Matemàtiques

Geometria de l'espai

Exercicis · 136 exercicis

Proves d'accés a la universitat (PAU) de Catalunya. Ordenats del més recent al més antic.
Retalls dels exàmens i pautes oficials (selecat.cat / universitats.gencat.cat).

1. PAU 2026 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 4 (Opció B)

Exercici 4
[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 4	

L'Aina vol construir una capsa de cartró amb forma de prisma rectangular amb tapa, per guardar-hi la tauleta i el carregador.

Trieu UNA de les dues opcions (A o B) i responeu a les qüestions que s'hi plantegen. **Indiqueu a la portada de l'examen l'opció escollida.**

OPCIÓ B

L'Aina vol fer un croquis en 3D de la capsa utilitzant un programa informàtic. Per a començar, situa un costat de la tapa des del vèrtex $A(1, 1, 1)$ fins al vèrtex $B(4, 1, 5)$, i l'altre costat de la tapa des del vèrtex A fins al vèrtex $C(1, 10, 1)$.

4.1. Quines són les coordenades del quart vèrtex de la tapa? Calculeu les longituds dels dos costats de la tapa.
[1 punt]

Puntuació de l'apartat 4.1	

4.2. Sabent que els altres quatre vèrtexs de la capsa estan situats al pla $\pi: -4x + 3z = 24$, calculeu les coordenades d'un d'aquests vèrtexs (qualsevol) i l'alçària de la capsa.
[1,5 punts]

Puntuació de l'apartat 4.2	

2. PAU 2026 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4 (Opció B)

Exercici 4
[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 4	

Trieu UNA de les dues opcions (A o B) i responeu a les qüestions que s'hi plantegen. **Indiqueu a la portada de l'examen l'opció escollida.**

OPCIÓ B

Considereu els punts de l'espai $P = (1, 0, -1)$, $Q = (3, -2, 0)$ i $R = (1, 1, 1)$.

4.1. Calculeu l'equació del pla que conté els punts P, Q i R.
[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 4.1	

4.2. Comproveu que l'àrea del triangle ΔPQR és $\frac{3\sqrt{5}}{2}u^2$.
[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 4.2	

4.3. Determineu les condicions que han de complir les coordenades d'un quart punt $S = (x, y, z)$ per tal que P, Q, R i S formin un tetraedre de volum 1. (El volum del tetraedre format pels punts P, Q, R i S és: $\text{volum}(PQRS) = \frac{\text{àrea}(\Delta PQR) \cdot \text{altura}}{3}$.)
[1 punt]

ació de l'apartat 4.3	

3. PAU 2026 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 4 (Opció B)

Exercici 4
[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 4	

Trieu UNA de les dues opcions (A o B) i responeu a les qüestions que s'hi plantegen. **Indiqueu a la portada de l'examen l'opció escollida.**

OPCIÓ B

En una indústria es fan servir braços robòtics amb sensors per a mesurar amb precisió determinades peces metàl·liques i comprovar si tenen irregularitats. Les peces es col·loquen sobre la superfície determinada pel pla π: $(x, y, z) = (6, 1, 1) + \lambda(1, 1, 0) + \mu(0, 0, 1)$ i, per damunt seu, un braç robòtic desplaça un sensor des del punt $A = (1, 2, 3)$ fins al punt $B = (5, 3, 7)$ en línia recta (les unitats dels tres eixos de coordenades estan expressades en centímetres).

4.1. Quina distància ha recorregut el sensor?
[0,5 punts]

Puntuació de l'apartat 4.1	

4.2. En acabar el moviment, a quina distància de la superfície es troba el sensor?
[1 punt]

Puntuació de l'apartat 4.2	

4.3. Si el sensor seguís movent-se en la mateixa línia recta i en el mateix sentit, en quin punt xocaria amb la superfície?
[1 punt]

Puntuació de l'apartat 4.3	

4. PAU 2025 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 4 (Opció B)

Exercici 4

Trieu UNA de les dues opcions (A o B) i responeu a les qüestions que s'hi plantegen.

OPCIÓ B

Considereu el pla π: $2x - y + z = 5$ i el punt $P = (0, 1, 3)$.

a) Comproveu que la distància del punt P al pla π és $\frac{\sqrt{6}}{2}$.
[0,5 punts]

b) Trobeu l'equació general d'un pla π_1 paral·lel a π i que passi pel punt P. Quina és la distància entre π_1 i π?
[0,75 punts]

c) Trobeu l'equació general d'un segon pla π_2, diferent de π_1, que és paral·lel a π i que estigui a una distància $\frac{\sqrt{6}}{2}$ de π.
[1,25 punts]

5. PAU 2025 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4 (Opció B)

Exercici 4

Trieu UNA de les dues opcions (A o B) i responeu a les qüestions que s'hi plantegen.

