x-1}{2}=y=\dfrac{z+m}{4}$ **,**

(a) ***Comproveu que el vector característic (o normal) de*** π ***i el vector director de*** r ***són perpendiculars.***

(b) ***Estudieu la posició relativa de*** π ***i*** r ***en funció del paràmetre*** m**.**

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) El vector característic del pla és $v_\pi=(1,2,-1)$; el vector director de la recta és $v_r=(2,1,4)$. Aquests vectors seran perpendiculars si i sol si el seu producte escalar és nul.

$$(1,2,-1)\cdot(2,1,4)=1\cdot 2+2\cdot 1+(-1)\cdot 4=2+2-4=0\,,$$

(b) Tenint en compte l'apartat anterior, la recta i el pla solament poden ser paral·lels o incidents (la recta està continguda dins del pla). En aquest segon cas, qualsevol punt de la recta ha de complir l'equació del pla. Agafem el punt $P=(1,0,-m)$; aquest punt pertany al pla si i sol si $1+2\cdot 0-(-m)=3$; és a dir, si i sol si $m=2$.

En definitiva, si $m=2$, la recta està continguda al pla; si $m\neq 2$, la recta i el pla són paral·lels.

Pautes de Correcció

Apartat a

0,5 punts per localitzar el vector característic del pla i el director de la recta.

0,25 punts per efectuar el producte escalar.

0,25 punts per concloure que són perpendiculars perquè el seu producte escalar val zero.

Apartat b

0,5 punts per raonar, a la vista del resultat anterior, que el pla i la recta solament poden ser paral·lels o incidents (recta continguda al pla).

0,25 punts per raonar que, si són incidents, qualsevol punt de la recta ha de ser del pla.

0,25 punts per arribar al valor $m=2$ i discutir quina és la posició relativa en funció de m.

$\begin{bmatrix} 2 & a & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 5 & b & 8 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

54. PAU 2013 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 5

5.- Donats el pla $\pi : 2x - y + 3z - 8 = 0$ ***i el punt*** $P = (6, -3, 7)$**,**

(a) ***Trobeu l'equació contínua de la recta que passa per*** P ***i és perpendicular a*** π**.**

(b) ***Trobeu el punt del pla*** π ***que està més proper al punt*** P**.**

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Podem agafar com a vector director de la recta que busquem el vector característic del pla π; llavors, l'equació contínua de la recta és

$$\frac{x-6}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-7}{3}\,.$$

(b) El punt del pla més proper al punt P és el que es troba a la recta perpendicular al pla passant per P. Així, el punt que estem buscant és la solució de les equacions

$$\frac{x-6}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-7}{3}, \quad \text{juntament amb} \quad 2x - y + 3z - 8 = 0\,.$$

Hi ha vàries formes de resoldre el sistema. Una d'elles és convertint l'equació contínua de la recta en dues equacions,

$$\frac{x-6}{2} = \frac{y+3}{-1} \Longrightarrow x + 2y = 0\,; \qquad \frac{y+3}{-1} = \frac{z-7}{3} \Longrightarrow 3y + z = -2\,.$$

Ajuntant aquestes dues equacions amb la del pla ens queda un sistema,

$$\left.\begin{array}{rcl} x + 2y & = & 0 \\ 3y + z & = & -2 \\ 2x - y + 3z & = & 8 \end{array}\right\},$$

que té per solució $x = 2$, $y = -1$, $z = 1$.

Una altra forma és passar l'equació de la recta a la forma paramètrica,

i substituir aquests valors a l'equació del pla,

$$2x - y + 3z - 8 = 0 \Longrightarrow 2(6 + 2\lambda) - (-3 - \lambda) + 3(7 + 3\lambda) - 8 = 0 \Longrightarrow 14\lambda + 28 = 0 \Longrightarrow \lambda = -2\,.$$

Les coordenades del punt són $x = 6 + 2(-2) = 2\,$, $y = -3 - (-2) = -1$, $z = 7 + 3(-2) = 1\,$.

D'una manera o altra, el punt buscat és $Q = (2, -1, 1)$.

Pautes de Correcció

Apartat a

0,5 punts per raonar que podem agafar com a vector director de la recta el vector característic del pla.

0,5 punts per l'equació en forma contínua de la recta. Encara que és difícil que ho facin, si donen com a solució qualsevol altra forma de l'equació de la recta, compteu solament 0,25 punts.

Apartat b

0,5 punts per raonar que el punt buscat és la intersecció entre el pla π i la recta trobada a l'apartat anterior.

0,5 punts per trobar el punt més proper.

Si es "llancen" a fer el punt d'intersecció sense explicar el perquè, no compteu res d'aquest apartat. La raó és que es demana el punt més proper, no el punt d'intersecció.

---

55. PAU 2013 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 1

1.- Sigui $\pi : 3x - 2y + z = 10$ ***.***

(a) ***Trobeu l'equació contínua de la recta*** r ***perpendicular a*** π ***que passa pel punt*** $P = (-1, 3, 2)$***.***

(b) ***Trobeu també l'equació cartesiana (és a dir, de la forma*** $Ax + By + Cz + D = 0$***) del pla*** π_1 ***paral·lel a*** π ***que passa pel mateix punt*** P***.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Podem agafar com a vector director de la recta el vector característic del pla. Amb això,

$$r : \frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{1}\,.$$

(b) Els plans paral·lels a π tenen per equació $3x - 2y + z + D = 0$. Com que ha de passar pel punt P, cal que

$$3(-1) - 2 \cdot 3 + 2 + D = 0\,.$$

D'aquí, $D = 7\,$. L'equació cartesiana del pla π_1 és $3x - 2y + z + 7 = 0\,$.

També es pot utilitzar la fórmula $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0\,$; és a dir,

$$3(x + 1) - 2(y - 3) + (z - 2) = 0\,.$$

---

56. PAU 2013 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 4

4.- Un triangle d'àrea $3/2$ ***té dos dels seus vèrtexs als punts*** $P=(0,0,0)$ ***i*** $Q=(2,0,1)$***. El tercer vèrtex,*** R***, és un punt de la recta***

$$r:\begin{cases} x+y+z=0 \\ y=1 \end{cases}$$

i té la primera coordenada no nul·la. Calculeu les coordenades del vèrtex R***.***

[2 punts]

De les equacions que defineixen la recta r, es dedueix que qualsevol punt de la recta ha de ser, per exemple, de la forma $R=(-1-z,1,z)$ (també és possible, evidentment, posar $R=(x,1,-1-x)$). Hi ha altres formes d'arribar a la mateixa expressió, tal com buscar el vector director de la recta r,

$$v_r=(1,1,1)\times(0,1,0)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-i+k=(-1,0,1)\,,$$

un punt de la recta, com $A=(-1,1,0)$ (i molts altres), i construir les equacions paramètriques de la recta, $x=-1-\lambda$, $y=1$, $z=\lambda$; amb això, $R=(-1-\lambda,1,\lambda)$.

Una vegada localitzat el punt R, hi ha al menys dos camins per acabar el problema.

Solució 1

L'àrea d'un triangle de vèrtexs P, Q i R es pot calcular mitjançant la fórmula $A=\dfrac{1}{2}\|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\|$. Amb això,

$$A=\frac{1}{2}\|(2,0,1)\times(-1-z,1,z)\|=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 1 \\ -1-z & 1 & z \end{vmatrix}\right\|=\frac{1}{2}\|(-1,-3z-1,2)\|=\frac{1}{2}\sqrt{9z^2+6z+6}\,.$$

Volem que aquesta àrea sigui $3/2$. Per tant, cal resoldre l'equació $\sqrt{9z^2+6z+6}=3$. Elevant al quadrat i realitzant les operacions adequades, arribem a l'equació $9z^2+6z-3=0$, que té com a solucions $z=-1$ i $z=1/3$.

D'entrada, doncs, hi ha dos possibles punts R,

$$R_1=(0,1,-1)\ \text{ i }\ R_2=\left(-\frac{4}{3},1,\frac{1}{3}\right).$$

D'acord amb l'enunciat, ens hem de quedar amb el que té la primera component no nul·la. És a dir, $R=(-4/3,1,1/3)$.

Solució 2

El problema es pot resoldre també buscant una base i l'altura corresponent del triangle. Per exemple, podem fer

$$b=d(P,Q)=\sqrt{2^2+0^2+1^2}=\sqrt{5}\ ;\quad h=d(R,\overline{PQ})=\frac{\|\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{PQ}\|}{\|\overrightarrow{PQ}\|}=\frac{\sqrt{9z^2+6z+6}}{\sqrt{5}}\,.$$

Llavors, $\dfrac{bh}{2}=\dfrac{3}{2}$ ens porta a $\sqrt{9z^2+6z+6}=3$. A partir d'aquí, se segueix com a la solució 1.

57. PAU 2013 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 5

5.- Donats els punts $P = (1, 0, -1)$ ***i*** $Q = (-1, 2, 3)$***, trobeu un punt*** R ***de la recta*** $r : \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+4}{3} = \dfrac{z-3}{-1}$ ***tal que el triangle de vèrtexs*** P***,*** Q***,*** R ***és isòsceles, essent*** $\overline{PR}$ ***i*** $\overline{QR}$ ***els costats iguals del triangle.***

[2 punts]

Solució 1

El punt R de la recta és de la forma $R = (-3 + 2\lambda, -4 + 3\lambda, 3 - \lambda)$ (equacions paramètriques de la recta). Volem que $d(P, R) = d(Q, R)$.

$$\begin{aligned} d(P,R) &= \sqrt{(-3+2\lambda-1)^2 + (-4+3\lambda-0)^2 + (3-\lambda+1)^2} = \sqrt{14\lambda^2 - 48\lambda + 48}\,; \\ d(Q,R) &= \sqrt{(-3+2\lambda+1)^2 + (-4+3\lambda-2)^2 + (3-\lambda-3)^2} = \sqrt{14\lambda^2 - 44\lambda + 40}\,. \end{aligned}$$

Cal que $14\lambda^2 - 48\lambda + 48 = 14\lambda^2 - 44\lambda + 40$. La solució d'aquesta equació és $\lambda = 2$. El punt buscat és $R = (1, 2, 1)$.

Solució 2

Busquem l'equació del pla que passa pel punt mig del segment $\overline{PQ}$ amb vector característic $\overrightarrow{PQ}$; tots els punts d'aquest pla equidisten de P i Q. Després es busca la intersecció entre aquest pla i la recta r.

Punt mig: $M = \dfrac{P+Q}{2} = (0, 1, 1)$.

Vector característic: $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-2, 2, 4)$.

Equació del pla: $-2(x - 0) + 2(y - 1) + 4(z - 1) = 0 \Longrightarrow x + y + 2z + 3 = 0$.

Substituint l'expressió general dels punts de la recta r, $R = (-3 + 2\lambda, -4 + 3\lambda, 3 - \lambda)$ en l'equació del pla, obtenim que $\lambda = 2$, igual que en l'apartat anterior.

També es pot acabar aquest segon procediment resolent el sistema d'equacions lineals format per dues equacions obtingudes de la recta r i l'equació del pla que hem trobat.

---

58. PAU 2013 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 1

1.- Siguin π_1 ***el pla*** $2x+3y-z=4$ ***i*** π_2 ***el pla*** $x-2y-4z=10$ ***.***

(a) ***Comproveu que els plans*** π_1 ***i*** π_2 ***són perpendiculars.***

(b) ***Trobeu l'equació contínua de la recta paral·lela als plans*** π_1 ***i*** π_2 ***i que passa pel punt*** $P=(-1,3,2)$***.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Un vector característic de cada un dels plans és $v_1=(2,3,-1)$ i $v_2=(1,-2,-4)$, respectivament. Els plans són perpendiculars si els seus vectors característics també ho són, és a dir, si el producte escalar dels vectors característics dóna zero.

$$v_1\cdot v_2=2\cdot 1+3(-2)+(-1)(-4)=2-6+4=0\,.$$

(b) Si la recta r és paral·lela als dos plans, el seu vector director v_r és perpendicular als vectors característics del dos plans. Per tant, podem agafar

$$v_r=v_1\times v_2=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & 3 & -1\\ 1 & -2 & -4\end{vmatrix}=-14i+7j-7k=(-14,7,-7)\,,$$

o qualsevol proporcional a ell com, per exemple, $(2,-1,1)$. L'equació buscada és

$$r:\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-2}{1}\,.$$

59. PAU 2013 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 3

3.- Donats els punts $P=(1,-1,2)$ **,** $Q=(2,0,1)$ ***i*** $R=(3,2,-1)$**,**

(a) ***Trobeu l'equació cartesiana (és a dir, de la forma*** $Ax+By+Cz+D=0$***) del pla que determinen.***

(b) ***Trobeu un punt*** S ***pertanyent a la recta*** $r:\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-5}{-3}$ **, *de manera que el tetraedre de vèrtexs*** P **,** Q **,** R **,** S ***tingui volum 1/2*****.**

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) L'equació cartesiana del pla, $Ax+By+Cz+D$, ha de ser satisfeta pels tres punts donats. Per tant,

$$\left.\begin{array}{r} A\cdot 1+B(-1)+C\cdot 2+D=0 \\ A\cdot 2+B\cdot 0+C\cdot 1+D=0 \\ A\cdot 3+B\cdot 2+C(-1)+D=0 \end{array}\right\}.$$

La solució d'aquest sistema d'equacions és $A=0$, $B=-D$, $C=-D$. Fent $D=1$, l'equació del pla buscat és $y+z-1=0$.

Aquest apartat es pot resoldre d'altres maneres. Per exemple, trobant directament l'equació fent

$$\begin{vmatrix} 2-1 & 3-1 & x-1 \\ 0+1 & 2+1 & y+1 \\ 1-2 & -1-2 & z-2 \end{vmatrix}=0 \iff y+z-1=0\,.$$

(b)

El punt S, per pertànyer a la recta r, és de la forma $S = (5+2\lambda, 1-\lambda, 5-3\lambda)$. El volum del tetraedre de vèrtexs P, Q, R i S és

$$V = \frac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}\right)\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4+2\lambda \\ 1 & 3 & 2-\lambda \\ -1 & -3 & 3-3\lambda \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}|5-4\lambda|\,.$$

Com que volem que $V = 1/2$, ens queda $|5-4\lambda| = 3$. Això ens dóna dues possibilitats:

- $5-4\lambda = 3$;
- $5-4\lambda = -3$.

De la primera, $\lambda = \dfrac{1}{2}$ i el punt és $S_1 = \left(6, \dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$; de la segona, $\lambda = 2$ i el punt buscat és $S_2 = (9, -1, -1)$. Com que solament es demana un punt, la solució és qualsevol dels dos punts.

Solució 2

Sigui $S = (x, y, z)$ el punt buscat. El volum dels tetraedre és

$$V = \frac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}\right)\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 1 & 2 & x-1 \\ 1 & 3 & y+1 \\ -1 & -3 & z-2 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}|y+z-1|\,;\quad V = \frac{1}{2} \iff |y+z-1| = 3\,.$$

De l'expressió contínua de l'equació de la recta se'n treuen dues equacions; per exemple, $x+2y = 7$, $3y - z = -2$. Amb elles i la que ens proporciona el volum del tetraedre podem muntar dos sistemes,

$$\left.\begin{array}{l} y+z-1 = 3 \\ x+2y = 7 \\ 3y-z = -2 \end{array}\right\}$$

que té per solució $x = 6$, $y = 1/2$, $z = 7/2$, i

$$\left.\begin{array}{l} y+z-1 = -3 \\ x+2y = 7 \\ 3y-z = -2 \end{array}\right\}$$

amb la solució $x = 9$, $y = -1$, $z = -1$.

Solució 3

Ja que tenim l'equació del pla determinat pels punts P, Q i R, podem buscar el volum del tetraedre amb la fórmula $V = \dfrac{A_b \cdot h}{3}$, essent A_b l'àrea del triangle base i h l'altura del tetraedre.

$$A_b = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\| = \|(0,1,1)\| = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

$$h = d(S,\pi) = \frac{|y+z-1|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}} = \frac{|y+z-1|}{\sqrt{2}}\,.$$

Llavors,

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{1}{6}|y+z-1|\,.$$

A partir d'aquí se segueix com a la solució 2. Evidentment, el procés es igualment correcte agafant $S = (5+2\lambda, 1-\lambda, 5-3\lambda)$.

60. PAU 2013 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 5

5.- Considereu els punts $A = (-1, 2, 4)$ ***i*** $B = (3, 0, -2)$***.***

(a) ***Trobeu l'equació del pla format per tots els punts que equidisten de*** A ***i*** B***.***

(b) ***Donat un punt*** $C = (x, y, z)$***, dividim el segment*** $\overline{AC}$ ***en tres parts iguals, obtenint els punts*** A***,*** A_1***,*** B ***i*** C***. Trobeu el punt*** C***.***

[1 punt per cada apartat]

(a) Descriurem dues solucions.

Solució 1

Els punts X que equidisten de A i B compleixen que $d(A, X) = d(B, X)$. És a dir,

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + y^2 + (z+2)^2}\,.$$

Elevant al quadrat els dos membres de l'equació, fent les operacions indicades i les simplificacions adequades, arribem a $2x - y - 3z + 2 = 0$, que és l'equació del pla buscat.

Solució 2

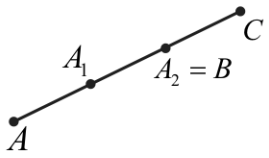
El pla buscat és el que passa pel punt mig del segment $\overline{AB}$, amb vector característic $\overrightarrow{AB}$. El punt mig és $M = \dfrac{A+B}{2} = (1, 1, 1)$, i el vector és $\overrightarrow{AB} = (4, -2, -6)$. L'equació del pla es pot escriure com

$$4(x-1) - 2(y-1) - 6(z-1) = 0\,; \quad \text{és a dir,} \quad 2x - y - 3z + 2 = 0\,.$$

(b) Explicitarem tres solucions.

Solució 1

Quan dividim un segment $\overline{AC}$ en tres parts iguals, obtenim dos nous punts A_1 i A_2 de manera que $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_2C}$.



A l'enunciat ens diuen que $A_2 = B$. Llavors,

$$\overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{AA_1} \quad \text{i} \quad \overrightarrow{AC} = 3 \cdot \overrightarrow{AA_1}\,.$$

D'aquí, $\dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{3}\,\overrightarrow{AC}$.

$$\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\,(B - A) = \frac{1}{2}\,(4, -2, -6) = (2, -1, -3)\,; \quad \frac{1}{3}\,\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}(x+1, y-2, z-4)\,.$$

Finalment, de que $\dfrac{1}{3}(x+1, y-2, z-4) = (2, -1, -3)$ se'n dedueix $x = 5$, $y = -1$ i $z = -5$. El punt buscat és $C = (5, -1, -5)$.

Solució 2

L'equació vectorial de la recta que passa pels punts A i B és

És evident que per $\lambda = 1$, tenim que $X = B$. Llavors, per $\lambda = 3/2$ obtindrem el punt C,

$$C = A + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 4) + \frac{3}{2}(4, -2, -6) = (5, -1, -5).$$

Solució 3

Podem observar que A_1 és el punt mig del segment $\overline{AB}$ i que B és el punt mig del segment $\overline{A_1C}$. Llavors,

$$A_1 = \frac{A+B}{2} = (1, 1, 1) \text{ i } B = \frac{A_1 + C}{2} \Longrightarrow (3, 0, -2) = \frac{1}{2}(x+1, y+1, z+1).$$

La solució és $x = 5$, $y = -1$ i $z = -5$.

---

61. PAU 2012 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 5

La solució d'aquest sistema és $x = 1$, $y = 2$, $z = 0$. Atenció: és molt important que es vegi clar que aquesta és la solució de **tot** el sistema. És a dir, agafant tres de les equacions n'hi ha prou per trobar la solució, però cal comprovar que també es verifica l'altra equació.

Solució 2b. Una vegada construït el sistema, es pot comprovar si és o no compatible (determinat) calculant el rang de la matriu de coeficients i el de l'ampliada. Això exigeix treballar amb una matriu d'ordre 4, que no entra en els requisits de les proves, però que es pot utilitzar.

Solució 3. Construïm la matriu $A = (v_r, v_s, \overrightarrow{PQ})$, essent v_r el vector director de la recta r, v_s el de s, P un punt de la recta r i Q un punt de la recta s. Per exemple,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les rectes es tallen si i sol si rang $A < 3$ (ja que no són ni paral·leles ni coincidents per tenir els seus vectors directors no proporcionals). Calculem, doncs, el determinant de la matriu A,

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Les rectes es tallen.

(b) Com que les rectes es tallen, la recta perpendicular que les talla passa pel seu punt de tall, que és $P_1 = (-1 + 2\lambda, 1 + \lambda, 1 - \lambda) = (1, 2, 0)$. Si l'apartat ($a$) s'ha fet de la segona o tercera forma, ara farà falta calcular aquest punt d'intersecció.

El vector director de la recta buscada és

$$v = v_r \times v_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (1, -7, -5).$$

L'equació contínua de la recta buscada és

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-7} = \frac{z-0}{-5}.$$

62. PAU 2012 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

1.- Donats els plans $\pi_1 \colon 3x + y - 2z + 15 = 0$ ***i*** $\pi_2 \colon x + y + 2z - 103 = 0$***,***

(a) Comproveu que són perpendiculars.

(b) Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$***) del pla que és perpendicular a*** π_1 ***i*** π_2***, passant pel punt*** $P = (1, 3, 2)$ ***.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Dos plans són perpendiculars si ho són els seus vectors normals. Aquests vectors normals són, respectivament, $v_1 = (3, 1, -2)$ i $v_2 = (1, 1, 2)$. Com que

$$v_1 \cdot v_2 = (3, 1, -2) \cdot (1, 1, 2) = 3 + 1 - 4 = 0\,,$$

els plans són perpendiculars.

(b) Podem trobar el vector normal al pla buscat fent el producte vectorial dels vectors normals dels plans π_1 i π_2.

$$v_3 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4i - 8j + 2k = (4, -8, 2)\,.$$

L'equació del pla π amb vector normal $v_\pi = (A, B, C)$, passant pel punt $P = (x_0, y_0, z_0)$ és

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0\,.$$

En el nostre cas, ens queda

$$4(x - 1) - 8(y - 3) + 2(z - 2) = 0\,, \quad \text{és a dir,} \quad 4x - 8y + 2z + 16 = 0$$

o, simplificat, $2x - 4y + z + 8 = 0$.

63. PAU 2012 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 6

6.- Siguin $\pi \colon x - 3y + 2z = 1$ ***i*** $r : \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x - y + mz = 1 \end{cases}$ ***. Estudieu-ne la posició relativa segons el valor del paràmetre*** m ***.***

Solució 1

Comencem buscant un vector normal o característic, v_π , del pla π i un vector director, v_r , de la recta r .

$$v_\pi = (1,-3,2)\,; \quad v_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & m \end{vmatrix} = (m,-3m,-5)\,.$$

Comprovem si aquests dos vectors són perpendiculars (condició perquè el pla i la recta siguin paral·lels o perquè la recta estigui continguda al pla) per algun valor del paràmetre.

$$(1,-3,2)\cdot(m,-3m,-5) = 10m-10 = 0 \Longrightarrow m = 1\,.$$

- Per $m \neq 1$, el pla i la recta es tallen.
- Quan $m = 1$, escollim qualsevol punt de la recta i mirem si compleix l'equació del pla. Per exemple, per $x = 0$ obtenim que $y = 1$ i $-y + z = 1$; és a dir, $y = 1$ i $z = 2$. Aquest punt és el $P = (0,1,2)$. Llavors, com que $x - 3y + 2z = 0 - 3 + 4 = 1$, el punt és del pla i, per tant, $r \subset \pi$.

Solució 2

Estudiem el caràcter del sistema format per l'equació del pla i les dues equacions de la recta. Si el sistema és compatible determinat el pla i la recta es tallen; si és compatible indeterminat la recta està continguda al pla; si és incompatible, el pla i la recta són paral·lels.

El sistema és

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 3x + y = 1 \\ 2x - y + mz = 1 \end{cases}$$

Busquem el determinant de la matriu del sistema,

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & m \end{vmatrix} = 10m - 10\,,$$

i trobem el valor del paràmetre perquè valgui zero.

$$10m - 10 = 0 \Longrightarrow m = 1\,.$$

Ja podem assegurar que per a $m \neq 1$ el sistema és compatible determinat i, per tant, el pla i la recta es tallen.

Per a $m = 1$, l'esglaonament de la matriu ampliada és

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & -6 & -2 \\ 0 & 5 & -3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Les operacions elementals realitzades han estat

(1) $F_2 - 3F_1\,;\ F_3 - 2F_1$.

(2) $F_2/2\,;\ 2F_3 - F_2$.

En aquest cas, el sistema és compatible indeterminat. La recta està continguda al pla.

64. PAU 2012 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 1

1.- Digueu per a quin valor del paràmetre m els plans

$$\pi_1 : x - y + mz = 1 \ , \qquad \pi_2 : x - y + z = m \ , \qquad \pi_3 : my + 2z = 3 \ ,$$

tenen com a intersecció una recta.

[2 punts]

Solució

Els tres plans es tallen en una única recta si i solament si el sistema

$$\left.\begin{array}{c} x - y + mz = 1 \\ x - y + z = m \\ my + 2z = 3 \end{array}\right\}$$

és compatible indeterminat amb un grau de llibertat. Calculem el determinant de la matriu de coeficients d'aquest sistema,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & m & 2 \end{vmatrix} = m^2 - m \ .$$

Aquest determinant val zero si $m = 0$ o $m = 1$.

L'estudi també es pot fer escalonant la matriu,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & m & 1 \\ 1 & -1 & 1 & m \\ 0 & m & 2 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & m & 1 \\ 0 & 0 & 1-m & m-1 \\ 0 & m & 2 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & m & 1 \\ 0 & m & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1-m & m-1 \end{array}\right)$$

i veient que hi pot haver problemes per a $m = 0$ (en aquest cas la matriu encara no està escalonada) i per a $m = 1$.

- Per a $m = 0$, l'escalonament de la matriu ampliada del sistema ens condueix a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \ .$$

  El sistema és incompatible i, per tant, els tres plans no tenen cap punt en comú. La seva intersecció no és una recta.

- Per a $m = 1$, l'escalonament de la matriu ampliada del sistema és

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \ .$$

  Ara el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

En definitiva, els tres plans es tallen en una sola recta si i sol si $m = 1$.

65. PAU 2012 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 3

3.- Donants el pla $\pi: x - y + 2z - 5 = 0$ ***i la recta*** $r: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 10 \end{cases}$

(a) ***Calculeu el punt d'intersecció entre el pla i la recta.***

(b) ***Trobeu l'equació contínua de la recta*** s ***continguda al pla*** π***, que és perpendicular a la recta*** r ***i talla a la recta*** r ***.***

[1 punt per apartat]

Solució

(a) La forma que sembla més senzilla per a la resolució d'aquest apartat és construir un sistema de tres equacions amb tres incògnites i resoldre'l. El sistema és

$$\left.\begin{array}{c} x - y + 2z - 5 = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 10 \end{array}\right\},$$

que té per solució el punt $P = (4, -3, -1)$.

Hi ha altres formes de resolució, tal com trobar les equacions paramètriques de la recta i substituir-les al pla.

(b) El vector director de la recta s ha de ser perpendicular al director de r i al característic de π. Comencem per calcular el vector director de la recta r,

$$v_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2, 1, -3).$$

Una forma de trobar el director de s és efectuar el producte vectorial dels dos vectors, $v_\pi = (1, -1, 2)$ i v_r.

$$v_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (1, 7, 3).$$

Com que la recta s (que ha d'estar continguda a π) ha de tallar a la recta r, el punt de tall és el mateix que el de tall entre r i π. Per tant, l'equació contínua de la recta s és

$$\frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{7} = \frac{z+1}{3}.$$

66. PAU 2012 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 6

6.- Donats els punts $P=(1,0,0)$, $Q=(0,2,0)$, $R=(0,0,3)$ ***i*** $S=(1,2,3)$,

(a) ***Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, de la forma*** $Ax+By+Cz+D=0$***) del pla que conté els punts*** P, Q ***i*** R.

(b) ***Comproveu si els quatre punts són coplanaris (és a dir, si els quatre estan continguts en un mateix pla).***

[1 punt per apartat]

Solució

(a) Hi ha diferents formes de trobar l'equació del pla que conté els punts P, Q i R. Aquí se'n presenten tres.

- Buscant els vectors $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{PR}$. Aquests vectors són generadors del pla. El seu producte vectorial és un vector característic o normal del pla buscat,

$$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{vmatrix}=(6,3,2)\,.$$

  Amb això, el pla és de la forma $6x+3y+2z+D=0$. Imposant que passi per P (o per Q o per R) s'obté que $D=-6$. En definitiva, $\pi\colon 6x+3y+2z-6=0$.

- Plantejant l'equació $Ax+By+Cz+D=0$ i imposant que la compleixin els tres punts, s'arriba a un sistema d'equacions lineal,

$$\left.\begin{array}{c} A+D=0\\ 2B+D=0\\ 3C+D=0\end{array}\right\},$$

  que ens porta a $A=-D$, $B=-D/2$ i $C=-D/3$. Si fem $D=-6$, ens queda $A=6$, $B=3$ i $C=2$. L'equació buscada és $6x+3y+2z-6=0$.

- Agafant els vectors $\overrightarrow{PQ}=(-1,2,0)$ i $\overrightarrow{PR}=(-1,0,3)$ com a generadors del pla (es poden agafar qualssevol altres vectors formats pels punts P, Q, R, sempre que no es considerin un vector i el seu oposat). Llavors, l'equació del pla és

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0\\ -1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{vmatrix}=0\iff 6(x-1)+2z+3y=0\,.$$

  La matriu de la qual es calcula el determinant pot ser, evidentment, la transposada de la que s'ha utilitzat aquí; igualment, el punt que es resta a (x,y,z) pot ser qualsevol dels tres donats.

(b) Els quatre punts són coplanaris si el punt S pertany al pla que acabem de trobar. Per tant, cal que el punt $(1,2,3)$ compleixi l'equació del pla. Però, com que

$$6\cdot 1+3\cdot 2+2\cdot 3-6\neq 0\,,$$

podem assegurar que els quatre punts no són coplanaris.

Aquest apartat també es pot fer, per exemple, calculant el volum del tetraedre amb vèrtexs als quatre punts. Si dóna zero, són coplanaris; si no dóna zero, no ho són

$$V=\frac{1}{6}|\det(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR},\overrightarrow{PS})|=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 3\\ 0 & 2 & 3\end{vmatrix}\right|=2\neq 0\,.$$

No són coplanaris

67. PAU 2011 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 2

2.- Donada la recta $\left.\begin{matrix} 2x-y+3x=2 \\ x+z+1=0 \end{matrix}\right\}$***, calculeu l'equació general (és a dir, de la forma*** $Ax+By+Cz+D=0$***) del pla perpendicular a la recta que passa pel punt*** $P=(1,0,-1)$***.***

[2 punts]

Solució

Perquè el pla buscat i la recta donada siguin perpendiculars, el vector normal del pla i el director de la recta han de ser paral·lels; el més senzill és agafar-los iguals. Busquem, doncs, el vector director de la recta,

$$v_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -i+j+k = (-1,1,1)\,.$$

L'equació del pla π amb vector normal $v_\pi = (A,B,C)$, passant pel punt $P=(x_0,y_0,z_0)$ és

En el nostre cas, ens queda

$$(-1)(x-1)+1(y-0)+1(z+1)=0, \quad \text{és a dir,} \quad -x+y+z+2=0\,.$$

68. PAU 2011 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 5

5.- Considereu la recta $r: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{-1} = z - a$ ***i el pla*** $\pi: 2x + y - 5z = 5$ **.**

(a) Estudieu la posició relativa de la recta r ***i el pla*** π ***en funció del paràmetre*** a**.**

(b) Quan $a = 3$***, trobeu la distància de la recta*** r ***al pla*** π**.**

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) El vector director de la recta és $v_r = (3, -1, 1)$; el punt $P = (1, -2, a)$ pertany a la recta r. Per altra banda, el vector normal del pla π és $v_\pi = (2, 1, -5)$. Comprovem si v_r i v_π són o no ortogonals,

$$v_r \cdot v_\pi = (3, -1, 1) \cdot (2, 1, -5) = 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-5) = 0 \ .$$

Efectivament, ho són. Per tant, la recta és paral·lela al pla o la recta està continguda en el pla. Per acabar-ho de decidir, mirem si el punt P pertany o no al pla.

$$P \in \pi \iff 2 \cdot 1 + (-2) - 5a = 5 \iff a = -1 \ .$$

En definitiva,

- Si $a = -1$, la recta està continguda al pla.
- Si $a \neq -1$, la recta i el pla són paral·lels.

(b) Per trobar la distància entre una recta i un pla paral·lels, n'hi ha prou en calcular la distància d'un punt qualsevol de la recta al pla. Així,

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 + (-2) - 5 \cdot 3 - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-5)^2}} = \frac{20}{\sqrt{30}} \ .$$

69. PAU 2011 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

1.- Donada la recta $r\colon \begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$ ***:***

(a) Trobeu-ne un vector director.

(b) Calculeu l'equació contínua de la recta que és paral·lela a r ***i que passa pel punt*** $P = (1, 0, -1)$***.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) El vector director de la recta r es pot trobar de diferents maneres. Potser la més senzilla és efectuar el producte vectorial dels vectors normals dels plans que la defineixen. És a dir, si

$$v_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -i + j + k = (-1, 1, 1)\,,$$

v_r és vector director de la recta r.

Altres formes de buscar el vector director:

- Resolent el sistema de dues equacions amb tres incògnites que defineix la recta, arribem, per exemple, a que $y = -5 - x$ i $z = -1 - x$. Això ens porta a les equacions paramètriques de la recta,
$$x = \lambda\,; \quad y = -5 - \lambda\,; \quad z = -1 - \lambda\,.$$
Així, el vector director és $v_r = (1, -1, -1)$, els coeficients del paràmetre λ.
- Les igualtats $y = -5 - x$ i $z = -1 - x$ es poden transformar en $x = -1 - z = -5 - y$, d'on l'equació contínua de r és
$$\frac{x - 0}{1} = \frac{y + 5}{-1} = \frac{z + 1}{-1}\,.$$
El vector director és $v_r = (1, -1, -1)\,.$
- El vector director de r ha de ser ortogonal als vectors normals dels plans que determinen la recta. Busquem, doncs, (a, b, c) tal que $(a, b, c) \cdot (2, -1, 3) = 0$ i $(a, b, c) \cdot (1, 0, 1) = 0$. D'aquí, $2a - b + 3c = 0$ i $a + c = 0$. La solució d'aquest sistema és, per exemple, $b = -a$, $c = -a$. Per tant, el vector director buscat és de la forma $v_r = (a, -a, -a)$. Qualsevol valor no nul de a ens dóna un vector director.

(b) L'equació contínua de la recta buscada és $\dfrac{x - 1}{-1} = \dfrac{y - 0}{1} = \dfrac{z + 1}{1}\,.$

70. PAU 2011 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 5

5.- Siguin $r_1\colon x-2=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{1-z}{2}$ ***i*** $r_2\colon \dfrac{x+3}{2}=y+1=\dfrac{z+1}{2}$ **.**

(a) Comproveu que r_1 ***i*** r_2 ***són perpendiculars.***

(b) Comproveu que es tallen mitjançant la determinació del punt de tall.

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Posem l'equació de la recta r_1 en forma contínua (la recta r_2 ja està donada en aquesta forma):

$$r_1\colon \frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-1}{-2}\,.$$

Els vectors directors respectius són $v_1=(1,2,-2)$ i $v_2=(2,1,2)$. Com que el seu producte escalar és

$$(1,2,-2)\cdot(2,1,2)=2+2-4=0\,,$$

podem assegurar que els vectors són ortogonals i, per tant, les rectes r_1 i r_2 són perpendiculars.

(b) Les equacions de les rectes donen lloc a un sistema de quatre equacions lineals amb tres incògnites,

$$\left.\begin{array}{rrrcl} 2x & - & y & = & 1\\ & & y+z & = & 4\\ x & - & 2y & = & -1\\ x & & -z & = & -2 \end{array}\right\}\,.$$

De la primera equació, $y=2x-1$; substituint aquest valor a les altres tres equacions obtenim

$$\left.\begin{array}{rrcl} 2x & + z & = & 5\\ -3x & & = & -3\\ x & - z & = & -2 \end{array}\right\}$$

La segona equació d'aquest sistema reduït ens porta a què $x=1$. Llavors, les altres dues equacions són equivalents, amb solució $z=3$. Així, les rectes es tallen i el punt de tall és el $(1,1,3)$.

També es pot comprovar que les rectes es tallen trobant el rang de les matrius $(v_r\ v_s)$ i $(v_r\ v_s\ \overrightarrow{PQ})$, on $P=(2,3,1)$ és un punt de la recta r_1 i $Q=(-3,-1,-1)$ és un punt de la recta r_2. Per tal que es tallin, cal que el rang de les dues matrius sigui 2. Aquest mètode no és el que es demana a l'enunciat i, a més a més, no ens dóna el punt de tall, que encara hauríem de calcular.

71. PAU 2011 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 2

2.- Donat el pla $\pi\colon 2x+y-z=5$***:***

(a) Calculeu l'equació del pla paral·lel al pla π ***que passa pel punt*** $P=(1,0,-1)$***.***

(b) Determineu també la distància entre el punt P ***i el pla*** π***.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Hi ha dues maneres de trobar el pla demanat. La primera consisteix en escriure la forma general dels plans paral·lels a π, $\pi'\colon 2x+y-z+D=0$, i trobar el valor del paràmetre D perquè passi pel punt P,

$$P\in\pi' \iff 2\cdot 1+0-(-1)+D=0 \iff D=-3\,.$$

El pla buscat és $2x+y-z-3=0\,.$

La segona forma consisteix en utilitzar la fórmula del pla que passa per un punt amb un vector normal conegut.

$$2(x-1)+(y-0)-(z+1)=0 \iff 2x+y-z-3=0\,.$$

(b) La distància d'un punt $P=(x_0,y_0,z_0)$ a un pla $\pi\colon Ax+By+Cz+D=0$ es pot calcular per la fórmula

$$d(P,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,.$$

En el nostre cas,

$$d(P,\pi)=\frac{|2\cdot 1+0-(-1)-5|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{6}}\,.$$

72. PAU 2011 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 5

5.- Trobeu l'equació general (o sigui de la forma $Ax+By+Cz+D=0$***) dels plans que contenen la recta*** $r:\begin{cases}y=2\\z=1\end{cases}$ ***i formen un angle de*** 45^o ***amb el pla*** $z=0$***.***

[2 punts]

Solució 1

Qualsevol punt de la forma $P=(a,2,1)$ pertany a la recta r. Per simplicitat, agafarem $P=(0,2,1)$. El vector director de la recta és $\begin{vmatrix} i & j & k\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=(1,0,0)$. El vector normal del pla $z=0$ és $v_z=(0,0,1)$.