OPCIÓ B

Considereu el pla π d'equació $x + y = 0$.

a) Calculeu l'equació del pla π' que és perpendicular a π i conté els punts $P = (1, -1, 2)$ i $Q = (3, -3, 6)$.
[1 punt]

b) Calculeu l'equació paramètrica de la recta continguda en π' i que conté els punts de π' a la mateixa distància de P que de Q.
[1,5 punts]

6. PAU 2024 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 6

6. Considereu el punt $P = (1, 3, 0)$ i el pla π d'equació $x + 2y - 2z = -7$.

a) Sigui r la recta que és perpendicular a π i passa per P. Calculeu el punt d'intersecció de π amb r.
[1 punt]

b) Calculeu la distància d del punt P al pla π.
[0,5 punts]

c) Calculeu l'equació d'un altre pla π' que sigui paral·lel a π i que també estigui a distància d de P.
[1 punt]

7. PAU 2024 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 6

6. Considereu els punts $A = (1, 2, 3)$ i $B = (-3, -2, 3)$.

a) Calculeu l'equació del pla π que és perpendicular a la recta AB i que passa pel punt mitjà entre A i B. Justifiqueu que aquest pla està format, precisament, pels punts $P = (x, y, z)$ que estan a igual distància de A que de B, és a dir, $d(P, A) = d(P, B)$.
[1 punt]

b) Calculeu les distàncies de A i de B al pla π i comproveu que són iguals. És casualitat? Raoneu la resposta.
[0,75 punts]

c) Sigui $C = (-7, 6, 3)$. El triangle ABC és isòsceles? Calculeu la seva àrea.
[0,75 punts]

8. PAU 2023 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 5

5. Siguin r_1 i r_2 les rectes definides per $r_1: x - 1 = y = -z$ i per $r_2: x = y = z$, respectivament.

a) Calculeu l'equació paramètrica de la recta que talla perpendicularment les rectes r_1 i r_2.
[1,75 punts]

b) Calculeu la distància entre r_1 i r_2.
[0,75 punts]

9. PAU 2023 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 6

6. Siguin els plans π_1 i π_2, determinats respectivament per les equacions $\pi_1: x+y=3$ i $\pi_2: x-z=-2$.

a) Trobeu l'equació general ($Ax+By+Cz+D=0$) del pla π_3, que és perpendicular a π_1 i π_2, i que passa pel punt $P=(4, 1, 2)$.
[0,75 punts]

b) Sigui r la recta d'intersecció de π_1 i π_2. Calculeu l'equació vectorial de la recta r.
[0,75 punts]

c) Calculeu el punt Q de la recta r que és més a prop del punt P.
[1 punt]

10. PAU 2023 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 3

3. Considereu les rectes a l'espai $r: x=-y=z+m$ i $s: \begin{cases} x+y=1 \\ x-z=0 \end{cases}$, en què m és un paràmetre real.

a) Estudieu la posició relativa per als diferents valors del paràmetre m.
[1,25 punts]

b) Calculeu m perquè la distància entre les rectes r i s sigui de $\sqrt{2}$ unitats.
[1,25 punts]

11. PAU 2022 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 1

1. El pal central que sosté la lona de la carpa d'un circ se situa perpendicularment sobre el pla d'un terra l'equació del qual és $\pi: x-z=6$. Sabem que la cúpula de la carpa (el punt més alt per on passa el pal) és al punt de coordenades $P=(30, 1, 0)$.

a) Calculeu l'equació paramètrica de la recta que conté el pal.
[1 punt]

b) Calculeu les coordenades del punt de contacte del pal amb el terra, i la longitud del pal.
[1,5 punts]

12. PAU 2022 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 3

3. Sigui la recta r definida per l'expressió següent:

$$r: \begin{cases} x=2+\lambda \\ y=-1+3\lambda \\ z=3+\lambda \end{cases}$$

a) Determineu la posició relativa de la recta r respecte al pla $\pi: x-2y+4z-4=0$. Si és paral·lela, calculeu la distància de r a π, i si és secant, calculeu el punt de tall.
[1,25 punts]

b) Calculeu l'equació de la recta s perpendicular al pla π i que talla la recta r en un punt P, la primera coordenada del qual és 5 vegades més gran que la segona.
[1,25 punts]

13. PAU 2022 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 5

5. Siguin els punts $A = (0, 0, 1)$, $B = (1, 1, 1)$, $C = (-1, -1, 1)$ i $D = (1, 0, 1)$.

a) Comproveu que tres d'aquests punts estan alineats. Determineu quins són els tres punts i calculeu l'equació contínua i l'equació paramètrica de la recta que defineixen.
[1,25 punts]

b) Calculeu l'equació general o cartesiana del pla que determinen els quatre punts.
[1,25 punts]