Si el pla buscat és $\pi'\colon Ax+By+Cz+D=0$, tenim que el seu vector normal és $v_{\pi'}=(A,B,C)$. Com que conté la recta r, sabem que $v_{\pi'}$ és perpendicular a v_r; per formar 45^o amb el pla $z=0$ cal que $\cos(\widehat{v_{\pi'},v_z})=\sqrt{2}/2$. És a dir,

$$v_{\pi'}\cdot v_r=(A,B,C)\cdot(1,0,0)=A=0\;;\quad \frac{v_{\pi'}\cdot v_r}{\|v_{\pi'}\|\cdot\|v_z\|}=\frac{(0,B,C)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{B^2+C^2}\cdot 1}=\frac{C}{\sqrt{B^2+C^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La solució és $A=0$, $B^2=C^2$ ($\iff$ $C=B$ o $C=-B$). Podem posar, sense perdre generalitat, $B=1$. Així, tenim dos plans que compleixen les condicions, $y+z=D_1$ i $y-z=D_2$. Fent que passin pel punt P (condició perquè continguin la recta r), ens queda

$$y+z=3\,,\qquad y-z=1\,.$$

Solució 2

La qüestió es pot resoldre també utilitzant l'equació del feix de plans que passa per la recta r,

El vector director d'un pla qualsevol d'aquest feix és $v_\pi = (0, 1, \lambda)$. Llavors, s'ha de complir que

$$\frac{(0,1,\lambda)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{1+\lambda^2}\cdot 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ .$$

Aquesta equació ens porta a que $\lambda = \pm 1$. Llavors, els plans buscats són:

- Per $\lambda = 1$, $(y-2)+(z-1)=0$; és a dir, $y+z=3$.
- Per $\lambda = -1$, $(y-2)-(z-1)=0$; per tant, $y-z=1$.

73. PAU 2010 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 2

2.- Donats el pla $\pi : 5x+y+3z=4$ ***i la recta*** $r : \begin{cases} ax - y = z \\ 2y + z = -3 \end{cases}$ ***, estudieu-ne la posició relativa en funció del paràmetre*** a***.***

[2 punts]

Solució

Un pla i una recta a l'espai $\mathbb{R}^3$ poden ser paral·lels, es poden tallar o la recta pot estar continguda al pla. Per començar a esbrinar-ho en el nostre cas, busquem el vector normal del pla, al que anomenarem v_π, i el director de la recta, v_r.

$$v_\pi = (5,1,3)\ ; \quad v_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -a, 2a)\,.$$

La recta i el pla es tallen si v_π i v_r no són perpendiculars, és a dir, si $v_\pi \cdot v_r \neq 0$.

$$v_\pi \cdot v_r = (5,1,3)\cdot(-1,-a,2a) = -5 - a + 6a = 5a - 5 \neq 0 \iff a \neq 1\,.$$

També podrien comprovar si el vector director de la recta és o no combinació lineal dels vectors generadors del pla. Per trobar aquests vectors podem fer

$$5x + y + 3z = 4 \iff y = 4 - 5x - 3z \iff \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4 - 5\lambda - 3\mu \\ z = \mu \end{cases}$$

Podem agafar $v_1 = (1, -5, 0)$ i $v_2 = (0, -3, 1)$. Llavors,

$$(-1, -a, 2a) = \alpha(1, -5, 0) + \beta(0, -3, 1) \iff \alpha = -1\ , \quad -5\alpha - 3\beta = -a \quad \beta = 2a \Longrightarrow a = 1\,.$$

D'una manera o una altra, per $a \neq 1$ la recta i el pla es tallen.

Quan $a = 1$ encara tenim dues possibilitats: paral·lels o la recta continguda al pla. Per acabar d'estudiar-ho, busquem un punt de la recta; per exemple, fent $y = 0$ queda $x = 2$ i $z = -3$, aconseguint el punt $P = (2, 0, -3)$. Mirem si aquest punt pertany o no al pla π,

$$5 \cdot 2 + 0 + 3 \cdot (-3) = 1 \neq 4\,.$$

O sigui, $P \notin \pi$. Per a $a = 1$, la recta i el pla són paral·lels.

Una forma diferent de resoldre el problema és estudiar el caràcter del sistema d'equacions lineals

$$\left.\begin{array}{rcl} 5x + y + 3z = 4 \\ ax - y = 2 \\ 2y + z = -3 \end{array}\right\}\,.$$

Comprovem quin és el rang de la matriu del sistema, A, calculant el seu determinant (que existeix per ser una matriu quadrada).

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ a & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 + 0 + 6a - (0 + 0 + a) = 5a - 5\,.$$

Si $5a - 5 \neq 0$ (és a dir, si $a \neq 1$) tenim que rang A = rang $(A|b) = 3$, on $(A|b)$ representa la matriu ampliada del sistema. El sistema és compatible determinat. D'aquí, el pla i la recta es tallen.

Si $a = 1$, calculem el rang de les dues matrius alhora,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 3 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)\,.$$

Llavors, rang $A = 2$ i rang $(A|b) = 3$. El sistema és incompatible i, per tant, la recta i el pla són paral·lels.

74. PAU 2010 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 6

6.- Considereu la recta $r : \dfrac{x+4}{-2} = \dfrac{y-1}{-1} = z-1$ **.**

(a) ***Trobeu els dos punts,*** A ***i*** B***, de la recta*** r ***que estan situats a una distància*** $d = \sqrt{6}$ ***del punt*** $P = (-1, 1, 2)$**.**

(b) ***Trobeu l'àrea del triangle de vèrtexs*** A**,** B ***i*** P**.**

[1 punt per apartat]

Solució

(a) Els punts de la recta r són de la forma $Q = (x, y, z) = (-4 - 2t, 1 - t, 1 + t)$. La distància d'un d'ells al punt P és

$$d(Q, P) = \sqrt{[-1 - (-4 - 2t)]^2 + [1 - (1 - t)]^2 + [2 - (1 + t)]^2} = \sqrt{10 + 10t + 6t^2}\,.$$

Se'ns demana que $d(Q, P) = \sqrt{6}$. Per tant, l'equació a resoldre és $10 + 10t + 6t^2 = 6$, que té per solucions $t = -1$ i $t = -2/3$. El punts buscats són $A = (-2, 2, 0)$ i $B = (-8/3, 5/3, 1/3)$.

(b) L'àrea del triangle amb vèrtex A, B i P es pot trobar utilitzant la fórmula

$$S = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB}\| = \frac{1}{2}\|(A - P) \times (B - P)\|\,.$$

Com que $A - P = (-2, 2, 0) - (-1, 1, 2) = (-1, 1, -2)$ i $B - P = (-8/3, 5/3, 1/3) - (-1, 1, 2) = (-5/3, 2/3, -5/3)$, tenim que

$$(A - P) \times (B - P) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & -2 \\ -5/3 & 2/3 & -5/3 \end{vmatrix} = (-1/3, 5/3, 1)\,.$$

En definitiva,

$$S = \frac{1}{2}\|(-1/3, 5/3, 1)\| = \frac{\sqrt{35}}{6}\,.$$

Aquest apartat també es pot resoldre trobant la distància entre els punts A i B (que serà la base del triangle) i la distància del punt P a la recta r (que serà l'altura):

$$d(A, B) = \frac{\sqrt{6}}{3}\ ; \quad d(P, r) = \frac{\|\overrightarrow{RP} \times v_r\|}{\|v_r\|} = \sqrt{\frac{35}{6}}\,,$$

essent $R = (-4, 1, 1)$ un punt de la recta r. Llavors, $S = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{6}}{3} \cdot \sqrt{\dfrac{35}{6}} = \dfrac{\sqrt{35}}{6}$.

Encara hi ha una altra forma de resolució: la fórmula de Heró,

$$S = \sqrt{m(m-a)(m-b)(m-c)}\,,$$

on m és el semiperímetre del triangle i a, b i c les longituds dels costats. En el nostre cas,

$$m = \frac{d(A, P) + d(B, P) + d(A, B)}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{6} + \dfrac{\sqrt{6}}{3}}{2} = \frac{7\sqrt{6}}{6}\,.$$

Per tant,

$$S = \sqrt{\frac{7\sqrt{6}}{6}\left(\frac{7\sqrt{6}}{6} - \sqrt{6}\right)\left(\frac{7\sqrt{6}}{6} - \sqrt{6}\right)\left(\frac{7\sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{6}}{3}\right)} = \frac{\sqrt{35}}{6}\,.$$

75. PAU 2010 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

1.- Trobeu l'equació general (és a dir, de la forma $Ax+By+Cz+D=0$***) del pla que conté la recta*** $r_1: \dfrac{x-1}{2}=y=2-z$ ***i és palal·lel a la recta*** $r_2: \begin{cases} x-y-z=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$.

[2 punts]

Solució

Anomenem π al pla que ens demanen. Cal trobar un vector director per cada una de les rectes; aquests vectors són els generadors de π. Busquem l'equació contínua de la recta r_1,

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}\ ,$$

per tenir el vector director $v_1=(2,1,-1)$. A més a més, tenim que $P=(1,0,2)\in r_1$ i, per tant, també $P\in\pi$.

El vector director de r_2 és

$$v_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=(-3,-2,-1)\ .$$

L'equació de π és

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & x-1 \\ 1 & -2 & y-0 \\ -1 & -1 & z-2 \end{vmatrix}=0\ ,$$

és a dir, $3x-5y+z-5=0$.

76. PAU 2010 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4

4.- Donades les rectes $r_1 : \dfrac{x+5}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{-4}$ ***i*** $r_2 : \begin{cases} 2x+y+2z+5=0 \\ 2x-y+z+11=0 \end{cases}$ ***:***

(a) ***Comproveu que són paral·leles.***

(b) ***Trobeu l'equació general (és a dir, de la forma*** $Ax+By+Cz+D=0$***) del pla que les conté.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) El vector director de la primera recta és $v_1 = (3, 2, -4)$ i el de la segona,

$$v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (3, 2, -4) \ .$$

Com que els vectors directors són, evidentment, proporcionals, les rectes són paral·leles o coincidents. Per descartar aquesta segona possibilitat, cal comprovar simplement que un punt d'una d'elles no pertany a l'altra. En efecte, el punt $(-5, 1, 2)$, que és un punt de r_1, no compleix la segona equació que defineix la recta r_2 (la primera sí que la compleix!) i, per tant, no pertany a r_2.

(b) Podem trobar un únic pla que conté dues rectes si aquestes es tallen o si són paral·leles no coincidents. Estem en el segon cas, i el pla que les conté tindrà per vectors generadors un director de les rectes i un vector que comenci en un punt de r_1 i acabi en un de r_2. Agafarem $P = (-5, 1, 2) \in r_1$. Per trobar el punt Q pertanyent a r_2, donem un valor qualsevol a alguna de les variables x, y o z. Per exemple, si fem $z = 0$, ens queda el sistema

$$\begin{cases} 2x+y+5=0 \\ 2x-y+11=0 \end{cases},$$

que té per solució $x = -4$, $y = 3$. Agafem $Q = (-4, 3, 0) \in r_2$. L'equació del pla buscat és

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x+5 \\ 2 & 2 & y-1 \\ -4 & -2 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 4x+2y+4z+10=0 \Longrightarrow 2x+y+2z+5=0 \ .$$

Nota 1: una altra manera de resoldre aquest apartat és utilitzant el feix de plans que determina la recta r_2; la forma d'aquest feix és $2x+y+2x+5+\lambda(2x-y+z+11)=0$, és a dir,

$$(2+2\lambda)x+(1-\lambda)y+(2+\lambda)z+(5+11\lambda)=0 \ .$$

Imposant que aquest pla passi pel punt $P = (-5, 1, 2)$, ens sortirà que $\lambda = 0$, per la qual cosa el pla buscat és $2x+y+2x+5=0$.

Nota 2: la qüestió es pot resoldre molt més senzillament i ràpida; en efecte, com que el punt P pertany al primer pla que defineix la recta r_2, ja podem assegurar que aquest pla, $2x+y+2z+5=0$, conté les dues rectes.

77. PAU 2010 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 1

1.- Donats el pla $\pi : x + 2y + 3z - 4 = 0$ ***i els punts*** $P = (3, 1, -2), Q = (0, 1, 2)$***:***

(a) ***Calculeu l'equació contínua de la recta perpendicular al pla*** π ***que passa pel punt*** P***.***

(b) ***Calculeu l'equació general (és a dir, de la forma*** $Ax + By + Cz + D = 0$***) del pla perpendicular a*** π ***que passa pels punts*** P ***i*** Q***.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Qualsevol recta perpendicular al pla π admet, com a vector director, el vector normal al pla. Si anomenem r a la recta buscada, el seu vector director pot ser $v_r = (1, 2, 3)$. Com que ha de passar pel punt $P = (3, 1, -2)$, la seva equació contínua és

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{3} \ .$$

(b) Els vectors v_π, normal al pla π, i $\overrightarrow{QP} = P - Q = (3, 0, -4)$ generen el pla buscat. A més a més, aquest pla ha de passar pel punt P (o pel punt Q). Per tant, la seva equació general és

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & x-3 \\ 2 & 0 & y-1 \\ 3 & -4 & z+2 \end{vmatrix} = 0 \iff -8x + 13y - 6z - 1 = 0 \ .$$

78. PAU 2010 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 6

6.- Siguin $\vec{u}_1 = (-1, 3, 2)$, $\vec{u}_2 = (2, -1, 4)$ ***i*** $\vec{u}_3 = (a+1, a-1, 4a+2)$, ***tres vectors de l'espai vectorial*** $\mathbb{R}^3$.

(a) ***Trobeu el valor del paràmetre*** a ***per al qual*** $\vec{u}_3$ ***és combinació lineal dels vectors*** $\vec{u}_1$ ***i*** $\vec{u}_2$.

(b) ***Comproveu que per a*** $a = 0$ ***el conjunt*** $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ ***és linealment independent.***

[1 punt per apartat]

Solució

(a) Quan un vector és combinació lineal dels altres dos, el determinant format per ells és nul.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & a-1 \\ 3 & -1 & a-1 \\ 2 & 4 & 4a+2 \end{vmatrix} = 2a - 4; \quad 2a - 4 = 0 \iff a = 2 \ .$$

O sigui, el vector $\vec{u}_3$ és combinació lineal dels vectors $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ si i sol si $a = 2$.

També es pot fer plantejant l'equació $x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 = \vec{u}_3$; és a dir,

$$x(-1,3,2) + y(2,-1,4) = (a+1, a-1, 4a+2) \iff \left.\begin{array}{r} -x + 2y = a+1 \\ 3x - y = a-1 \\ 2x + 4y = 4a+2 \end{array}\right\} \iff \left.\begin{array}{r} -x + 2y - a = 1 \\ 3x - y - a = -1 \\ 2x + 4y - 4a = 2 \end{array}\right\}.$$

Aquest sistema es pot considerar com un sistema de tres equacions amb tres incògnites (x, y i a). El resolem pel mètode de Gauss,

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -4 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ 0 & 8 & -6 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right) \ .$$

D'aquí, $a = 2$ (també $x = 1$ i $y = 2$, però no ens interessa).

(b) El conjunt $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ és linealment independent si i sol si el determinant format pels tres vectors

és no nul:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \ .$$

També es pot raonar que el determinant dels tres vectors val $2a - 4$, que per $a = 0$ és no nul.

Evidentment, també es pot comprovar que el conjunt és linealment independent igualant una combinació dels tres vectors al vector nul i arribant a què els coeficients han de ser nuls.

79. PAU 2010 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 2

2.- Donats el punt $P = (1, 0, -2)$ ***i la recta*** $r : \dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+3}{-3}$ ***:***

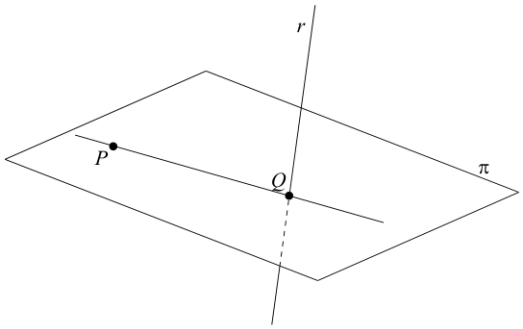
(a) ***Trobeu l'equació contínua de la recta que passa pel punt*** P ***i talla perpendicularment la recta*** r***.***

(b) ***Calculeu la distància del punt*** P ***a la recta*** r***.***

[1,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b]

Solució

(a) La recta que passa pel punt $P = (1, 0, -2)$ i que talla perpendicularment la recta r ha d'estar dins del pla π que passa per P i és perpendicular a r.



Aquest pla tindrà el seu vector normal proporcional al vector director de la recta. Per més senzillesa, agafarem el mateix. Així, si v_π és el vector normal al pla π i v_r és el director de la recta r, tenim $v_\pi = v_r = (2, 2, -3)$.

L'equació del pla amb vector normal $v_\pi = (A, B, C)$ passant per un punt (x_0, y_0, z_0) és

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

En el nostre cas, $\pi : 2(x-1) + 2(y-0) - 3(z+2) = 0$; és a dir, $\pi : 2x + 2y - 3z - 8 = 0$.

Busquem ara el punt d'intersecció entre el pla π i la recta r. Podem, per exemple, trobar les equacions paramètriques de la recta i substituir-les en l'equació del pla.

$$\left.\begin{array}{c} x = 5 + 2\lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = -3 - 3\lambda \end{array}\right\} \; ; \quad 2(5 + 2\lambda) + 2(3 + 2\lambda) - 3(-3 - 3\lambda) - 8 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1 \; .$$

Així, el punt de tall és $Q = (3, 1, 0)$. La recta buscada passa per $P = (1, 0, -2)$ i té com a vector director $\overrightarrow{PQ} = (2, 1, 2)$. L'equació contínua de la recta buscada és

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{2} \ .$$

(b) Utilitzant el punt Q de l'apartat anterior, el càlcul de la distància entre el punt P i la recta r es pot fer trobant la distància entre els punts P i Q,

$$d(P, r) = d(P, Q) = \sqrt{(3-1)^2 + (1-0)^2 + (0+2)^2} = 3 \ .$$

Aquest apartat també es pot resoldre independentment de l'anterior mitjançant la fórmula

$$d(P, r) = \frac{\|\overrightarrow{PR} \times v_r\|}{\|v_r\|} \ ,$$

on R és qualsevol punt de la recta r; per exemple, podem agafar $R = (5, 3, -3)$; llavors, $\overrightarrow{PR} = (4, 3, -1)$ i el producte vectorial és

$$\overrightarrow{PR} \times v_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-7, 10, 2) \ .$$

Així,

$$d(P, r) = \frac{\|(-7, 10, 2)\|}{\|(2, 2, -3)\|} = \frac{\sqrt{153}}{\sqrt{17}} = \sqrt{9} = 3 \ .$$

80. PAU 2010 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 5

5.- Siguin r i s dues rectes d'equacions

$$r : (x, y, z) = (-4, 3, 4) + t(2, -1, 1) \ , \qquad s : x + 1 = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-a}{3}.$$

(a) ***Trobeu el valor del paràmetre a perquè aquestes rectes es tallin.***

(b) ***En el cas en què es tallen, trobeu l'equació general (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla que les conté.***

[1,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b]

Solució

(a) Els vectors directors respectius de les rectes són $v_r = (2, -1, 1)$ i $v_s = (1, -1, 3)$. Com que no són proporcionals, les dues rectes es creuen o es tallen. Així doncs, busquem el valor del paràmetre a perquè es tallin. Hi ha vàries maneres de trobar aquest valor. Entre elles, per exemple, podem utilitzar les equacions paramètriques de la recta r per substituir el valor de x, y i z a la recta s.

$$(x, y, z) = (-4, 3, 4) + t(2, -1, 1) \iff x = -4 + 2t, \ y = 3 - t, \ z = 4 + t \ .$$

Llavors, utilitzant la primera igualtat de s,

El punt de tall, si existeix, és $P = (0, 1, 6)$. Agafant ara la segona de les igualtats que defineix s,

$$\frac{1-2}{-1} = \frac{6-a}{3} \iff a = 3 \ .$$

Per tant,

- Si $a \neq 3$ les rectes es creuen.
- Si $a = 3$ les rectes es tallen.