14. PAU 2021 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 3

3. En $\mathbb{R}^3$ es donen els punts $A = (3, 1, 1)$, $B = (0, 0, 1)$, $C = (4, 1, 2)$ i $D = (1, 1, t)$, en què t és un valor real.

a) Per a quin valor de t els quatre punts són coplanaris?
[1 punt]

b) Trobeu el valor de t per tal que el tetraedre (irregular) que formen els quatre punts tingui un volum de $5u^3$.
[1,5 punts]

NOTA: El volum d'un tetraedre definit pels vectors $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ i $\boldsymbol{v}_3$ és igual a un sisè del valor absolut del determinant de la matriu formada per tots tres vectors,

$$V = \frac{1}{6}\left|\det(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)\right|.$$

15. PAU 2021 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 3

3. Considereu el punt $P = (-1, 3, 1)$, el pla $\pi : x = y$ i la recta $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = z - 2$.

a) Trobeu les coordenades del punt P' simètric a P respecte al pla π.
[1,25 punts]

b) De tots els plans que contenen la recta r, trobeu l'equació cartesiana del que és perpendicular al pla π.
[1,25 punts]

16. PAU 2021 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 3

3. Considereu els punts de l'espai tridimensional $A = (1, a, 1)$, $B = (a, 1, 2)$, $C = (1, 1, 1)$ i $D = (0, 0, 0)$, en què a és un paràmetre real.

a) Determineu el valor del paràmetre a per al qual els punts són diferents i coplanaris (és a dir, que hi ha un pla que els conté).
[1,25 punts]

***b*)** Per al valor $a = 2$, calculeu l'àrea del triangle de vèrtexs A, B i C.
[1,25 punts]

NOTA: Per a calcular l'àrea del triangle definit pels vectors $\boldsymbol{v}$ i $\boldsymbol{w}$, podeu fer servir l'expressió $S = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}\|$, en què $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ és el producte vectorial dels vectors $\boldsymbol{v}$ i $\boldsymbol{w}$.

17. PAU 2020 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 2

2. Un avió es desplaça des d'un punt $A = (0, 3, 1)$ cap a una plataforma plana d'equació π: $x - 2y + z = 1$ seguint una recta r paral·lela al vector $\boldsymbol{v} = (1, -1, 0)$.

***a*)** Calculeu les coordenades del punt de contacte B de l'avió amb el pla i la distància recorreguda.
[1,25 punts]

***b*)** Calculeu l'equació general del pla perpendicular a la plataforma i que conté la recta r seguida per l'avió des del punt A.
[1,25 punts]

18. PAU 2020 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 6

6. Siguin les rectes r i s, expressades per $\frac{x-3}{2} = y = z - 1$ i $(\mu, -\mu, \mu)$, respectivament.

***a*)** Determineu la posició relativa de les rectes.
[1,25 punts]

***b*)** Calculeu la distància entre la recta r i la recta s.
[1,25 punts]

19. PAU 2020 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3

3. ***a*)** Calculeu l'equació general del pla π que passa pel punt (8, 8, 8) i té com a vectors directors $\boldsymbol{u} = (1, 2, -3)$ i $\boldsymbol{v} = (-1, 0, 3)$.
[1,25 punts]

***b*)** Determineu el valor del paràmetre a perquè el punt $(1, -5, a)$ pertanyi al pla π i calculeu l'equació paramètrica de la recta que passa per aquest punt i és perpendicular al pla π.
[1,25 punts]

20. PAU 2020 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 5

5. Considereu la recta r d'equació $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1}$ i la recta s que passa pel punt $P = (2, -5, 1)$ i que té per vector director $(-1, 0, -1)$.

***a*)** Estudieu la posició relativa de les rectes r i s.
[1,25 punts]

***b*)** Calculeu l'equació general del pla que és paral·lel a la recta r i conté la recta s.
[1,25 punts]

21. PAU 2019 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 5

5. Siguin P, Q i R els punts d'intersecció del pla d'equació $x + 4y + 2z = 4$ amb els tres eixos de coordenades OX, OY i OZ, respectivament.

***a*)** Calculeu els punts P, Q i R, i el perímetre del triangle de vèrtexs P, Q i R.
[1 punt]

***b*)** Calculeu l'àrea del triangle de vèrtexs P, Q i R.
[1 punt]

NOTA: Per a calcular l'àrea del triangle definit pels vectors $\boldsymbol{v}$ i $\boldsymbol{w}$ podeu fer servir l'expressió $S = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}\|$, en què $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ és el producte vectorial dels vectors $\boldsymbol{v}$ i $\boldsymbol{w}$.

22. PAU 2019 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3

3. Un dron es troba en el punt $P = (2, -3, 1)$ i volem dirigir-lo en línia recta fins al punt més proper del pla d'equació $\pi : 3x + 4z + 15 = 0$.

***a*)** Calculeu l'equació de la recta, en forma paramètrica, que ha de seguir el dron. Quina distància ha de recórrer fins a arribar al pla?
[1 punt]

***b*)** Trobeu les coordenades del punt del pla on arribarà el dron.
[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància que hi ha d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

23. PAU 2019 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 2

2. Siguin la recta $r: \begin{cases} x = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$ i el pla $\pi : x - z = 3$.

***a*)** Calculeu l'equació paramètrica de la recta que és perpendicular al pla π i que el talla en el mateix punt en què el talla la recta r.
[1 punt]

***b*)** Trobeu els punts de r que estan a una distància de $\sqrt{8}$ unitats del pla π.
[1 punt]

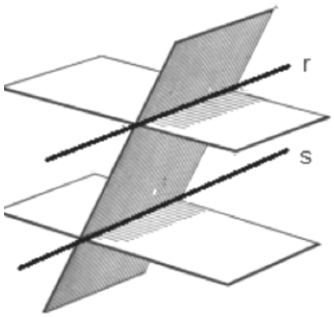
NOTA: Podeu calcular la distància que hi ha d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

24. PAU 2019 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 5

5. Considereu els plans $\pi_1: 2x + ay + z = 5$, $\pi_2: x + ay + z = 1$ i $\pi_3: 2x + (a+1)y + (a+1)z = 0$, en què a és un paràmetre real.

a) Estudieu per a quins valors del paràmetre a els tres plans es tallen en un punt.
[1 punt]

b) Comproveu que per al cas $a = 1$ la interpretació geomètrica del sistema format per les equacions dels tres plans és la que es mostra en la imatge següent:
[1 punt]



25. PAU 2018 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 3

3. Considereu el pla que té com a vectors directors $u = (-1, 3, 2)$ i $v = (2, 1, 0)$ i que passa pel punt $A = (1, 0, 3)$.

a) Calculeu l'equació de la recta que és perpendicular al pla i passa pel punt A.
[1 punt]

b) Calculeu la distància del punt $P = (1, 5, 0)$ al pla.
[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

26. PAU 2018 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 5

5. Considereu els punts de l'espai tridimensional $A = (1, 1, 0)$, $B = (3, 5, 0)$ i $C = (1, 0, 0)$ i la recta r: $x = y - 1 = \dfrac{z}{2}$.

a) Trobeu el punt d'intersecció de la recta r amb el pla que passa pels punts A, B i C.
[1 punt]

b) Trobeu els punts P de la recta r per als quals el tetraedre de vèrtexs P, A, B i C té un volum de 2u^3.
[1 punt]

NOTA: El volum d'un tetraedre de vèrtexs P, Q, R i S es pot calcular amb l'expressió $\dfrac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS})\right|$.

27. PAU 2018 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2

2. Sigui r la recta que passa pels punts $A = (0, 1, 1)$ i $B = (1, 1, -1)$.

a) Trobeu l'equació paramètrica de la recta r.

[1 punt]

b) Calculeu tots els punts de la recta r que estan a la mateixa distància dels plans π_1: $x + y = -2$ i π_2: $x - z = 1$.

[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

28. PAU 2018 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4

4. Considereu els punts $P = (3, -2, 1)$, $Q = (5, 0, 3)$, $R = (1, 2, 3)$ i la recta r: $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$.

a) Determineu l'equació general (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla que passa per P i Q i és paral·lel a la recta r.

[1 punt]

b) Donats el pla $x + 2y + m \cdot z = 7$ i el pla que passa per P, Q i R, trobeu m perquè siguin paral·lels i no coincidents.

[1 punt]

29. PAU 2018 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 2

2. Siguin el pla d'equació π: $x + y - z = 0$ i el punt $P = (2, 3, 2)$.

a) Calculeu el punt simètric del punt P respecte del pla π.

[1 punt]

b) Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) dels dos plans paral·lels a π que estan a una distància $\sqrt{3}$ del punt P.

[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

30. PAU 2018 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 5

5. Siguin les rectes r_1: $x - 1 = \dfrac{y - 2}{-1} = z - 5$ i r_2: $(x, y, z) = (2 - 3\lambda, -1 + \lambda, 2)$.

a) Trobeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla que conté la recta r_1 i és paral·lel a la recta r_2.