Naturalment, aquest apartat es pot resoldre utilitzant el mètode genèric per trobar la posició relativa de dues rectes a l'espai. Així, cal trobar el rang de la matriu que té per columnes (o per files) els vectors $\overrightarrow{PQ}$, v_r i v_s, i el rang de la matriu formada pels dos últims vectors. Siguin $P = (-4, 3, 4)$ i $Q = (-1, 2, a)$. Llavors, les matrius sobre les que hem de treballar són

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ a-4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \ .$$

Perquè les dues rectes es tallin, cal que rang A = rang $B = 2$. Com que és evident que rang $B = 2$, solament cal imposar que $\det A = 0$.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ a-4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - a \ .$$

O sigui, les rectes es tallen si i sol si $a = 3$.

(b) Per a $a = 3$ els vectors v_r i v_s generen el pla que, si passa pel punt $(-4, 3, 4)$ (i també per $(0, 1, 6)$, per exemple), conté les dues rectes. L'equació general del pla és

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & x+4 \\ -1 & -1 & y-3 \\ 1 & 3 & z-4 \end{vmatrix} = 0 \iff -2x - 5y - z + 11 = 0 \ .$$

81. PAU 2009 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 2

2.- Considereu en l'espai $\mathbb{R}^3$ les rectes r i s, les equacions respectives de les quals són:

$$r : (x, y, z) = (4, 1, 0) + \lambda(m, 1, 1), \qquad s : \begin{cases} x + 2y + mz = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \ ,$$

en què m és un paràmetre real. Estudieu si hi ha cap valor d'aquest paràmetre per al qual les rectes siguin perpendiculars i es tallin.

[2 punts]

Solució

Dues rectes són perpendiculars si ho són els seus vectors directors. Busquem, per tant, els vectors directors de les rectes.

És clar que com a vector director de la recta r podem agafar $v_r = (m, 1, 1)$.

El vector director de la recta s es pot trobar de diferents maneres; entre elles:

(a) Efectuant el producte vectorial dels vectors característics dels plans que la determinen,

$$v_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2-m, m-1, -1).$$

(b) Buscant un vector (a, b, c) tal que sigui perpendicular als vectors característics dels plans que la determinen,

$$\begin{cases} (a,b,c)\cdot(1,2,m) = 0 \\ (a,b,c)\cdot(1,1,1) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a+2b+mc = 0 \\ a+b+c = 0 \end{cases} \Longrightarrow a = (m-2)c,\ b = (1-m)c.$$

Fent $c = 1$ (qualsevol altre valor no nul també serveix), tenim que $v_s = (m-2, 1-m, 1)$.

(c) Trobant les equacions paramètriques de la recta s. Per exemple, de la segona equació que la defineix podem deduir que $x = 1 - y - z$. Portant aquest valor a la primera, fent els càlculs adequats i aïllant la variable y, ens queda $y = (1-m)z - 1$. Amb això, $x = 2 - (2-m)z$. Les equacions paramètriques obtingudes per aquest camí són

$$\left.\begin{array}{rl} x = & 2-(2-m)\lambda \\ y = & -1+(1-m)\lambda \\ z = & \lambda \end{array}\right\}.$$

El vector director (coeficients del paràmetre λ) és llavors $v_s = (m-2, 1-m, 1)$.

Així, aquestes dues rectes són perpendiculars si i sol si $(m,1,1)\cdot(m-2,1-m,1) = 0$; d'aquí,

$$(m,1,1)\cdot(m-2,1-m,1) = 0 \Longrightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Longrightarrow m = 1 \text{ o } m = 2.$$

Comprovem ara si les rectes es tallen per algun d'aquests dos valors.

- Quan $m = 1$, les equacions paramètriques de la recta r són $x = 4+\lambda$, $y = 1+\lambda$, $z = \lambda$. Substituint aquests valors a les equacions que determinen la recta s, tenim $(4+\lambda) + 2(1+\lambda) + \lambda = 0$ i $(4+\lambda)+(1+\lambda)+\lambda = 0$. La primera igualtat es compleix per $\lambda = -3/2$ i la segona per $\lambda = -4/3$. Això vol dir que, en aquest cas, les rectes no es tallen.
- Per $m = 2$ obtenim, seguint el mateix procediment, les equacions $(4+2\lambda) + 2(1+\lambda) + 2\lambda = 0$ i $(4+\lambda) + (1+\lambda) + \lambda = 1$, que tenen $\lambda = -1$ com a solució comú.

Per tant, l'únic valor del paràmetre m per al qual les rectes són perpendiculars i es tallen és $m = 2$.

Naturalment, hi ha altres formes d'imposar la segona condició (que les rectes es tallin). Per exemple, buscant el vector $\overrightarrow{PQ}$, on P és un punt de la recta r i Q un punt de la recta s, i imposant que rang $(\overrightarrow{PQ}, v_r, v_s) < 3$. Això dóna que $m = 2$.

De fet, és possible començar la resolució imposant la condició de què les rectes es tallin i comprovar després directament que pel valor obtingut, $m = 2$, les rectes són perpendiculars.

82. PAU 2009 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 4

4.- Donats els vectors $v_1 = (a+1, 2a, 1)$, $v_2 = (-2, a, 2a)$, $v_3 = (a, -2, 4a-2)$ ***de*** $\mathbb{R}^3$***:***

a) ***Calculeu l'angle que formen*** v_1 ***i*** v_2 ***quan*** $a = 0$***.***

b) ***Trobeu el valor del paràmetre*** a ***perquè els vectors*** v_1, v_2 ***i*** v_3 ***siguin perpendiculars dos a dos.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

a) Sigui α l'angle format pels vectors v_1 i v_2. Llavors,

$$\cos\alpha = \frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\| \, \|v_2\|} = \frac{(1,0,1)\cdot(-2,0,0)}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}\,\sqrt{(-2)^2+0^2+0^2}} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

D'aquí, $\alpha = 135^o = 3\pi/4$ rad.

b) Cal que es compleixi que $v_1 \cdot v_2 = 0$, $v_1 \cdot v_3 = 0$ i $v_2 \cdot v_3 = 0$.

$$v_1 \cdot v_2 = (a+1, 2a, 1)\cdot(-2, a, 2a) = 2(a^2-1) = 0 \Longrightarrow a = \pm 1$$

$$v_1 \cdot v_3 = (a+1, 2a, 1)\cdot(a, -2, 4a-2) = a^2 + a - 2 = 0 \Longrightarrow a = 1,\ a = -2$$

$$v_2 \cdot v_3 = (-2, a, 2a)\cdot(a, -2, 4a-2) = 8(a^2-a) = 0 \Longrightarrow a = 1,\ a = 0$$

Solament per $a = 1$ es compleixen les tres igualtats alhora.

83. PAU 2009 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 4

4.- Donats el pla $\pi : x + 2y - z = 0$ ***i el punt*** $P = (3, 2, 1)$***:***

a) ***Calculeu l'equació contínua de la recta*** r ***que passa per*** P ***i és perpendicular a*** π***.***

b) ***Calculeu el punt simètric del punt*** P ***respecte del pla*** π***.***

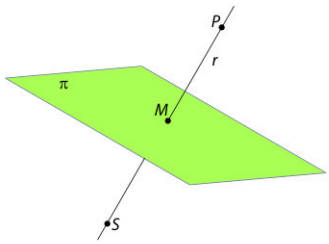
[1 punt per cada apartat]

Solució

a) Els coeficients de l'equació del pla ens proporcionen el seu vector característic, que ens pot servir com a vector director de la recta buscada. Per tant, l'equació d'aquesta recta és

$$r : \frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

b) El punt de tall entre r i π és el punt mig entre el punt P i el seu simètric respecte del pla π.



Busquem aquest punt, al qual anomenarem M.

$$\begin{cases} (x,y,z) \in r \iff x = 3+\lambda,\ y = 2+2\lambda,\ z = 1-\lambda \\ (x,y,z) \in \pi \iff x+2y-z = 0 \end{cases}$$

Llavors, $(3+\lambda)+2(2+2\lambda)-(1-\lambda) = 0 \iff 6\lambda+6 = 0 \iff \lambda = -1$. El punt de tall és $M = (2,0,2)$. Si anomenem $S = (x_s, y_s, z_s)$ al punt simètric, tenim

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MS} \iff (2,0,2) - (3,2,1) = (x_s, y_s, z_s) - (2,0,2) \iff x_s = 1,\ y_s = -2,\ z_s = 3$$

El punt simètric és $S = (1,-2,3)$.

84. PAU 2009 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 6

6.- Siguin $P = (3-2a, b, -4)$***,*** $Q = (a-1, 2+b, 0)$ ***i*** $R = (3,-2,-2)$ ***tres punts de l'espai*** $\mathbb{R}^3$***.***

a) ***Calculeu el valor dels paràmetres*** a ***i*** b ***per als quals aquests tres punts estiguin alineats.***

b) ***Calculeu l'equació contínua de la recta que els conté quan estan alineats.***

c) ***Quan*** $b = 0$***, trobeu les valors del paràmetre*** a ***perquè la distància entre els punts*** P ***i*** Q ***sigui la mateixa que la distància entre els punts*** P ***i*** R***.***

d) ***Si*** $b = 0$***, calculeu el valor del paràmetre*** a ***perquè els punts*** P***,*** Q ***i*** R ***determinin un triangle equilàter.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

a) Els punts P, Q i R estan alineats si i sol si $\overrightarrow{PQ} = k \cdot \overrightarrow{PR}$, és a dir, si i sol si

$$(3a-4, 2, 4) = k(2a, -2-b, 2)$$

D'aquí, cal que $3a-4 = 2ka$, $2 = k(-2-b)$ i $4 = 2k$. De l'última equació se'n treu que $k = 2$ i, llavors, $a = -4$ i $b = -3$.

b) Per $a = -4$ i $b = -3$, els punts són $P = (11,-3,-4)$, $Q = (-5,-1,0)$ i $R = (3,-2,-2)$. La recta que passa per P i Q (i, per tant, també per R) té per equació contínua

c) Quan $b = 0$ els punts són $P = (3 - 2a, 0, -4)$, $Q = (a - 1, 2, 0)$ i $R = (3, -2, -2)$. Llavors,

$$d(P, Q) = \sqrt{[(a - 1) - (3 - 2a)]^2 + (2 - 0)^2 + (0 + 4)^2} = \sqrt{(3a - 4)^2 + 20}\ ,$$

$$d(P, R) = \sqrt{[3 - (3 - 2a)]^2 + (-2 - 0)^2 + (-2 + 4)^2} = \sqrt{4a^2 + 8}\ .$$

La igualtat entre aquestes dues distàncies es produeix quan $(3a - 4)^2 + 20 = 4a^2 + 8$, és a dir, quan $a = 14/5$ o $a = 2$.

d) Perquè el triangle sigui equilàter ha de passar que $d(P, Q) = d(P, R) = d(Q, R)$. La primera igualtat és la que s'ha estudiat en l'apartat anterior. Imposem ara que $d(P, Q) = d(Q, R)$:

$$d(P, Q) = d(Q, R) \iff 9a^2 - 24a + 36 = a^2 - 8a + 36 \iff 8a^2 - 16a = 0 \iff a = 0 \text{ o } a = 2.$$

Evidentment també podem imposar que $d(P, R) = d(Q, R)$. En aquest cas queda $a = 2$ o $a = -14/3$.

Sigui com sigui, el valor del paràmetre a per al qual el triangle determinat per P, Q i R és equilàter és $a = 2$.

Aquest apartat es pot resoldre també substituint a cada un dels punts els valors del paràmetre a trobats a l'apartat anterior, comprovant quin dels dos fa que les tres distàncies siguin iguals.

85. PAU 2009 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 1

QÜESTIONS

1.- Donats el punt $P = (1, 2, 3)$ ***i la recta*** $r : \dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y + 2}{3} = \dfrac{z - 5}{-1}$***:***

a) ***Trobeu l'equació cartesiana (és a dir, de la forma*** $Ax + By + Cz + D = 0$***) del pla*** π ***que passa per*** P ***i és perpendicular a la recta*** r***.***

b) ***Trobeu el punt de tall entre la recta*** r ***i el pla*** π***.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

a) Podem agafar com a vector característic del pla buscat el vector director de la recta; així, $\pi : 2x + 3y - z + D = 0$. Imposem ara que el punt P compleixi aquesta equació, $2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 3 + D = 0$. D'aquí $D = -5$. L'equació del pla és $\pi : 2x + 3y - z - 5 = 0$.

b) El punt de tall és el que compleix les dues equacions que defineixen la recta i l'equació del pla,

$$\left.\begin{array}{r} -x + 1 = 2z - 10 \\ -y - 2 = 3z - 15 \\ 2x + 3y - z - 5 = 0 \end{array}\right\} \iff \left.\begin{array}{rrrr} x & & + 2z & = 11 \\ & y & + 3z & = 13 \\ 2x & + 3y & - z & = 5 \end{array}\right\}$$

Encara que aquest sistema es pot resoldre utilitzant el mètode de Cramer, n'hi ha altres (Gauss, substitució,...) molt més fàcils. La solució d'aquest sistema és $x = 3$, $y = 1$, $z = 4$. El punt de tall és, doncs, $(3, 1, 4)$.

$$/0 \quad 1 \quad 0\backslash \qquad\qquad /0 \quad 0 \quad 1\backslash$$

86. PAU 2009 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 6

6.- Siguin** r **i** s **dues rectes de l'espai les equacions respectives de les quals, que depenen d'un paràmetre real** b**, són les següents:

$$r : \begin{cases} bx + y + 3z = 1 \\ x + 2y + 5z = 1 \end{cases}, \qquad s : \frac{x}{1} = \frac{y-b}{b+1} = \frac{z+1}{-1}.$$

a) ***Trobeu el punt de tall de la recta** r **amb el pla d'equació** $x = 0$ **i el punt de tall de la recta** s **amb aquest mateix pla.***

b) ***Calculeu un vector director per a cada una de les rectes.***

c) ***Estudieu la posició relativa de les dues rectes en funció del paràmetre** b**.***

[1 punt per l'apartat a; 1 punts per l'apartat b; 2 punts per l'apartat c]

Solució

a) El punt de tall de la recta r amb el pla $x = 0$, té la primera component nul·la i, per tant, ha de complir que

$$\begin{cases} y + 3z = 1 \\ 2y + 5z = 1 \end{cases}.$$

La solució d'aquest sistema és $y = -2$ i $z = 1$. Així el punt que estem buscant és $P = (0, -2, 1)$.

Quant a trobar el punt de tall de la recta s amb el pla $x = 0$, solament cal substituir aquest valor a l'equació contínua de la recta s per veure que, llavors, $y = b$ i $z = -1$. Així el punt buscat és $Q = (0, b, -1)$.

b) El vector director de la recta r ha de ser perpendicular als vectors característics dels plans que la determinen, $v_1 = (b, 1, 3)$, $v_2 = (1, 2, 5)$. Llavors, si $v_r = (\alpha, \beta, \gamma)$, cal que

$$(\alpha, \beta, \gamma) \cdot (b, 1, 3) = 0, \qquad (\alpha, \beta, \gamma) \cdot (1, 2, 5) = 0.$$

Aquests productes escalars donen lloc al sistema d'equacions

$$\left.\begin{matrix} \alpha b + \beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + 5\gamma = 0 \end{matrix}\right\}$$

De la segona equació, $\alpha = -2\beta - 5\gamma$. Substituint a la primera equació i fent operacions s'arriba a que $\beta(1 - 2b) = \gamma(3 - 5b)$, la qual cosa permet agafar, per exemple, $\beta = 3 - 5b$ i $\gamma = 1 - 2b$. Llavors,

$$\alpha = -2\beta - 5\gamma = -2(3 - 5b) - 5(1 - 2b) = -1.$$

Així el vector director serà $v_r = (-1, 3 - 5b, 2b - 1)$.

Recordem que v_r també es pot calcular efectuant un producte vectorial,

$$v_r = (b, 1, 3) \times (1, 2, 5) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ b & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -i + (3 - 5b)j + (2b - 1)k = (-1, 3 - 5b, 2b - 1).$$

El vector director de la recta s es treu directament de la seva equació, $v_s = (1, b+1, -1)$.

c) Construïm la matriu

$$A = \begin{pmatrix} \overrightarrow{PQ} \\ v_r \\ v_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b+2 & -2 \\ -1 & 3-5b & 2b-1 \\ 1 & b+1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & b+1 & -1 \\ 0 & b+2 & -2 \\ 0 & 4-4b & 2b-2 \end{pmatrix}$$

Estudiem el rang d'aquesta matriu, comprovant per quin valor del paràmetre b les dues últimes files són proporcionals, és a dir,

$$(b+2)(2b-2) = -2(4-4b) \iff b^2 - 3b + 2 = 0 \iff b = 1 \text{ o } b = 2\ .$$

Per tant,

- Si $b \neq 1$ i $b \neq 2$, tenim que rang $A = 3$; les dues rectes es creuen.
- Si $b = 1$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; d'aquí, rang $A = 2$ i rang $\begin{pmatrix} v_r \\ v_s \end{pmatrix} = 1$. Les dues rectes són paral·leles.
- Si $b = 2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -1 & -7 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; o sigui, rang $A = 2$ i rang $\begin{pmatrix} v_r \\ v_s \end{pmatrix} = 2$. Les dues rectes es tallen.

87. PAU 2008 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 4

4.- Donats el punt $P = (7,5,1)$***, el pla*** $\pi : x - 2y - 3z = 10$ ***i la recta***

$$r : \begin{cases} 3x & - & 2y & + & 2z & = & 7 \\ x & - & 6y & - & 2z & = & 5 \end{cases},$$

a) Trobeu la distància de P ***a*** π***.***

b) Trobeu la distància de P ***a*** r***.***

c) Trobeu la distància de r ***a*** π***.***

PUNTUACIÓ: 0.5 punts pels apartats a) i c); 1 punt per l'apartat b).

a) La distància d'un punt $P=(x_0,y_0,z_0)$ a un pla $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ ve donada per la fórmula

$$d(P,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\ .$$

En el nostre cas, $d(P,\pi)=\dfrac{|7-10-3-10|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-3)^2}}=\dfrac{|-16|}{\sqrt{14}}=\dfrac{16}{\sqrt{14}}$.

b) La manera més directa de trobar la distància d'un punt P a una recta r és la utilització de la fórmula

$$d(P,r)=\frac{\left\|\overrightarrow{PQ}\wedge\vec{v}_r\right\|}{\left\|\vec{v}_r\right\|}\ ,$$

essent Q un punt qualsevol de la recta i $\vec{v}_r$ el seu vector director.

De les equacions implícites de la recta se'n poden deduir les seves equacions paramètriques,

$$\begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=-1-2\lambda \end{cases}$$

Per tant, podem agafar $Q=(3,0,-1)$ i $\vec{v}_r=(2,1,-2)$.

Una altra manera de trobar un punt de la recta i el seu vector director consisteix en donar un valor arbitrari a una de les variables. Si fem, per exemple, $y=0$, del sistema que defineix la recta en deduïm

$$\begin{cases} 3x+2z=7 \\ x-2z=5 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=3\ ,\quad z=-1\ ,$$

obtenint així un punt de la recta, $Q=(3,0,-1)$. El vector director s'obté buscant un vector perpendicular als vectors característics dels plans que defineixen la recta, ja sigui utilitzant el producte escalar,

$$\begin{cases} (a,b,c)\bullet(3,-2,2)=0 \\ (a,b,c)\bullet(1,-6,-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3a-2b+2c=0 \\ a-6b-2c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad a=2b\ ,\quad c=-2b$$

d'on $\vec{v}_r=(2,1,-2)$, o utilitzant el producte vectorial,

$$\vec{v}_r=\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -6 & -2 \end{vmatrix}=(16,8,-16)\ \ ||\ \ (2,1,-2)\ .$$

Sigui com sigui,

$$\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -4 & -5 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (12,-12,6)\,.$$

Per tant, $d(P,r) = \dfrac{\left\| \overrightarrow{PQ} \wedge \vec{v}_r \right\|}{\left\| \vec{v}_r \right\|} = \dfrac{\|(12,-12,6)\|}{\|(2,1,-2)\|} = \dfrac{18}{3} = 6\,.$

Encara hi ha una altra manera de trobar la distància entre el punt P i la recta r. Consisteix en trobar el pla perpendicular a r, passant per P. Es busca la intersecció entre aquest nou pla i la recta. Sigui Q el punt d'intersecció. Llavors, $d(P,r) = d(P,Q)$. Per si algú ho fa així, el pla perpendicular a r, passant per P, té per equació $2x + y - 2z - 17 = 0$ i el punt de tall entre ell i la recta és el punt $Q = (5,1,-3)$. Llavors,

$$d(P,r) = d(P,Q) = \sqrt{(5-7)^2 + (1-5)^2 + (-3-1)^2} = 6\,.$$

c) La recta r i el pla π no són paral·lels, ja que el director de la recta i el característic del pla no són perpendiculars,

$$(2,1,-2) \bullet (1,-2,-3) = 2 - 2 + 6 = 6 \neq 0\,.$$

Per tant, $d(r,\pi) = 0$.

88. PAU 2008 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 6

6.- Les rectes $r_1 : \dfrac{x-a}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{4}$ ***i*** $r_2 : \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-b}{2} = \dfrac{z-4}{-1}$ ***són coplanàries (és a dir, estan incloses en un mateix pla).***

a) Expliqueu, raonadament, quina és la seva posició relativa.

b) Trobeu la relació que hi ha entre els paràmetres a ***i*** b***.***

c) Trobeu els valors de a ***i*** b ***si el pla que les conté passa pel punt*** $P = (2,4,6)$***.***

PUNTUACIÓ: apartat a) 1.5 punts; apartat b) 1punt; apartat c) 1.5 punts.

Solució:

a) Dues rectes coplanàries han de tallar-se o ser paral·leles. Com que els vectors directors corresponents no són proporcionals ($2/1 \neq 1/2$), sigui quin sigui el valor del paràmetre a, és evident que es tallen en un punt.

b) Sigui Q el punt on es tallen. Llavors, per ser d'ambdues rectes,

$$Q = (a+2\lambda, \lambda, -1+4\lambda) = (-2+\mu, b+2\mu, 4-\mu) \ .$$

El sistema que ens queda,

$$\begin{cases} 2\lambda & - & \mu & = & -2-a \\ \lambda & - & 2\mu & = & b \\ 4\lambda & + & \mu & = & 5 \end{cases}$$

ha de ser compatible determinat. Treballant amb la matriu ampliada del sistema obtenim

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & b \\ 2 & -1 & -a-2 \\ 4 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & b \\ 0 & 3 & -a-2-2b \\ 0 & 9 & 5-4b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & b \\ 0 & 3 & -a-2-2b \\ 0 & 0 & 3a+2b+11 \end{array}\right) \ ,$$

la qual cosa ens porta a què el sistema és compatible determinat si i sol si $3a+2b+11=0$.

Podem arribar a la mateixa conclusió observant que la matriu del sistema té rang 2 (per exemple, les dues primeres files són independents) per a qualsevol valor del paràmetre a. Per tant, cal que la matriu ampliada no tingui rang 3:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2-a \\ 1 & -2 & b \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -9a-6b-33=0 \Leftrightarrow 3a+2b+11=0 \, .$$

Encara es pot arribar a la mateixa conclusió d'una altra manera. De l'equació contínua de cada una de les rectes, podem passar a les equacions implícites,

$$r_1 : \begin{cases} x & - & 2y & & & = & a \\ & & 4y & - & z & = & 1 \end{cases} ; \qquad r_2 : \begin{cases} 2x & - & y & & & = & 1 \\ & & y & + & 2z & = & b+8 \end{cases} .$$

El sistema format per les quatre equacions ha de ser compatible determinat:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & a \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -b-4 \\ 0 & 1 & 2 & b+8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & a \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -2a-b-4 \\ 0 & 1 & 2 & b+8 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2 & b+8 \\ 0 & 0 & -9 & -4b-31 \\ 0 & 0 & -6 & -2a-4b-28 \end{array}\right)$$

Les dues últimes files han de ser proporcionals:

$$\frac{3}{2} = \frac{4b+31}{2a+4b+28} \Leftrightarrow 3a+2b+11=0 \ .$$

Així, per a què les rectes siguin coplanàries ha de ser $3a+2b+11=0$.

c) El pla que les conté es pot escriure com

$$\pi : (x,y,z) = (a,0,-1) + \lambda(2,1,4) + \mu(1,2,-1) \ .$$

D'acord amb l'enunciat, el punt $P=(2,4,6) \in \pi$, és a dir, aquest punt satisfà l'equació del pla: $(2,4,6) = (a,0,-1) + \lambda(2,1,4) + \mu(1,2,-1)$. D'aquí, el sistema

$$\begin{cases} 2\lambda & + & \mu & = & 2-a \\ \lambda & + & 2\mu & = & 4 \\ 4\lambda & - & \mu & = & 7 \end{cases}$$

ha de ser compatible determinat.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2-a \\ 4 & -1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -a-6 \\ 0 & -9 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & a+6 \\ 0 & 0 & 3a+9 \end{array}\right) .$$

Per tant, cal que $3a+9=0 \Leftrightarrow a=-3$. Substituint aquest valor a la relació trobada a l'apartat anterior, tenim $b=-1$.

En definitiva, els valors són $a=-3$ i $b=-1$.

89. PAU 2008 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 4

4.- Trobeu l'equació de la recta perpendicular al pla $\pi : 2x-y+z+3=0$ ***que passa pel punt*** $(-1, 3, a)$ ***del pla.***

PUNTUACIÓ: 2 punts.

Solució:

Si el punt $(-1, 3, a)$ és del pla, ha de complir la seva equació,

$$2\cdot(-1) - 3 + a + 3 = 0 \Leftrightarrow a = 2 \, .$$

El vector director de la recta buscada ha de ser paral·lel al vector característic del pla, la qual cosa permet agafar com a vector director aquest mateix vector. Així, l'equació de la recta és

$$(x,y,z) = (-1,3,2) + \lambda(2,-1,1) \, .$$

90. PAU 2008 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 6

6.- Donades les rectes $r: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{-1}$, $s: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+7}{2}=\dfrac{z+5}{3}$ ***i el punt*** $P=(1,1,-1)$***, volem trobar l'equació de la recta que passa per*** P ***tallant a*** r ***i*** s***. Per aconseguir-ho, es demana:***

a) Trobeu l'equació general o cartesiana (és a dir, l'equació de la forma $Ax+By+Cz+D=0$***) del pla*** π ***que conté la recta*** r ***i el punt*** P***.***

b) Busqueu el punt M ***intersecció entre el pla*** π ***i la recta*** s***.***

c) Trobeu l'equació de la recta que passa pels punts P ***i*** M***.***

d) Comproveu que la recta trobada a l'apartat anterior és la que estem buscant.

PUNTUACIÓ: 1 punt per cada apartat.

Solució:

a) L'equació del pla π es pot trobar de diferents maneres. Aquí se n'exposen dues.

La primera consisteix en trobar dos vectors generadors del pla. Com que ha de contenir la recta *r*, el vector director d'ella, $\vec{v}_r=(1,2,-1)$, és un dels vectors generadors. L'altre es pot calcular com $\overrightarrow{PQ}$, essent Q un punt qualsevol de la recta r ; per exemple, $Q=(2,-1,0)$. Així, $\overrightarrow{PQ}=(2,-1,0)-(1,1,-1)=(1,-2,1)$ i l'equació vectorial del pla π és $(x,y,z)=(1,1,-1)+\lambda(1,2,-1)+\mu(1,-2,1)$, que dóna lloc a l'equació general $y+2z+1=0$.

En la segona forma, agafem l'equació $Ax+By+Cz+D=0$ i fem que sigui verificada per tres dels punts del pla: $P=(1,1,-1)$, $Q_1=(2,-1,0)$ i $Q_2=(3,1,-1)$. Els dos últims estan extrets de la recta *r*: Q_1 es dedueix directament de l'equació i Q_2 s'obté sumant una vegada el vector director $\vec{v}_r=(1,2,-1)$ a Q_1. El sistema d'equacions que ens queda és

$$\begin{cases} A + B - C + D = 0 \\ 2A - B + D = 0 \\ 3A + B - C + D = 0 \end{cases}$$

que té per solució $A=0$, $B=D$, $C=2D$. Fent $D=1$, per exemple, obtenim l'equació buscada: $y+2z+1=0$.

b) Les equacions paramètriques de la recta s són $x=1+\lambda$, $y=-7+2\lambda$, $z=-5+3\lambda$. Substituint-les a l'equació del pla anterior, tenim

$$(-7+2\lambda)+2(-5+3\lambda)+1=0 \Leftrightarrow 8\lambda-16=0 \Leftrightarrow \lambda=2\,.$$

El punt de tall és $M=(1+2,-7+4,-5+6)=(3,-3,1)$.

Naturalment, hi ha altres maneres per a calcular aquest punt. Per exemple, l'equació contínua de la recta *s* es pot descompondre en dues equacions implícites i resoldre el sistema format per elles i l'equació del pla de l'apartat anterior.

c) L'equació contínua de la recta demanada és

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-1}{-3-1}=\frac{z+1}{1+1}\Leftrightarrow\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+1}{2}\ .$$

d) Per construcció, la recta trobada passa pel punt $P=(1,1,-1)$ i talla a la recta s en el punt $M=(3,-3,1)$. Per tant, solament resta per comprovar que també talla a la recta r. Un dels mètodes per a realitzar aquesta comprovació és veure que el sistema format per les equacions contínues d'ambdues rectes és compatible determinat,

$$\begin{cases}\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{-1}\\[2mm]\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z+1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y=5\\y+2z=-1\\2x+y=3\\x-z=2\end{cases}$$

Sumant la primera i la tercera equació tenim $4x=8$, és a dir, $x=2$. D'aquí, a més a més, $y=-1$. De la segona equació, $z=0$, valor que també compleix la quarta equació. Per tant, la recta de l'apartat c) talla a la recta r en el punt $(2,-1,0)$.

Aquest apartat es pot raonar també sense buscar el punt d'intersecció amb r. En efecte, la recta trobada a l'apartat c) passa per P i per M per construcció. Com que, a més a més. està continguda al pla π, que també conté la recta r, la intersecció entre les dues està assegurada, a menys que fossin paral·leles, que no és, evidentment, el cas.

91. PAU 2008 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 4

4.- Donats el pla $\pi:3x-2y+5z=6$ ***i la recta*** $r:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+2}{-3}$, ***busqueu el punt de tall, si existeix.***

PUNTUACIÓ: 2 punts.

Solució:

De l'equació contínua de la recta se'n dedueix que

$$x=1+2\lambda\ ,\ \ y=-1+\lambda\ ,\ \ z=-2-3\lambda\ .$$

Substituint aquests valors a l'equació del pla π ens queda que

$$3(1+2\lambda)-2(-1+\lambda)+5(-2-3\lambda)=6\Leftrightarrow-11\lambda=11\Leftrightarrow\lambda=-1\ .$$

El punt de tall és $P=(-1,-2,1)$.

El problema també es pot resoldre trobant les equacions implícites de la recta i resolent el sistema de tres equacions amb tres incògnites resultant d'ajuntar-hi l'equació del pla.

$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{-3}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=2y+2\\-3y-3=z+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y=3\\3y+z=-5\end{cases}$$

El sistema és

$$\begin{cases}3x-2y+5z=6\\x-2y=3\\3y+z=-5\end{cases}$$

que té per solució el punt P.

92. PAU 2007 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 1

QÜESTIONS

1.- Trobeu les equacions dels plans paral·lels a $\pi : 2x - y + 2z = 3$ situats a distància 6 d'ell.

Els plans demanats tenen equacions de la forma $2x - y + 2z + D = 0$ i han de passar a distància 6 de qualsevol punt del pla π, per exemple el $(0,-3,0)$. Per tant, s'ha de verificar

$$6 = \left| \frac{3 + D}{\sqrt{4+1+4}} \right| = \left| \frac{3+D}{3} \right| \rightarrow 3 + D = \pm 18 \rightarrow D = 15 \quad \text{i} \quad D = -21.$$

Substituint els valors de D s'obtenen les equacions demanades.

$$2x - y + 2z + 15 = 0\,, \quad 2x - y + 2z - 21 = 0\,.$$

PUNTUACIÓ:

1 punt pel plantejament i arribar a escriure alguna expressió matemàtica equivalent a "pla paral·lel situat a distància 6 de π".

0.5 punts per cada solució.

93. PAU 2007 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 5

PROBLEMES

5.- Una recta *r* és paral·lela a la recta $s : x - 1 = y - 1 = z - 1$, talla en un punt *A* a la recta $t : \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z + 1$ i en un punt B a la recta $l : \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$.

a) Trobeu l'equació del pla determinat per les rectes *r* i *t*.
b) Calculant el punt d'intersecció del pla anterior amb la recta *l*, trobeu el punt *B*.
c) Trobeu l'equació de la recta *r*.
d) Trobeu el punt *A*.

a) El pla demanat és paral·lel als vectors directors de les rectes *s* i *t*, (1,1,1) i (3,2,1) respectivament. Llavors, el vector de coeficients (*a,b,c*) del pla demanat és qualsevol que sigui perpendicular als dos vectors. Per exemple, es pot plantejar el sistema

$$\begin{cases} (a,b,c)\cdot(1,1,1) = 0 \\ (a,b,c)\cdot(3,2,1) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases} \rightarrow b = -2a,\ c = a\,.$$

Per tant, qualsevol vector de la forma (*a,-2a,a*), per exemple (1,-2,1), serveix com a vector de coeficients o perpendicular al pla. Per construir l'equació només resta trobar un punt del pla. Qualsevol de la recta *t* serveix, per exemple el (1,0,-1).

Equació del pla: $(x-1) - 2y + (z+1) = 0 \quad \rightarrow \quad x - 2y + z = 0\,.$

També es pot obtenir el vector (*a,b,c*) per mitjà del producte vectorial

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1,2,-1)$$

i a partir d'aquí es completa la construcció de l'equació.

b) Punt d'intersecció de la recta $l: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$ i el pla $x-2y+z=0$:

La primera igualtat de l'equació de la recta permet escriure $x = y+1$. Si es substitueix dins l'equació del pla i s'aïlla z s'obté $z = y-1$. Finalment, substituint z dins la segona igualtat de l'equació de la recta, $\frac{y-1}{2} = \frac{y-1}{3} \to y = 1$ i el punt buscat és *B*=(2,1,0).

c) La recta *r* és la paral·lela a *s* que passa per *B,*

$$x-2 = y-1 = z.$$

d) Finalment, el punt *A* és el d'intersecció de *r* i *t*,

$$\begin{cases} x-2 = y-1 = z \\ \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z+1 \end{cases}$$

De les dues igualtats de l'equació de *r* es pot escriure $x = z+2$ i $y = z+1$. Quan es substitueixen dins l'equació de *t*,

$$\frac{z+1}{3} = \frac{z+1}{2} = z+1,$$

on les dues igualtats es verifiquen quan $z = -1$. Per tant, el punt *A* és (1,0,-1).

PUNTUACIÓ:

Apartat a) 0.5 punts pel vector de coeficients i 0.5 per l'equació del pla.

Apartats b), c) i d) 1 punt cada un.

94. PAU 2007 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2

2.- Considereu els punts de l'espai $P = (-1, a-1, 3)$, $Q = (0, a-2, 1-a)$ i $R = (2, -1, 6-6a)$.

a) Trobeu el valor de *a* per al qual els tres punts estan alineats.

b) Quan els tres punts estan alineats, quina és l'equació de la recta que els conté?

a) Una manera senzilla d'imposar que els tres punts estiguin alineats consisteix en demanar que els vectors $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{QR}$ siguin paral·lels, és a dir, proporcionals.

$\overrightarrow{PQ} = (0, a-2, 1-a) - (-1, a-1, 3) = (1, -1, -a-2)$,

$\overrightarrow{QR} = (2, -1, 6-6a) - (0, a-2, 1-a) = (2, 1-a, 5-5a)$.

Llavors, seran paral·lels si $\frac{2}{1} = \frac{1-a}{-1} = \frac{5-5a}{-a-2}$ i les dues igualtats són certes quan $a = 3$.

Existeix la possibilitat que ho facin per altres vies. Així per exemple, poden construir l'equació de la recta que passa per dos punts en funció de *a* i després imposar que passi pel tercer. Fins i tot, algun estudiant amb tendència a utilitzar fórmules pot calcular l'àrea del triangle i imposar que valgui zero.

b) Quan $a = 3$, es té $P = (-1, 2, 3)$, $Q = (0, 1, -2)$ i $\overrightarrow{PQ} = (1, -1, 5)$. La recta es pot escriure $(x, y, z) = (0, 1, -2) + t(1, -1, -5)$ o també $x = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{-5}$.

PUNTUACIÓ:
Apartat a) 0.5 punts per plantejar alguna idea correcta que porti a l'alineament dels punts i 0.5 per trobar *a* correctament.
Apartat b) 1 punt. Si el resultat de *a* no és el correcte, la situació més probable és que l'estudiant escrigui alguna equació que passi per dos dels punts i que no comprovi que no passa pel tercer i, per tant, que el resultat és incorrecte. En aquest cas compteu 0.5.

95. PAU 2007 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4

4.- Trobeu l'equació de la recta continguda en el pla $\pi : x + 2y + 6z - 2 = 0$ que talla als eixos *OY* i *OZ*.

La part més important d'aquesta qüestió és "imaginar" correctament què cal fer.
Primerament es busquen els punts de tall del pla amb els eixos esmentats.

Eix *OY*: $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, que substituït dins l'equació del pla proporciona $y = 1$.

Eix *OZ*: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, que substituït dins l'equació del pla proporciona $z = \frac{1}{3}$.

Llavors, la recta demanada és la que passa pels punts $(0,1,0)$ i $(0,0,1/3)$,

$$(x, y, z) = (0, 1, 0) + t(0, 1, -1/3),$$

o també

$$x = 0, \quad \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1/3}.$$

PUNTUACIÓ:
0.5 punts pel tall amb *OY*.
0.5 punts pel tall amb *OZ*.
1 punt per l'equació.

Si fan els càlculs malament però segueixen un esquema correcte compteu 0.5 punts.

Si escriuen l'equació contínua de la recta com $\frac{x}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1/3}$, malgrat "fer lleig", no penalitzeu i compteu un punt.