[1 punt]

b) Digueu quina condició s'ha de complir perquè existeixi un pla que contingui la recta r_1 i sigui perpendicular a la recta r_2. Amb les rectes r_1 i r_2 de l'enunciat, comproveu si existeix un pla que contingui la recta r_1 i sigui perpendicular a la recta r_2.

[1 punt]

31. PAU 2017 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 1

1. Considereu el pla $\pi: x + y + z = 1$ i la recta r que passa pels punts $P = (0, 0, 6)$ i $Q = (1, 2, 3)$.

a) Estudieu la posició relativa de la recta r i el pla π.

[1 punt]

b) Calculeu la distància entre la recta r i el pla π.

[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

32. PAU 2017 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 5

5. A $\mathbb{R}^3$, siguin la recta $r: \begin{cases} x - z = 2 \\ 2y + z = 4 \end{cases}$ i el punt $P = (0, 1, -1)$.

a) Calculeu l'equació general (és a dir, la que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla π perpendicular a la recta r i que passa pel punt P.

[1 punt]

b) Calculeu el punt simètric del punt P respecte del pla $x + y + z = -3$.

[1 punt]

33. PAU 2017 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2

2. Considereu els plans $\pi_1: 5x - y - 7z = 1$ i $\pi_2: 2x + 3y + z = 5$.

a) Determineu l'equació general (és a dir, la que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla que passa per l'origen de coordenades i és perpendicular als plans π_1 i π_2.

[1 punt]

b) Calculeu l'angle que formen els plans π_1 i π_2.

[1 punt]

34. PAU 2017 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 1

1. Siguin les rectes de $\mathbb{R}^3$ $r: \begin{cases} 2x - y = 1 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$ i $s: x + 1 = \dfrac{y - 2}{2} = z - 1$.

a) Comproveu que són paral·leles.

[1 punt]

b) Calculeu l'equació vectorial del pla que les conté.

[1 punt]

35. PAU 2016 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 1

1. Siguin la recta r: $(x, y, z) = (5 + k, k, -2 - 2k)$ i els punts $P = (1, 0, -1)$ i $Q = (2, 1, 1)$.

a) Calculeu l'equació paramètrica de la recta que passa pel punt Q i és perpendicular al pla determinat per la recta r i el punt P.

[1 punt]

b) Calculeu el punt de la recta r que equidista dels punts P i Q.

[1 punt]

36. PAU 2016 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 6

6. Responeu a les qüestions següents:

a) Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla que passa pel punt de coordenades $(0, 0, 1)$ i és perpendicular als plans $3x + y - z = 1$ i $x + y + 2z = 5$.

[1 punt]

b) Suposeu que un pla π_1 és perpendicular a un segon pla π_2 i que el pla π_2 és a la vegada perpendicular a un tercer pla π_3. Expliqueu raonadament si necessàriament els plans π_1 i π_3 han de ser perpendiculars entre ells.

[1 punt]

37. PAU 2016 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 2

[1 punt]

2. A $\mathbb{R}^3$, siguin la recta r que té per equació $(x, y, z) = (1 + \lambda, \lambda, 1 - \lambda)$ i el pla π d'equació $2x - y + z = -2$.

a) Determineu la posició relativa de la recta r i el pla π.

[1 punt]

b) Calculeu la distància entre la recta r i el pla π.

[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

38. PAU 2016 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 5

5. Considereu el tetraedre que té per vèrtexs els punts $A = (x, 0, 1)$, $B = (0, x, 1)$, $C = (3, 0, 0)$ i $D = (0, x, 0)$, amb $0 < x < 3$.

a) Comproveu que el volum del tetraedre és donat per l'expressió $V(x) = \frac{1}{6}(-x^2 + 3x)$.
[1 punt]

b) Determineu el valor de x que fa que el volum sigui màxim i calculeu aquest volum màxim.
[1 punt]

NOTA: Podeu calcular el volum del tetraedre de vèrtexs A, B, C i D amb l'expressió $\frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|$.

39. PAU 2016 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 2

2. Siguin a $\mathbb{R}^3$ el pla π d'equació $x - y + 2z = 2$ i els punts $A = (3, -1, 2)$ i $B = (1, 1, -2)$.

a) Comproveu que els punts A i B són simètrics respecte del pla π.
[1 punt]

b) Si r és la recta dels punts P que té per equació $P = B + \lambda v$, en què λ és un paràmetre real i $v = (1, 1, 0)$, verifiqueu que els punts mitjans dels segments $\overline{AP}$ pertanyen al pla π.
[1 punt]

40. PAU 2016 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 5

5. Siguin les rectes r: $(x, y, z) = (2, 3, -3) + \lambda(1, -1, 0)$ i s: $\frac{x-3}{2} = y - 5 = z + 2$.

a) Estudieu si les rectes r i s són paral·leles o perpendiculars.
[1 punt]

b) Determineu la posició relativa de les rectes r i s i calculeu l'equació paramètrica de la recta t que talla perpendicularment la recta r i la recta s.
[1 punt]