96. PAU 2007 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 5

PROBLEMES

5.- Considereu la recta d'equació $r: x=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{2}$.

a) Expresseu el quadrat de la distància d'un punt qualsevol (x,y,z) de la recta al punt $P=(1,2,5)$ com una funció de la coordenada x.

b) Trobeu quin valor de x fa mínima aquesta funció, deduïu d'aquí quin punt Q de la recta és el més proper a P i calculeu la distància del punt a la recta.

c) Escriviu l'equació de la recta que passa per P i Q i comproveu que és perpendicular a r.

a) La magnitud demanada és $d^2=(x-1)^2+(y-2)^2+(z-5)^2$. Llavors, tenint en compte que un punt qualsevol de la recta verifica

$$\frac{y-2}{2}=x\to y=2x+2,$$
$$\frac{z-1}{2}=x\to z=2x+1,$$

la funció de x demanada és

$$f(x)=(x-1)^2+(2x)^2+(2x-4)^2=9x^2-18x+17.$$

b) Com que $f'(x)=18x-18$ i $f''(x)=18$, la derivada s'anul·la quan $x=1$ i es tracta d'un mínim.

Tenint en compte que quan la funció es mínima, la distància de P a la recta també ho és, el punt Q més proper a P és $(1,4,3)$.

Donat que $f(1)=8$, la distància de P a la recta val $\sqrt{8}$.

c) L'equació de la recta que passa pels punts $P=(1,2,5)$ i $Q=(1,4,3)$ es pot escriure

$$x=1,\ \frac{y-2}{2}=\frac{z-5}{-2}.$$

Com a la qüestió 4, doneu per bona la solució escrita com

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-5}{-2}$$

Finalment, com a vectors directors de les rectes es poden considerar $(1,2,2)$ i $(0,2,-2)$, que, tenen producte escalar nul, $(1,2,2)\cdot(0,2,-2)=0$, cosa que garanteix la perpendicularitat de les dues rectes.

PUNTUACIÓ:
Apartat a) 1.5 punts.
Apartat b) 0.5 punts per obtenir correctament $x=1$; 0.5 punts pel punt Q i 0.5 per la distància.
Apartat c) 0.5 per l'equació de la recta i 0.5 per comprovar la perpendicularitat.

$$\begin{cases} x+2y+z=5 \end{cases}$$

97. PAU 2007 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 1

QÜESTIONS

1.- Trobeu l'equació del pla perpendicular a la recta $r:\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y=3 \end{cases}$ que passa per l'origen de coordenades.

Primerament, cal obtenir el vector director de la recta que ha d'actuar com a vector de coeficients o vector perpendicular del pla buscat.

Això es pot fer escrivint la recta d'alguna forma que el posi de manifest. Per exemple, de la segona equació, $y=3-2x$.

Substituint a la primera i aïllant z, $z=1-x-y=1-x-3+2x=x-2$.

Llavors, l'equació de la recta es pot escriure

$$(x,y,z)=(0,3,-2)+x(1,-2,1)$$

i el vector buscat és $(1,-2,1)$.

També es pot calcular a partir del producte vectorial dels vectors de coeficients dels plans que defineixen la recta.

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=(-1,2,-1).$$

Finalment, com que el pla demanat ha de passar per l'origen, la seva equació és

$$x-2y+z=0\ .$$

PUNTUACIÓ:
1 punt per obtenir el vector de coeficients de forma correcta.
1 punt per escriure correctament l'equació del pla.

98. PAU 2007 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 4

4.- Trobeu els punts de la recta $r: x-1=y+2=z$ que equidisten dels plans $\pi_1: 4x-3z-1=0$ i $\pi_2: 3x+4y-1=0$.

Un punt qualsevol de la recta es pot expressar com $(z+1,z-2,z)$. Llavors, igualant la distància d'aquest punt a cada un dels plans,

$$\left|\frac{4(z+1)-3z-1}{\sqrt{16+9}}\right|=\left|\frac{3(z+1)+4(z-2)-1}{\sqrt{16+9}}\right|\rightarrow z+3=\pm(7z-6).$$

Amb el signe positiu: $z+3=7z-6\rightarrow -6z=-9\rightarrow z=3/2$ i el punt és

$$(5/2,-1/2,3/2).$$

Amb el signe negatiu: $z+3=-7z+6\rightarrow 8z=3\rightarrow z=3/8$ i el punt és

$$(11/8,-13/8,3/8).$$

PUNTUACIÓ:
0.5 punts per parametritzar correctament un punt qualsevol de la recta.
0.5 per plantejar bé la igualtat de distàncies.
0.5 punts per cada una de les solucions.

99. PAU 2007 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 6

6.- A l'espai es consideren els tres plans d'equacions respectives:
$\pi_1 : x+2y+z=1$, $\pi_2 : px+y+pz=1$ i $\pi_3 : px+y+2z=1$ on p és un paràmetre real.
a) Esbrineu per a quins valors de p els tres plans es tallen en un únic punt. Trobeu aquest punt quan $p=1$.
b) Hi ha algun valor de p que faci que la intersecció comuna sigui una recta? Si és així, escriviu l'equació vectorial d'aquesta recta.
c) Trobeu quina és la posició relativa dels tres plans quan $p=1/2$.

De fet, l'estudi demanat es pot fer a partir de la discussió del sistema format per les equacions dels tres plans.

$$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ px+y+pz=1 \\ px+y+2z=1 \end{cases}$$

En primer lloc, s'estudia el rang de la matriu ampliada.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ p & 1 & p & 1 \\ p & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1-2p & 0 & 1-p \\ 0 & 1-2p & 2-p & 1-p \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1-2p & 0 & 1-p \\ 0 & 0 & 2-p & 0 \end{pmatrix}.$$

Llavors, la matriu de coeficients deixa de tenir rang 3 quan $p=1/2$ i $p=2$.

Es pot arribar a la mateixa conclusió igualant a zero el determinant de la matriu de coeficients.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ p & 1 & p \\ p & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2p^2-5p+2=0 \rightarrow p=\frac{1}{2}, 2.$$

El cas $p=1/2$ fa que el sistema sigui incompatible i $p=2$ compatible indeterminat.

a) Els tres plans es tallen en un punt quan p és diferent de 2 i de 1/2, ja que llavors el sistema és compatible determinat. Quan $p=1$, el sistema triangulat s'escriu

$$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ -y=0 \\ z=0 \end{cases},$$

que proporciona com a solució el punt (1,0,0).

b) Per a què la intersecció sigui una recta cal que el sistema sigui compatible indeterminat. Això només pot succeir quan $p=2$. En aquest cas, els tres plans són $\pi_1 : x+2y+z=1$, $\pi_2 : 2x+y+2z=1$ i $\pi_3 : 2x+y+2z=1$, de manera que el segon i el tercer són el mateix i

el primer, al no ser paral·lel, proporciona una recta com a intersecció. Aïllant y i z de les equacions dels dos primers plans s'obté $y = 1/3$ i $z = 1/3 - x$. D'aquí, l'equació vectorial de la recta es pot escriure

$$(x, y, z) = (0, 1/3, 1/3) + x(1, 0, -1).$$

c) Quan $p = 1/2$ el sistema és incompatible, per tant no hi ha intersecció comuna als tres plans. Ara les equacions són $\pi_1 : x + 2y + z = 1$, $\pi_2 : x/2 + y + z/2 = 1$ i $\pi_3 : x/2 + y + 2z = 1$ i és evident que els dos primers plans són paral·lels mentre que el tercer els talla.

PUNTUACIÓ:

Apartat a)

1 punt per trobar correctament els valors de *p* que discriminen.

0.5 punts per dir que es tallen en un punt quan *p* és diferent de 2 i de 1/2.

0.5 punts per resoldre el cas $p = 1$.

Apartat b)

0.5 punts per donar la interpretació geomètrica del cas $p = 2$

0.5 punts per l'equació vectorial de la recta.

Apartat c) 1 punt. Tenint en compte que aquest apartat es pot fer de manera independent, sembla correcte assignar-li una mica més de puntuació.

100. PAU 2006 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 3

3. Calculeu l'equació de la recta paral·lela a la recta $r : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$ que passa pel punt (0,1,0).

Es pot encarar el problema al menys de dues formes. La primera, i més senzilla, és observar que la recta buscada ha de ser de la forma $\begin{cases} x + y - z = D_1 \\ 2x - y + z = D_2 \end{cases}$. Els valors de D_1 i D_2 es calculen imposant que la nova recta passi pel punt (0, 1, 0). Aquests valors són $D_1 = 1$, $D_2 = -1$. Així, les equacions implícites de la recta buscada són

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + z = -1 \end{cases}.$$

Una altra forma consisteix en calcular el vector director de la recta *r* i construir l'equació vectorial de la recta demanada. Per trobar el vector director de *r*, al qual denotarem per v_r, es poden buscar les seves equacions paramètriques,

$$x = \frac{1}{3},\ y = -\frac{1}{3} + \lambda,\ z = \lambda \ \Rightarrow\ v_r = (0,1,1).$$

També podem trobar el vector perpendicular als dos plans que defineixen la recta, ja sigui utilitzant el producte escalar,

$$\begin{cases} (a,b,c)\bullet(1,1,-1) = 0 \\ (a,b,c)\bullet(2,-1,1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b - c = 0 \\ 2a - b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow\ a = 0,\ c = b \ \Rightarrow\ v_r = (0,1,1)$$

o el producte vectorial,

$$v_r\,' = (1,1,-1) \wedge (2,-1,1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0,-3,-3) \;\Rightarrow\; v_r = (0,1,1)\,.$$

Sigui com sigui, l'equació vectorial de la recta buscada és $(x,y,z) = (0,1,0) + t \cdot (0,1,1)$.
Si es troba el vector director de la recta *r*, compteu 1 punt; l'altre és per l'equació de la recta buscada. Naturalment, si algun estudiant ho fa pel primer procediment, els 2 punts són per la qüestió ben acabada.

101. PAU 2006 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 4

4. Determineu els extrems d'un segment *AB* sabent que el punt *A* pertany al pla $2x + y + z = 0$, el punt *B* pertany a la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{3}$ i el punt mig del segment és (0,0,0).

Sigui $A = (a_1, a_2, a_3)$ i $B = (b_1, b_2, b_3)$. Com que el punt *A* pertany al pla donat, sabem que $2a_1 + a_2 + a_3 = 0$. Per altra banda, el punt *B* ha de complir l'equació de la recta; així, $\begin{cases} b_1 + 2b_2 - 5 = 0 \\ 3b_2 + b_3 - 6 = 0 \end{cases}$. A més a més, sabem que $\frac{A+B}{2} = (0,0,0)$. D'aquí ens surt que $a_1 = -b_1$, $a_2 = -b_2$ i $a_3 = -b_3$. Llavors, el sistema a resoldre és $\begin{cases} 2b_1 + b_2 + b_3 = 0 \\ b_1 + 2b_2 = 5 \\ 3b_2 + b_3 = 6 \end{cases}$, que té per solució $b_1 = -\frac{1}{3}$, $b_2 = \frac{8}{3}$ i $b_3 = -2$. Els punts buscats són $A = \left(\frac{1}{3}, -\frac{8}{3}, 2\right)$ i $B = \left(-\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, -2\right)$.

Una altra forma de plantejar el problema és trobar les equacions paramètriques de la recta. Llavors ens queda que $B = (2t+1, -t+2, 3t)$. Per tant, i com que $A + B = (0,0,0)$, tenim $A = (-2t-1, t-2, -3t)$. Aquest punt ha de complir l'equació del pla donat, $2(-2t-1) + (t-2) + (-3t) = 0$. La solució d'aquesta equació ens dóna $t = -\frac{2}{3}$. Llavors, $B = \left(-\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, -2\right)$ i $A = \left(\frac{1}{3}, -\frac{8}{3}, 2\right)$.

És difícil donar un patró de puntuacions en aquesta qüestió. Doneu 1 punt pel plantejament i l'altre per la resolució.

102. PAU 2006 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

QÜESTIONS

1.- Trobeu les coordenades dels punts situats sobre la recta d'equació $(x,y,z)=(-1,1,1)+t\cdot(1,2,1)$ que estan a distància 1 del pla $2x+2y+z=5$.

Un punt qualsevol de la recta és $(t-1,2t+1,t+1)$. Imposar que es troba a distància 1 del pla equival a fer

$$\left|\frac{2(t-1)+2(2t+1)+t+1-5}{\sqrt{4+4+1}}\right|=1$$

Ara només resta resoldre $\frac{7t-4}{3}=\pm 1$, resultant $t=1$ i $t=1/7$. Així els punts buscats són

$$(0,3,2) \text{ i } \left(-\frac{6}{7},\frac{9}{7},\frac{8}{7}\right).$$

1 punt per arribar a l'expressió DISTÀNCIA=1.
0.5 punts per cada solució.

103. PAU 2006 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 5

PROBLEMES

5.- Una recta *r* passa pel punt *A*=(3,0,2) i té la direcció del vector (-1,1,4).

a) Trobeu quin angle forma *r* amb el pla horitzontal.

b) Comproveu que no passa pel punt *B*=(1,3,10).

c) Trobeu l'equació de la recta que passa per *A* i *B*.

a) Se sap que el sinus de l'angle α que forma el vector $(-1,1,4)$ amb el pla horitzontal, és a dir, $z=0$, s'obté de fer

$$\sin\alpha=\cos(90-\alpha)=\frac{(-1,1,4)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{18}}=\frac{4}{3\sqrt{2}},$$

que també serveix per trobar el cosinus de l'angle complementari. Llavors, $\alpha=70.529^\circ=1.231\,rad$.

b) El vector $\vec{v}$ que uneix els punts *A* i *B* és $\vec{v}=(1,3,10)-(3,0,2)=(-2,3,8)$. Com que aquest vector no és paral·lel a $(-1,1,4)$, la recta no passa pel punt *B*.

c) L'equació de la recta és $(x,y,z)=(3,0,2)+t(-2,3,8)$.

1.5 punts pel primer apartat. Si en lloc del sinus de l'angle o el cosinus del complementari es fa servir el cosinus de l'angle, penalitzeu però no poseu zero.
1 punt pel segon apartat. Cal pensar que alguns estudiants poden buscar l'equació de la recta i comprovar si el punt *B* és d'ella.
1.5 punts pel tercer apartat.

104. PAU 2006 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 3

3. Determineu l'equació del pla perpendicular a la recta $r:\begin{cases} x-y-1=0 \\ x+z+2=0 \end{cases}$ que passa pel punt (1,1,2). Quina distància hi ha d'aquest pla a l'origen de coordenades?

En primer lloc cal trobar un vector director de la recta, ja sigui escrivint l'equació paramètricament o per altres mètodes. Així, per exemple, l'equació de la recta es pot escriure

$$r:(x,y,z)=(0,-1,-2)+t(1,1,-1)$$

i el vector és, llavors, $(1,1,-1)$.

L'equació del pla és $\pi: x-1+y-1-(z-2)=0$ o bé, simplificant, $\pi: x+y-z=0$. És evident que el pla passa per l'origen de coordenades i, per això, la distància del $(0,0,0)$ al pla val zero.

0.5 punts pel càlcul del vector director.
1 punt per l'equació del pla.
0.5 punts per justificar que la distància val zero.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

105. PAU 2006 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 6

6. Considereu la recta $r:\begin{cases} 2x-5y-z-3=0 \\ x-3y-z-2=0 \end{cases}$ i el pla $p: 2x-y+az+2=0$ on a és un paràmetre.
   a) Trobeu un vector director de la recta i un vector perpendicular al pla.
   b) Quin ha de ser el valor d'a perquè la recta i el pla siguin paral·lels.
   c) Esbrineu si existeixen valors d'a pels quals la recta i el pla siguin perpendiculars. En cas afirmatiu calculeu-los.
   d) Esbrineu si existeixen valors d'a pels quals la recta i el pla formin un angle de 30º. En cas afirmatiu calculeu-los.

a) La recta es pot expressar en forma paramètrica com

$$r:(x,y,z)=(-1,-1,0)+t(2,1,-1).$$

Així, un vector director és $\vec{v}=(2,1,-1)$.

Un vector perpendicular al pla, en funció d'a, és $\vec{w}=(2,-1,a)$.

b) La recta i el pla seran paral·lels quan $\vec{v}$ i $\vec{w}$ siguin perpendiculars, és a dir, quan $\vec{v}\cdot\vec{w}=0$. Llavors, $(2,1,-1)\cdot(2,-1,a)=3-a=0$ i, quan el paràmetre val 3 la recta i el pla són paral·lels.

c) De forma anàloga, la recta i el pla seran perpendiculars quan els dos vectors siguin paral·lels, però això no pot passar ja que no hi ha cap valor d'a que permeti que

$$\frac{2}{2}=\frac{-1}{1}=\frac{a}{-1}.$$

d) Ara cal que els vectors formin un angle α de 60° o bé de 120°. Utilitzant el producte escalar,

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|\cdot\cos\alpha,$$

$$3-a=\sqrt{6}\sqrt{5+a^2}\left(\pm\frac{1}{2}\right),$$

$$a^2 + 12a - 3 = 0,$$

$$a = -6 \pm \sqrt{39}.$$

1 punt cada apartat.

106. PAU 2005 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 2

2. Considereu els vectors de R^3:

$$\vec{v}_1 = (-1,3,4),\ \vec{v}_2 = (2,-1,-3) \text{ i } \vec{v}_3 = (1,2k+1,k+3).$$

a) Trobeu l'únic valor de k per al qual aquests vectors **no** són una base de R^3.

b) Per un valor de k diferent del que heu trobat a l'apartat a), quins són els components del vector $\vec{w} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ en la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$?

SOLUCIÓ.

a) **[1 punt]** Tres vectors de R^3 no són base si no són linealment independents. Això passarà quan el determinant format pels tres vectors valgui 0:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2k+1 & k+3 \end{vmatrix} = 5k - 15 = 0 \Leftrightarrow k = 3.$$

Al mateix resultat s'arriba imposant que el rang de la matriu formada pels tres vectors, no sigui 3:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2k+4 & k+3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 2k+4 & k+7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2k+4 & k+7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -k+3 \end{pmatrix}$$

b) **[1 punt]** Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ és una base, el vector $\vec{w} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ té clarament els components $(1,1,1)$.

107. PAU 2005 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 3

3. Trobeu la distància entre la recta $r: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z+2}{3}$ i el pla $\pi: 2x - 3y + 3z + 5 = 0$.

SOLUCIÓ [2 punts] Primer de tot estudiem la posició relativa de recta i pla. Observem que el vector director de la recta, $(2,-3,3)$, és el vector normal del pla! Per tant, la recta és perpendicular al pla. La distància de la recta al pla és, doncs, 0.

108. PAU 2005 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 4

4. Donats els punts $A=(1,0,0)$ i $B=(0,0,1)$ es demana:

a) trobeu un punt C sobre la recta d'equació paramètrica $\begin{cases} x &= 1 \\ y &= 1+\lambda \\ z &= 1+\lambda \end{cases}$ que faci que el triangle ABC sigui rectangle en C;

b) trobeu l'àrea del triangle ABC.

SOLUCIÓ

a) **[1 punt]** El punt $C=(1,1+\lambda,1+\lambda)$. Per tal que el triangle ABC sigui rectangle en C, els vectors $\overrightarrow{CA}=(0,-1-\lambda,-1-\lambda)$ i $\overrightarrow{CB}=(-1,-1-\lambda,-\lambda)$ han de ser ortogonals, és a dir

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0 \quad\Leftrightarrow\quad (1+\lambda)^2+\lambda(1+\lambda)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda=-1;\quad \lambda=-\frac{1}{2}.$$

Això ens dóna dos punts solució: $C=(1,0,0)$ i $C=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. El primer punt, clarament és igual a A i fa que no hi hagi cap triangle. La única solució és, doncs, $C=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

b) **[1 punt]** Els catets del triangle seran $\overrightarrow{CA}=\left(0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ i $\overrightarrow{CB}=\left(-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

L'àrea serà, doncs, $\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{CA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CB}\right|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$ unitats d'àrea.