41. PAU 2015 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 2

2. A l'espai tridimensional considereu la recta r: $(x, y, z) = (3 + 2\alpha, -\alpha, 3 - \alpha)$ i els plans π_1: $x + y + z = -1$ i π_2: $(x, y, z) = (2 + \lambda, 1 - \lambda + \mu, \mu)$.

a) Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla π_2.
[1 punt]

b) Trobeu els dos punts de la recta r que equidisten dels plans π_1 i π_2.
[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

42. PAU 2015 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 4

4. Siguin els plans de $\mathbb{R}^3$ π_1: $-y + z = 2$, π_2: $-2x + y + z = 1$ i π_3: $2x - 2z = -1$.

a) Calculeu la posició relativa dels tres plans.

[1 punt]

b) Comproveu que el pla π_3 és paral·lel a la recta definida per la intersecció dels plans π_1 i π_2.

[1 punt]

43. PAU 2015 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 2

2. Sigui r la recta de l'espai que té per equació r: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{-1} = z$ i sigui P el punt de coordenades $(6, 0, -1)$.

a) Trobeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla que passa pel punt P i talla perpendicularment la recta r.

[1 punt]

b) Trobeu l'equació paramètrica del pla que passa pel punt P i conté la recta r.

[1 punt]

44. PAU 2015 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 4

4. Considereu a $\mathbb{R}^3$ la recta que té per equació r: $(x, y, z) = (-4 + 2\lambda, -2, 1 - \lambda)$ i els plans π_1 i π_2 d'equacions π_1: $x + 2y + 2z = -1$ i π_2: $x - 2y + 2z = -3$, respectivament.

a) Determineu la posició relativa de π_1 i π_2.

[1 punt]

b) Comproveu que tots els punts de la recta r estan situats a la mateixa distància dels plans π_1 i π_2.

[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

45. PAU 2015 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 3

3. Siguin el punt $P = (2, 0, 2)$ i el pla π d'equació $x - y + z = 1$.

a) Calculeu l'equació paramètrica de la recta que passa pel punt P i és perpendicular al pla π.

[1 punt]

b) Calculeu la distància del punt P al pla π.

[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

46. PAU 2015 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 6

6. Siguin a $\mathbb{R}^3$ el punt $P = (2, 3, 3)$ i la recta r: $(x, y, z) = (1, 2, 3) + t(1, 1, 1)$.

a) Calculeu l'equació paramètrica del pla que passa pel punt P i conté la recta r.

[1 punt]

b) Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla que passa pel punt P i és perpendicular a la recta r.

[1 punt]

47. PAU 2014 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 1

1. Siguin r i s les rectes de $\mathbb{R}^3$ que tenen les equacions següents:

$$r: x + 5 = y - 5 = \frac{z - 3}{2} \text{ i } s: \frac{x - 3}{2} = \frac{y - 2}{3} = \frac{z + 1}{-1}.$$

a) Estudieu el paral·lelisme i la perpendicularitat entre les rectes r i s.

[1 punt]

b) Trobeu l'equació general (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla π que conté la recta r i és paral·lel a la recta s. Calculeu la distància entre la recta s i el pla π obtingut.

[1 punt]

48. PAU 2014 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 5

5. Donats els vectors $\boldsymbol{u} = (2, -1, 0)$, $\boldsymbol{v} = (-1, 3, 4)$ i $\boldsymbol{w} = (0, 3a - 1, 4a)$,

a) Calculeu els valors del paràmetre a perquè els vectors $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ i $\boldsymbol{w}$ siguin linealment dependents.

[1 punt]

b) Calculeu els valors del paràmetre a perquè un tetraedre d'arestes $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ i $\boldsymbol{w}$ tingui un volum de 2/3 d'unitats cúbiques.

[1 punt]

49. PAU 2014 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 2

2. Considereu el punt $A = (1, 2, 3)$.

a) Calculeu el punt simètric del punt A respecte de la recta d'equació

$$r: (x, y, z) = (3 + \lambda, 1, 3 - \lambda).$$

[1 punt]

b) Calculeu el punt simètric del punt A respecte del pla que té per equació

$$\pi: x + y + z = 3.$$

[1 punt]

50. PAU 2014 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 5

5. Siguin r i s les rectes de $\mathbb{R}^3$ d'equacions $r: \dfrac{x-2}{3} = y = \dfrac{z+1}{4}$ i $s: (x, y, z) = (1 + 2\alpha, 3 - \alpha, 4 + 3\alpha)$, amb $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Comproveu que els punts mitjans dels segments que tenen un extrem situat sobre la recta r i l'altre extrem situat sobre la recta s formen un pla.

[1 punt]

b) Trobeu l'equació general (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla de l'apartat anterior.

[1 punt]

51. PAU 2014 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 3

3. Siguin els punts $P = (1, 1, 0)$, $Q = (1, 0, 1)$ i $R = (0, 1, 1)$ i el pla $\pi: x + y + z = 4$.

a) Trobeu l'equació general (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla que passa pels punts P, Q i R.

[1 punt]

b) Si S és un punt de π, comproveu que el volum del tetraedre de vèrtexs P, Q, R i S no depèn del punt S.

[1 punt]

52. PAU 2014 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 4

4. Donats els plans $\pi_1: x - 4y + z = 2m - 1$ i $\pi_2: 2x - (2m + 2)y + 2z = 3m + 1$,

a) Determineu els valors de m perquè els plans π_1 i π_2 s'intersequin en una recta i calculeu un vector director de la recta resultant que no depengui de m.

[1 punt]

b) Sigui el pla $\pi: 3x - 2y + 3z = 8$. Estudieu la posició relativa del pla π amb la recta r definida per la intersecció dels plans π_1 i π_2 quan $m = 1$.

[1 punt]

53. PAU 2013 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 3

3. Donats el pla π: $x + 2y - z = 3$ i la recta r: $\dfrac{x-1}{2} = y = \dfrac{z+m}{4}$,

a) Comproveu que el vector característic (o normal) de π i el vector director de r són perpendiculars.

b) Estudieu la posició relativa de π i r en funció del paràmetre m.

[1 punt per cada apartat]

54. PAU 2013 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 5

5. Donats el pla π: $2x - y + 3z - 8 = 0$ i el punt $P = (6, -3, 7)$,

a) Trobeu l'equació contínua de la recta que passa per P i és perpendicular a π.

b) Trobeu el punt del pla π que està més proper al punt P.

[1 punt per cada apartat]

55. PAU 2013 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 1

1. Sigui π: $3x - 2y + z = 10$.

a) Trobeu l'equació contínua de la recta r perpendicular a π que passa pel punt $P = (-1, 3, 2)$.

b) Trobeu també l'equació cartesiana (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla π_1 paral·lel a π que passa pel mateix punt P.

[1 punt per cada apartat]

$$\begin{bmatrix} a-1 & & 1 \end{bmatrix}$$

56. PAU 2013 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 4

4. Un triangle d'àrea 3/2 té dos dels vèrtexs als punts $P = (0, 0, 0)$ i $Q = (2, 0, 1)$. El tercer vèrtex, R, és un punt de la recta

$$r: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

i té la primera coordenada no nul·la. Calculeu les coordenades del vèrtex R.

[2 punts]

57. PAU 2013 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 5

5. Donats els punts $P = (1, 0, -1)$ i $Q = (-1, 2, 3)$, trobeu un punt R de la recta r: $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+4}{3} = \dfrac{z-3}{-1}$ que compleixi que el triangle de vèrtexs P, Q i R és isòsceles, en què $\overline{PR}$ i $\overline{QR}$ són els costats iguals del triangle.

[2 punts]

58. PAU 2013 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 1

1. Siguin π_1 el pla $2x + 3y - z = 4$ i π_2 el pla $x - 2y - 4z = 10$.

a) Comproveu que els plans π_1 i π_2 són perpendiculars.

b) Trobeu l'equació contínua de la recta paral·lela als plans π_1 i π_2 i que passa pel punt $P = (-1, 3, 2)$.

[1 punt per cada apartat]

59. PAU 2013 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 3

3. Donats els punts $P = (1, -1, 2)$, $Q = (2, 0, 1)$ i $R = (3, 2, -1)$,

a) Trobeu l'equació cartesiana (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla que determinen.

b) Trobeu un punt S pertanyent a la recta $r: \dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-5}{-3}$, de manera que el tetraedre de vèrtexs P, Q, R i S tingui un volum igual a 1/2.

[1 punt per cada apartat]

60. PAU 2013 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 5

5. Considereu els punts $A = (-1, 2, 4)$ i $B = (3, 0, -2)$.

a) Trobeu l'equació del pla format per tots els punts que equidisten de A i B.

b) Donat un punt $C = (x, y, z)$, dividim el segment $\overline{AC}$ en tres parts iguals i obtenim els punts A, A_1, B i C. Trobeu el punt C.

[1 punt per cada apartat]

61. PAU 2012 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 5

5. Considereu les rectes de l'espai següents:

$$r: \frac{x+1}{2} = y - 1 = \frac{z-1}{-1}, \quad s: \frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2}$$

a) Comproveu que són secants.

b) Calculeu l'equació contínua de la recta que les talla i que és perpendicular a totes dues.