109. PAU 2005 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3

3. Trobeu la distància entre la recta $r:\frac{x-3}{4}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{3}$ i el pla $\pi:\ 3x+4y+7=0$.

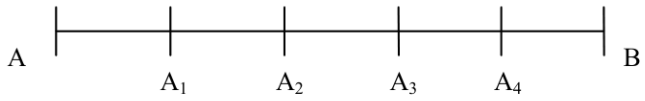
SOLUCIÓ [2 punts] Trobem primer la posició relativa de la recta i el pla. Com que el vector normal del pla $\vec{n}=(3,4,0)$ i el vector director de la recta, $\vec{v}=(4,-3,3)$ tenen producte escalar, $\vec{n}\cdot\vec{v}=0$, resulta que la recta és o bé paral·lela al pla, o està continguda en ell. Com que el punt de la recta $(3,1,-2)$ no pertany a π, $(3\cdot3+4\cdot1+7\neq0)$, r i π són paral·lels. La distància entre la recta i el pla serà la de qualsevol punt de la recta al pla. La distància de (3,1,-2) (per exemple) al pla és:

$$\frac{3\cdot3+4\cdot1+7}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{20}{5}=4 \text{ unitats.}$$

Puntueu amb 1 punt per trobar la posició relativa i 1 punt per la distància correcta.

110. PAU 2005 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4

4. Un segment d'origen el punt $A=(-1,4,-2)$ i extrem B està dividit en cinc parts iguals mitjançant els punts de divisió A_1, A_2, A_3 i A_4 (vegeu la figura). Si sabem que $A_2=(1,0,2)$, quines són les coordenades de B?



SOLUCIÓ [2 punts] . És clar que $\overrightarrow{AB}=5\cdot\overrightarrow{AA_1}$ i que

$$\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AA_2}=\frac{1}{2}\cdot(1+1,0-4,2+2)=(1,-2,2).$$

Per tant, $\overrightarrow{AB}=5\cdot(1,-2,2)=(5,-10,10)$.

Les coordenades de B són $(-1+5,4-10,-2+10)=(4,-6,8)$.

111. PAU 2005 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 6

6. Una piràmide de base quadrada té el vèrtex en el pla d'equació $z=3$. Tres dels vèrtexs de la base són els punts del pla OXY: $A=(1,0,0)$, $B=(1,1,0)$, $C=(0,1,0)$. Es demana:

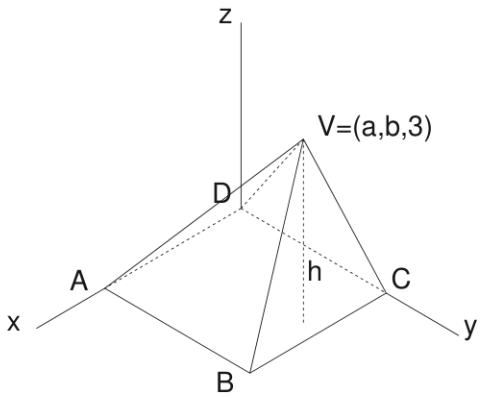
a) feu un gràfic dels elements del problema. Quines són les coordenades del quart vèrtex de la base, D?

b) quin és el volum de la piràmide? [$\text{Volum}=\dfrac{\text{àrea base}\times\text{altura}}{3}$]

c) si el vèrtex de la piràmide és el punt $V=(a,b,3)$,quina és l'equació de la recta que conté l'altura sobre la base?

SOLUCIÓ

a) **[1 punt]**



El vèrtex $D=(0,0,0)$.

b) **[1 punt]** El volum de la piràmide serà $\text{Vol}=\dfrac{1}{3}\cdot S\cdot h$ on S és l'àrea de la base i h l'altura sobre aquesta base. En el nostre cas, la base és un quadrat de costat 1, per tant, $S=1$ i el vèrtex de la piràmide, V, està sobre el pla $z=3$ que és paral·lel al pla de la base, $z=0$. La distància del vèrtex al pla de la base és doncs (independentment del lloc on es trobi el vèrtex) $h=3$. Tenim doncs que

$$\text{Vol}=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 3=1 \text{ unitat de volum.}$$

c) **[2 punts]** Del vèrtex de la piràmide, V, només sabem que està sobre el pla $z=3$. Per tant el vèrtex és $V=(a,b,3)$ i a i b són valors que no podem precisar. L'equació demanada serà la d'una recta que passa pel punt $(a,b,3)$ i és perpendicular al pla $z=0$, o sigui que té per vector director $(0,0,1)$. La recta demanada té per equació contínua $\dfrac{x-a}{0}=\dfrac{y-b}{0}=\dfrac{z-3}{1}$. L'equació general és:

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}.$$

Puntueu 1 punt si l'alumne pren un punt concret com a vèrtex.

112. PAU 2004 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 4

4. Donats els vectors $\vec{u} = (1,2)$ i $\vec{v} = (-3,1)$, es demana:
a) comproveu que $\vec{u}$ i $\vec{v}$ formen una base de l'espai vectorial dels vectors del pla;
b) trobeu els components del vector $\vec{w} = (-1,5)$ en la base $\{\vec{u},\vec{v}\}$.

SOLUCIÓ.

a) **[1 punt]** Un conjunt de vectors de R^2 són base quan són linealment independents i formen un sistema de generadors. Si el nombre de vectors coincideix amb la dimensió de l'espai, com en aquest cas, només cal comprovar una d'aquestes condicions. Aquí, (1,2) i (-3,1) són linealment independents perquè la matriu $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ té rang 2 que es pot veure o bé reduint-la per Gauss, $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ o bé perquè el determinant $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$

Si només comproven una de les dues condicions sense més comentaris, traieu 0,25 punts.

b) **[1 punt]** Hem de trobar *a* i *b* tal que $\vec{w} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}$. Són les solucions del sistema:

$$\begin{cases} a - 3b = -1 \\ 2a + b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1. \end{cases}$$ Per tant, $\vec{\omega} = (2,1)$ en base $\{\vec{u},\vec{v}\}$.

113. PAU 2004 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 6

6. Considerem les rectes

$$r:\ \frac{x-2}{-2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-2} \quad \text{i} \quad s:\begin{cases} x &= 1+3t \\ y &= -1-4t \\ z &= 5+t. \end{cases}$$

a) Estudieu la seva posició relativa.
b) Trobeu l'equació del pla que conté a *s* i és paral·lel a *r*.
c) Calculeu la distància entre *r* i *s*.

SOLUCIÓ.

a) **[1 punt]** No són paral·leles perquè els vectors directors, (-2,1,-2) i (3,-4,1) són linealment independents. Per veure si es creuen o es tallen, mirem el rang dels tres vectors (-2,1,-2), (3,-4,1) i (2-1,-1-(-1),0-5):

la matriu $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ té rang 3 perquè $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & -5 \end{vmatrix} \neq 0.$

Per tant, les rectes es creuen a l'espai.

b) **[1,5 punts]** L'equació vectorial del pla demanat és:

$$(x,y,z)=(1,-1,5)+a\cdot(-2,1,-2)+b\cdot(3,-4,1) \text{ amb } a,b\in R\,.$$

La general és

$$\begin{vmatrix} x-1 & -2 & 3 \\ y+1 & 1 & -4 \\ z-5 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0. \quad \Rightarrow \quad 7x+4y-5z+22=0\,.$$

És suficient obtenir una de les equacions.

c) **[1,5 punts]** La distància entre les dues rectes ara es pot trobar com la distància d'un punt qualsevol de la recta *r*, per exemple (2,-1,0), al pla $7x+4y-5z+22=0$:

$$\left|\frac{7\cdot 2+4\cdot(-1)+22}{\sqrt{7^2+4^2+(-5)^2}}\right|=\frac{32}{\sqrt{90}}=\frac{32}{3\sqrt{10}}=\frac{16\sqrt{10}}{15}$$ unitats de distància.

114. PAU 2004 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2

2. Considereu els punts de l'espai *A*(0,0,1), *B*(1,1,2) i *C*(0,-1,-1).
a) Trobeu l'equació del pla *ABC*.
b) Si *D* és el punt de coordenades (*k*,0,0), quant ha de valer *k* per tal que els quatre punts *A*, *B*, *C* i *D* siguin coplanaris?

SOLUCIÓ.

a) **[1 punt]** L'equació del pla determinat per *A*, *B* i *C* és

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 1 & -1 \\ z-1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -x+2y-z+1=0.$$

(Hem fet servir *A* com a punt base i $\vec{AB}=(1,1,1)$ i $\vec{AC}=(0,-1,-2)$ com a vectors directors del pla). També són igualment vàlides les equacions vectorial o paramètrica:

$$(x,y,z)=(0,0,1)+s\cdot(1,1,1)+t\cdot(0,-1,-2); \qquad \begin{cases} x = s \\ y = s-t \\ z = 1+s-2t \end{cases}$$

b) **[1 punt]** Substituint *x*, *y* i *z* per les coordenades del punt *D*(*k*,0,0) a l'equació general obtenim -*k*+1=0. Per tant *k*=1. El punt *D*(1,0,0) és coplanari amb *A*, *B* i *C*.

Això mateix es pot fer amb l'equació vectorial o paramètrica del pla trobant el valor dels paràmetres *s* i *t* que fan compatible el sistema:

$$\begin{cases} k = s \\ 0 = s-t \\ 0 = 1+s-2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s=1 \\ t=1 \end{cases} \Rightarrow k=1.$$

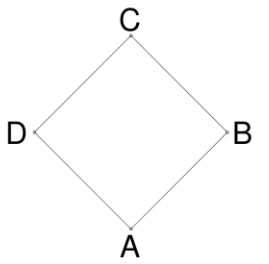
També es pot estudiar la coplanarietat dels quatre punts exigint que el determinant d'ordre 4 següent valgui 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Arribem a *k*=1.

115. PAU 2004 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4

4. Els punts $A(k-3,2,4)$, $B(0,k+2,2)$ i $C(-2,6,k+1)$ són tres dels vèrtexs d'un rombe *ABCD* (vegeu la figura).



Es demana:
a) calculeu el valor de k;
b) demostreu que el rombe és un quadrat.

SOLUCIÓ.

a) **[1 punt]** Si el paral·lelogram *ABCD* és un rombe, *d(A,B)=d(B,C)*:

$$\sqrt{(k-3)^2+k^2+4}=\sqrt{4+(4-k)^2+(k-1)^2} \quad \Rightarrow k=2.$$

b) **[1 punt]** El rombe és un quadrat atès que els vectors $\vec{AB}=(1,2,-2)$ i $\vec{BC}=(-2,2,1)$ (o un altre parell adequat, *AB*, *AD*, etc.) són perpendiculars:

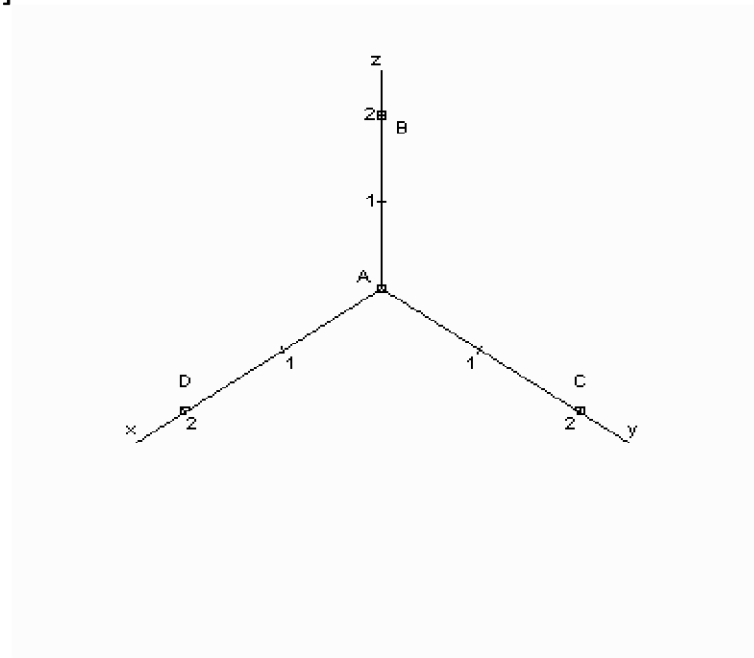
$$\vec{AB}\cdot\vec{BC}=1\cdot(-2)+2\cdot 2+(-2)\cdot 1=0.$$

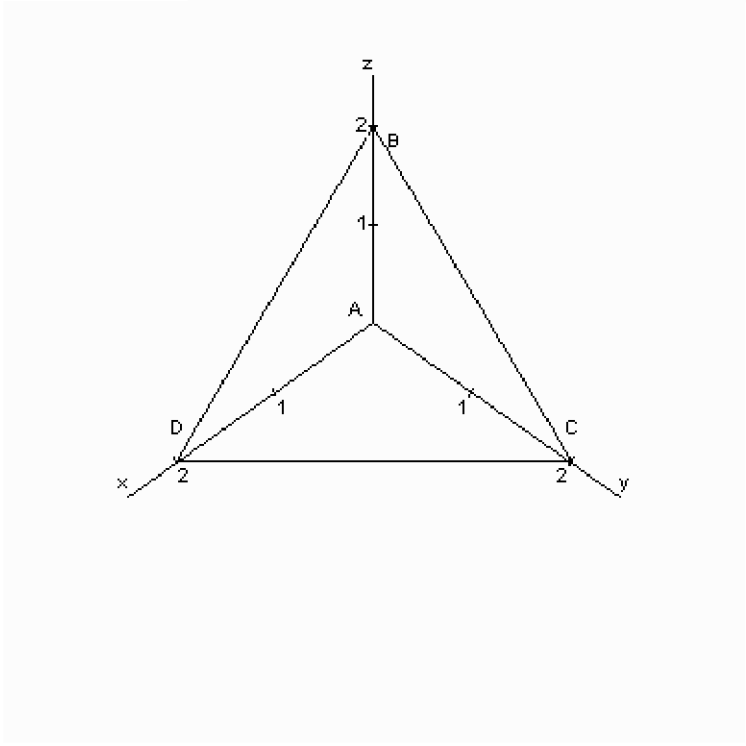
També es pot fer per Pitàgores aplicat a un dels triangles *ABC*, *ABD*, etc.

116. PAU 2004 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 6

6. Tenim quatre punts a l'espai: $A(0,0,0)$; $B(0,0,2)$; $C(0,2,0)$ i $D(2,0,0)$. Es demana:
a) representeu gràficament els quatre punts;
b) calculeu el volum del tetràedre (piràmide de base triangular) $ABCD$;
c) trobeu l'equació del pla que passa per B, C i D;
d) calculeu la distància de l'origen al pla de l'apartat anterior.

SOLUCIÓ.
a) **[0,5 punts]**





b) **[1,5 punts]**
A partir del gràfic, el volum del tetràedre es pot calcular directament com el volum de la piràmide de base el triangle rectangle ABC i altura 2:

$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}2\cdot 2\right)\cdot 2 = \frac{4}{3}.$$

Per calcular el volum del tetràedre, també es pot fer servir la fórmula que l'expressa com 1/6 del producte mixt dels vectors $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ (en valor absolut):

$$\frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-8}{6}, \text{ en}$$

valor absolut, $\frac{4}{3}$.

c) **[1 punt]** L'equació general del pla que ens demanen és (prenem $(0,0,2)$ com punt base i $(0,2,-2);(2,0,-2)$ com vectors directors):

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 2 \\ y & 2 & 0 \\ z-2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \text{; és a dir, } -4\cdot(x+y+z-2)=0 .$$

El pla demanat té per equació general $x+y+z-2=0$.

Qualsevol altra forma d'equació també és acceptable.

d) **[1 punt]** La distància de l'origen al pla $x+y+z-2=0$ és, fent servir la fórmula de la distància d'un punt a un pla,

$$\left|\frac{-2}{\sqrt{3}}\right| = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

També es pot fer servir el fet que sabem el volum del tetràedre és 4/3 i que el mateix volum el podem calcular prenent com a base el triangle equilàter BCD, de costat $l=2\sqrt{2}$, i altura la distància que ens demanen, *d*. L'àrea del triangle és $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}=\frac{8\sqrt{3}}{4}=2\sqrt{3}$. Tenim doncs $\frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{3}\cdot d=\frac{4}{3} \quad\Rightarrow\quad d=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

117. PAU 2003 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 2 (Problemes)

2. *Un segment d'extrems $A=(5,3,1)$ i $B=(4,2,-1)$ es divideix en tres parts iguals mitjançant dos plans perpendiculars a aquest segment. Calculeu les equacions dels dos plans i la distància entre ells.*

Es pot prendre com a vector normal $\vec{n}$ a aquests plans el vector $\vec{BA}=(1,1,2)$ de forma que les equacions d'aquests plans han de ser de la forma $x+y+2z=k$, on k és una constant diferent per a cada un d'ells. Els punts P i Q que divideix el segment AB en tres parts iguals són

$$P=B+\frac{1}{3}\vec{BA}=\left(\frac{13}{3},\frac{7}{3},-\frac{1}{3}\right), \qquad Q=B+\frac{2}{3}\vec{BA}=\left(\frac{14}{3},\frac{8}{3},\frac{1}{3}\right)$$

Aleshores el pla que passa per P serà $x+y+2z=6(=13/3+7/3-2\times(1/3))$ i el que passa per Q serà $x+y+2z=8(=14/3+8/3+2\times(4/3))$.

La distància entre aquests dos plans es pot determinar com un terç de la longitud del vector $\vec{AB}$ i, per tant, val $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(Teniu en compte que hi ha altres maneres d'obtenir aquests mateixos resultats.)

Compteu fins a dos punts (2) pel plantejament, fins a un punt mig més (1.5) per la determinació correcta de les equacions dels plans (valorant si l'alumne ha interpretat correctament quins són els plans) i deixeu el mig punt restant (0.5) pel càlcul explícit de la distància entre els dos plans. Per errors en els càlculs no treieu més d'un punt (1) del total del quatre.

---

118. PAU 2003 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 4 (Qüestions)

4. *Considereu els punts de l'espai* $A = (0, -2a - 1, 4a - 2)$, $B = (1, -3, 4)$, $C = (3, -5, 3)$.

a) Comproveu que el triangle de vèrtexs A, B *i* C *és rectangle en* B *per a qualsevol valor de* a.

b) Calculeu els valors de a *que fan que aquest triangle sigui isósceles.*

---

a) L'únic que cal fer és comprovar que els vectors $\vec{AB} = (1, 2a - 2, -4a + 6)$ i $\vec{CB} = (2, -2, -1)$ sempre són perpendiculars. Calculant el producte escalar obtenim

$$\vec{AB} \cdot \vec{CB} = 1 \times 2 + (2a - 2) \times (-2) + (-4a + 6) \times (-1) = 0$$

que és el que voliem veure.

Alternativament, també es pot comprovar que la suma dels quadrats de les distàncies entre A i B i entre C i B coincideix amb la distància entre A i C al quadrat.

b) El triangle serà isósceles quan la distància d_1 de A a B i la distància d_2 de C a B coincideixin. Calculant els quadrats de d_1 i d_2 s'obté

$$d_1{}^2 = 1 + (2a - 2)^2 + (-4a + 6)^2 = 20a^2 - 56a + 41$$
$$d_2{}^2 = 2^2 + (-2)^2 + (-1)^2 = 9$$

Les dues distàncies coincideixen quan

$$20a^2 - 56a + 41 = 9 \Leftrightarrow a = 2 \text{ o bé } a = \frac{4}{5}$$

SÈRIE 3 — Pautes de correcció (PAU 2003) — MATEMÀTIQUES

Compteu un punt (1) per cada apartat i valoreu-los de forma independent. Per errors de càlcul no treieu més de mig punt (0.5).

---

119. PAU 2003 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 3 (Qüestions)

3. *Considereu el punt* $P = (5, -2, 9)$ *i la recta* $r : \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z}{6}$

a) *Calculeu l'equació de la recta s que talla perpendicularment a r i que passa per P.*

b) *Calculeu el punt de tall T entre les rectes r i s.*

Els dos apartats es poden repondre al mateix temps.

Els punts Q de la recta r són de la forma

$$Q = (1 - 2\lambda, -1 - 3\lambda, 6\lambda)$$

ja que aquesta recta és la que passa per $(1, -1, 0)$ i té per vector director $\vec{v} = (-2, -3, 6)$. El punt T que es vol obtenir serà el que compleixi que els vectors $\vec{PT}$ i $\vec{v}$ siguin perpendiculars. Com que per a cada un dels punts Q tenim

$$\vec{PQ} = (-4 - 2\lambda, 1 - 3\lambda, -9 + 6\lambda)$$

la condició de perpendicularitat s'expressarà com

$$0 = (-2) \times (-4 - 2\lambda) + (-3) \times (1 - 3\lambda) + 6 \times (-9 + 6\lambda) = -49 + 49\lambda \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Amb $\lambda = 1$ obtenim $T = (-1, -4, 6)$, $\vec{PT} = (-6, -2, -3)$ i l'equació de la recta perpendicular serà

$$\frac{x+1}{-6} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-6}{-3}$$

També es pot obtenir el punt T com el punt d'intersecció de la recta r amb el pla perpendicular a r i que passa per P que seria el que té per equació $-2x-3y+6z = 50$.

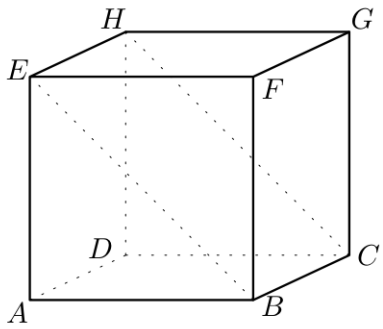
Compteu un punt per cada apartat i valoreu sobretot el plantejament de l'exercici. No treieu més de mig punt (0.5) per errors en els càlculs.

120. PAU 2003 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 2 (Qüestions)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

121. PAU 2002 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 2 (Problemes)

2. *Considerem el cub de vèrtexs A, B, C, D, E, F, G, H que té l'aresta de longitud 4 dm.*



a) *Determineu l'equació del pla inclinat $EHBC$ si prenem com a origen de coordenades el vèrtex D i com a eixos de coordenades DA, DC i DH en aquest ordre, tenint en compte que el sentit positiu de cada un d'ells és el que sortint de l'origen D va cap A, C i H respectivament.*

b) *Calculeu les equacions de les diagonals CE i AG i utilitzeu-les per a calcular les coordenades del seu punt d'intersecció.*

a) Amb l'origen a D i els eixos tal com s'han fixat, les coordenades dels punts E, H i B són $E = (4, 0, 4)$, $H = (0, 0, 4)$ i $B = (4, 4, 0)$. Amb aquestes dades tindrem $\vec{EH} = (-4, 0, 0)$ i $\vec{EB} = (0, 4, -4)$. L'equació vectorial del pla serà $(x, y, z) = (4, 0, 4) + \lambda(-4, 0, 0) + \mu(0, 4, -4)$ que correspon a $y + z = 4$.

b) Tenim els punts amb coordenades $C = (0, 4, 0)$, $E = (4, 0, 4)$, $A = (4, 0, 0)$ i $G = (0, 4, 4)$. El vector director de la diagonal CE serà $\vec{CE} = (4, -4, 4)$, mentre que el de la diagonal AG serà $\vec{AG} = (-4, 4, 4)$ i les equacions d'aquestes diagonals seran $\frac{x}{4} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z}{4}$ i $\frac{x-4}{-4} = \frac{y}{4} = \frac{z}{4}$. Solucionant el sistema d'equacions corresponent, les coordenades del punt d'intersecció seran $(2, 2, 2)$.

Compteu dos punts per cada apartat. Per errors de càlcul resteu com a màxim un punt. Teniu en compte en l'apartat b) que un error en les equacions de les rectes donarà com a resultat un punt d'intersecció clarament incorrecte, per tant mireu de valorar independentment el càlcul de les equacions i la manera de determinar el punt d'intersecció.

122. PAU 2002 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 3 (Qüestions)

3. *Comproveu que la recta que passa pels punts $A = (4, 0, 0)$ i $B = (0, 2, 2)$ és paral·lela al pla d'equació $x - 3y + 5z = 2$, i calculeu la distància entre la recta i el pla.*

Un vector director de la recta és $\vec{AB} = (0, 2, 2) - (4, 0, 0) = (-4, 2, 2)$. El vector $\vec{v} = (1, -3, 5)$ és perpendicular al pla. Tenim $\vec{AB} \cdot \vec{v} = 0$. Per tant $\vec{AB}$ i $\vec{v}$ són perpendiculars i $\vec{AB}$ és de l'espai director del pla. La recta i el pla són llavors paral·lels. La distància entre la recta i el pla és la distància d'un punt de la recta, per exemple A, al pla que es pot calcular amb la fórmula

$$d = \frac{|4 - 3 \times 0 + 5 \times 0 - 2|}{\sqrt{1 + 9 + 25}} = \frac{2}{\sqrt{35}}$$

Compteu fins a un punt per la comprovació de que la recta i el pla són paral·lels i deixeu l'altre punt pel càlcul de la distància, restant com a màxim mig punt per errors de càlcul. Encara que no es comprovi correctament que la recta i el pla són paral·lels, valoreu el càlcul de la distància.

123. PAU 2002 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 1 (Problemes)

Problemes

1. *Considereu les rectes r i s amb les equacions següents:*

$$r:\begin{cases} x & y+3=0 \\ 2x & z+2=0 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} & y+\dfrac{1}{3}=0 \\ x & 2z \quad 3=0 \end{cases}$$

a) *Calculeu, de cada una de les rectes, un punt i un vector director.*

b) *Determineu si existeix cada un dels següents objectes i en cas afirmatiu calculeu la seva equació:*

i) El pla paral·lel a la recta s que conté la recta r.

ii) El pla perpendicular a la recta s que conté la recta r.

iii) La recta perpendicular a les rectes r i s que passa per $(0,0,0)$.

---

a) Solucionant els sistemes corresponents, les rectes es poden donar com

$$r:\ (x,y,z)=(\ \ 1,2,0)+z(1/2,1/2,1), \qquad s:\ (x,y,z)=(3,\ \ 1/3,0)+z(2,0,1)$$

Llavors un punt de r és $(\ \ 1,2,0)$ i un vector director $(1/2,1/2,1)$. El punt $(3,\ \ 1/3,0)$ és de s i el vector director pot ser $(2,0,1)$.

b) i) El pla ve donat pels punts (x,y,z) amb

$$(x,y,z)=(\ \ 1,2,0)+\lambda(1/2,1/2,1)+\mu(2,0,1)$$

o per l'equació $x+3y \quad 2z=5$.

ii) Com que els vectors directors de r i s no són perpendiculars el pla que es demana no existeix.

iii) Les components dels vectors (a,b,c) que són perpendiculars als vectors directors de r i s han de complir

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{2}b+c=0 \\ 2a \qquad +c=0 \end{array}\right\}$$

Una solució és $(1,3,\ \ 2)$ i per tant la recta està donada pels punts (x,y,z) de la forma $(x,y,z)=\lambda(1,3,\ \ 2)$.

Compteu un punt per l'apartat a) i un punt per cada un dels apartats i), ii), iii). Per errors en els càlculs no traieu més d'un punt.

124. PAU 2002 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 4 (Qüestions)

4. *Calculeu l'angle que forma el pla* $x \quad 2y + z = 1$ *amb la recta determinada per les equacions* $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2 \end{cases}$

L'angle és el complementari del format per un vector director de la recta i un vector ortogonal al pla. La recta admet com a vector director $(1, 1, 0)$ i el pla té com a vector perpendicular $(1, \quad 2, 1)$. L'angle α entre aquests dos vectors queda determinat per

$$\cos\alpha = \frac{(1, \quad 2, 1) \cdot (1, 1, 0)}{\|(1, \quad 2, 1)\| \, \|(1, 1, 0)\|} = \quad \frac{\sqrt{3}}{6}$$

i per tant $\alpha \simeq 106,77^{\circ}$. L'angle entre la recta i el pla serà $16,77^{\circ}$.

Valoreu sobretot el plantejament i el mètode. Per errors en els càlculs traieu com a màxim mig punt. Teniu en compte que us podeu trobar amb respostes en les que es pren com a definició d'angle entre un pla i una recta l'angle entre el vector director de la recta i el vector perpendicular al pla i que, per tant, una resposta coherent amb aquesta definició s'ha de considerar correcta.

125. PAU 2002 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 3 (Qüestions)

3. *Considereu els plans d'equacions:* $\pi_1 : x + 2y - z = 3$ *i* $\pi_2 : ax + (a-2)y + 2z = 4$.

a) *Hi ha algun valor del paràmetre* a *per al qual la intersecció dels plans* π_1 *i* π_2 *no és una recta?*

b) *Calculeu un vector director de la recta que s'obté quan es fa la intersecció de* π_1 *i* π_2 *per al valor del paràmetre* $a = 0$.

---

a) Dos plans tenen com a intersecció una recta o són paral·lels (això inclou el fet que considerem el mateix pla dues vegades). Els plans π_1 i π_2 seran paral·lels quan els seus vectors perpendiculars $(1, 2, -1)$ i $(a, (a-2), 2)$ siguin proporcionals. Això només passa si $a = -2$.

b) Si $a = 0$ tenim els plans $x + 2y - z = 3$ i $-2y + 2z = 4$. Solucionant el sistema d'equacions corresponent veurem que la recta intersecció d'aquests dos plans es pot donar com els punts (x, y, z) amb $x = 7 - z$ i $y = z - 2$, que és una recta que passa per $(7, -2, 0)$ i té com a vector director $(-1, 1, 1)$.

Compteu un punt per cada apartat. Valoreu sobretot el coneixement que es demostri de la discussió de sistemes d'equacions lineals. Per errors en els càlculs no resteu més de mig punt.

126. PAU 2002 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 4 (Qüestions)

4. *Considereu la recta r d'equacions:* $x-1=\dfrac{y-5}{-3}=\dfrac{z-7}{-4}$. *Calculeu els punts d'aquesta recta situats a distància 3 del punt* $A=(1,0,1)$.

La recta r també es pot escriure com els punts (x,y,z) que compleixen $y=-3x+8$ i $z=-4x+11$. Els punts de r que estan a distància 3 de A hauran de complir $(x-1)^2+(-3x+8)^2+(-4x+10)^2=9$. Desenvolupant els quadrats quedarà $13x^2-64x+78=0$, que té com a solucions $x=2$ i $x=3$. Aquestes dues solucions corresponen als punts $(2,2,3)$ i $(3,-1,-1)$ respectivament.

Compteu fins a un punt i mig per l'expressió correcta de la distància dels punts de la recta al punt A i deixeu el mig punt restant pels càlculs finals.

127. PAU 2001 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 1 (Qüestions)

Qüestions

1. *Determineu per a quins valors del paràmetre a el pla* $\pi: ax+2y+z=a$ *és paral·lel a la recta* $r:\begin{cases} x-ay+z=1 \\ ax+z=a+1 \end{cases}$

Si considerem el sistema d'equacions que té per equacions les del pla π i la recta r

$$\begin{aligned} ax+2y+z&=a \\ x-ay+z&=1 \\ ax+z&=a+1 \end{aligned}$$

la recta r és paral·lela al pla π per als valors de a pels quals el sistema és incompatible. El determinant de la matriu de coeficients d'aquest sistema val $2a-2$, que s'anul·la per a $a=1$. Quan $a\neq 1$ el sistema és compatible determinat, mentre que quan $a=1$ resulta el sistema incompatible. Per tant, $a=1$ és l'únic cas per al que la recta i el pla són paral·lels.

Valoreu si es coneix la condició de paral·lelisme en termes de resolució de sistemes d'equacions lineals i el mètode utilitzat per a discutir el sistema, encara que els càlculs no siguin del tot correctes. Si els errors són purament de càlcul, traieu com a màxim mig punt.

128. PAU 2001 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 2 (Problemes)

2. *Sigui π el pla d'equació $x - y + 2z = 3$ i P el punt $(1, 1, 0)$.*

a) Calculeu la distància d de P a π.

b) Determineu l'equació de l'altre pla π' paral·lel a π que també dista d del punt P.

c) Determineu l'equació de la recta r perpendicular a π que passa per P.

d) Calculeu la intersecció de la recta r amb el pla π.

---

a) Si apliquem la fórmula de la distància d'un punt a un pla tenim

$$d = \frac{|1 \times 1 - 1 \times 1 + 2 \times 0 - 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

b) El pla π' tindrà una equació de la forma $x - y + 2z + k = 0$. Aplicant un altre cop la fórmula de la distància d'un punt a un pla volem

$$\frac{|1 - 1 + 2 \times 0 + k|}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}}$$

Per tant $|k| = 3$, com que el pla π és el que té $k = -3$, el pla π' tindrà per equació $x - y + 2z + 3 = 0$.

c) El vector director d'una recta perpendicular a π és $(1, -1, 2)$. Les equacions de r seran

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z}{2}$$

d) La intersecció de r i π s'obté solucionant el sistema d'equacions

$$\left.\begin{aligned} x - 1 &= -y + 1 \\ x - 1 &= \frac{1}{2}z \\ x - y + 2z &= 3 \end{aligned}\right\}$$

La solució d'aquest sistema és $x = 3/2$, $y = 1/2$ i $z = 1$. És a dir, el punt d'intersecció és $(3/2, 1/2, 1)$.

Compteu un punt per cada apartat, puntuant cada un d'ells independentment dels altres i no traieu més de 1 punt del total de 4 per errors de càlcul.

129. PAU 2001 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 3 (Qüestions)

3. *Donats els punts de l'espai $A = (2, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ i $C = (0, 0, 3)$.*

a) Determineu l'equació del pla π que els conté.

b) Calculeu l'equació de la recta r perpendicular al pla π i que passa per l'origen.

---

a) L'espai director del pla π està determinat pels vectors $B \quad A = (\ \ 2, 1, 0)$ i $C \quad A = (\ \ 2, 0, 3)$. L'equació del pla que passa per $A = (2, 0, 0)$ i té aquest espai director és

$$3x + 6y + 2z \quad\ 6 = 0$$

b) Un vector perpendicular al pla π és $(3, 6, 2)$. Les equacions de la recta amb aquest vector director que passa per l'origen son

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{6} = \frac{z}{2}$$

Compteu 1 punt per cada apartat, donant com a bones qualsevol de les diferents equacions que poden determinar el pla i la recta. Traieu com a màxim mig punt del total de 2 per errors de càlcul.

130. PAU 2001 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 1 (Problemes)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

131. PAU 2000 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 2 (Problemes)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

132. PAU 2000 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 3 (Qüestions)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

133. PAU 2000 · Setembre · Sèrie 6 · Exercici 1 (Problemes)

1. a) Com que el punt $P = (1\,,\,1\,,\,3)$ no compleix l'equació del pla, la recta r no podrà mai estar continguda al pla. Podria ser paral·lela al pla quan $\vec{v}$ fos perpendicular al vector $(2\,,\,1\,,\,-1)$ (vector perpendicular al pla). Això passa quan

$$(1-a\,,\,a\,,\,1)\cdot(2\,,\,1\,,\,-1)=0\ .$$

És a dir, quan $a=1$. Per tant, si $a=1$ la recta és paral·lela al pla, i si $a\neq 1$ la recta talla el pla en un punt.

b) r només pot ser perpendicular al pla π si $\vec{v}$ és proporcional a $(2\,,\,1\,,\,-1)$. És a dir, si

$$\frac{1-a}{2}=\frac{a}{1}=\frac{1}{-1}\ .$$

De l'última equació s'obté $a=-1$. Però per a aquest valor de a no es compleix la primera equació. Conclusió: no hi ha cap valor de a per al qual la recta és perpendicular al pla.

c) La distància de P al pla es pot calcular per la fórmula:

$$d=\frac{|2\times 1+1\times 1-1\times 3-1|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}\ .$$

Compteu 1,5 punts per l'apartat (a), 1,5 punts per (b) i 1 punt per (c).

134. PAU 2000 · Setembre · Sèrie 6 · Exercici 3 (Qüestions)

3. Un punt P qualsevol de la recta serà $(1\,,\,-1+\lambda\,,\,1+\lambda)$. El vector $P-A$ serà, doncs, $(0\,,\,\lambda-1\,,\,\lambda+2)$. Imposem que aquest vector sigui perpendicular a $(0\,,\,1\,,\,1)$. Tindrem:

$$0=(0\,,\,1\,,\,1)\cdot(0\,,\,\lambda-1\,,\,\lambda+2)=\lambda-1+\lambda+2=2\lambda+1\ ,$$

d'on $\lambda=-1/2$. Per tant $P=(1\,,\,-3/2\,,\,1/2)$.

Aquesta qüestió val 2 punts. Atorgueu-los segons els vostre criteri en funció del que hagi fet cada alumne.

135. PAU 2000 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2 (Problemes)

2. (a) $\vec{n} = (1, 2, 3)$ és vector perpendicular al pla π i serà director de la recta perpendicular a π que, en passar per $P = (2, 1, 1)$, té les equacions

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

(b) Un vector director de r (d'equacions paramètriques $x = 2z - 3$, $y = z + 4$, $z = z$) és $\vec{v} = (2, 1, 1)$, i serà perpendicular al pla, que tindrà una equació general del tipus $2x + y + z = d$. En passar per $P = (2, 1, 1)$, necessàriament $d = 6$ i l'equació d'aquest pla és $2x + y + z = 6$.

(c) Determinem un punt Q de r (per tant, $Q = (2z-3, z+4, z)$) tal que el vector $PQ = (2z-5, z+3, z-1)$ sigui ortogonal al vector director de r, $\vec{v} = (2, 1, 1)$. La condició d'ortogonalitat entre PQ i $\vec{v}$ és

$$4z - 10 + z + 3 + z - 1 = 0,$$

que dóna $z = 4/3$ i $PQ = (-7/3, 13/3, 1/3)$.
La recta buscada passa per $P = (2, 1, 1)$ i té el vector director PQ. Unes equacions per a ella són

$$\frac{x-2}{-7} = \frac{y-1}{13} = \frac{z-1}{1}.$$

(d) Un vector director $\vec{w} = (a, b, c)$ ha de ser ortogonal a $(1, 2, 3)$ i a $(2, 1, 1)$. Es pot trobar com a una de les solucions no nul·les de $(a, b, c) \cdot (1, 2, 3) = 0$ i $(a, b, c) \cdot (2, 1, 1) = 0$, i també com a producte vectorial

$$\vec{w} = (1, 2, 3) \times (2, 1, 1) = (-1, 5, -3).$$

La recta passa per $(2, 1, 1)$ i per tant admet les equacions

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-1}{-3}.$$

Compteu un punt per cada apartat.

136. PAU 2000 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 2 (Problemes)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.