[1 punt per cada apartat]

62. PAU 2012 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

1. Donats els plans $\pi_1: 3x + y - 2z + 15 = 0$ i $\pi_2: x + y + 2z - 103 = 0$,

a) Comproveu que són perpendiculars.

b) Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla perpendicular a π_1 i π_2, que passa pel punt $P = (1, 3, 2)$.

[1 punt per cada apartat]

63. PAU 2012 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 6

6. Siguin $\pi: x-3y+2z=1$ i $r:\begin{cases} 3x+y=1 \\ 2x-y+mz=1 \end{cases}$. Estudieu-ne la posició relativa segons el valor del paràmetre m.

[2 punts]



64. PAU 2012 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 1

1. Digueu per a quin valor del paràmetre m els plans

$$\pi_1: x-y+mz=1,\ \pi_2: x-y+z=m \text{ i } \pi_3: my+2z=3$$

tenen com a intersecció una recta.

[2 punts]

65. PAU 2012 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 3

3. Donats el pla $\pi: x-y+2z-5=0$ i la recta $r:\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+z=10 \end{cases}$,

a) Calculeu el punt d'intersecció entre el pla i la recta.

b) Trobeu l'equació contínua de la recta s continguda en el pla π, que és perpendicular a la recta r i talla la recta r.

[1 punt per apartat]

66. PAU 2012 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 6

6. Donats els punts $P=(1, 0, 0)$, $Q=(0, 2, 0)$, $R=(0, 0, 3)$ i $S=(1, 2, 3)$,

a) Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, de la forma $Ax+By+Cz+D=0$) del pla que conté els punts P, Q i R.

b) Comproveu si els quatre punts són coplanaris (és a dir, si els quatre estan continguts en un mateix pla).

[1 punt per apartat]



Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2011-2012

Matemàtiques

67. PAU 2011 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 2

2. Donada la recta $\left.\begin{matrix} 2x-y+3z=2 \\ x+z+1=0 \end{matrix}\right\}$, calculeu l'equació general (és a dir, de la forma $Ax+By+Cz+D=0$) del pla perpendicular a la recta que passa pel punt $P=(1, 0, -1)$.

[2 punts]

68. PAU 2011 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 5

5. Considereu la recta $r: \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-1}=z-a$ i el pla $\pi: 2x+y-5z=5$.

a) Estudieu la posició relativa de la recta r i el pla π en funció del paràmetre a.
b) Quan $a=3$, calculeu la distància de la recta r al pla π.

[1 punt per cada apartat]

69. PAU 2011 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

1. Donada la recta $r: \left\{\begin{matrix} 2x-y+3z=2 \\ x+z+1=0 \end{matrix}\right.$:

a) Trobeu-ne un vector director.
b) Calculeu l'equació contínua de la recta paral·lela a r que passa pel punt $P=(1, 0, -1)$.

[1 punt per cada apartat]

70. PAU 2011 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 5

5. Siguin $r_1: x-2=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{1-z}{2}$ i $r_2: \dfrac{x+3}{2}=y+1=\dfrac{z+1}{2}$.

a) Comproveu que r_1 i r_2 són perpendiculars.
b) Comproveu que es tallen mitjançant la determinació del punt de tall.

[1 punt per cada apartat]

71. PAU 2011 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 2

2. Donat el pla $\pi: 2x+y-z=5$:

a) Calculeu l'equació del pla paral·lel al pla π que passa pel punt $P=(1, 0, -1)$.

b) Determineu també la distància entre el punt P i el pla π.

[1 punt per cada apartat]

72. PAU 2011 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 5

5. Calculeu l'equació general (és a dir, de la forma $Ax+By+Cz+D=0$) dels plans que contenen la recta $r: \begin{cases} y=2 \\ z=1 \end{cases}$ i que formen un angle de 45° amb el pla $z=0$.

[2 punts]

73. PAU 2010 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 2

2. Donats el pla $\pi: 5x + y + 3z = 4$ i la recta $r: \begin{cases} ax - y = z \\ 2y + z = -3 \end{cases}$, estudieu-ne la posició relativa en funció del paràmetre a.

[2 punts]

74. PAU 2010 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 6

6. Considereu la recta $r: \dfrac{x+4}{-2} = \dfrac{y-1}{-1} = z-1$.

a) Trobeu els dos punts, A i B, de la recta r que estan situats a una distància $d=\sqrt{6}$ del punt $P=(-1, 1, 2)$.

b) Trobeu l'àrea del triangle de vèrtexs A, B i P.

[1 punt per cada apartat]

---

75. PAU 2010 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

1. Trobeu l'equació general (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla que conté la recta $r_1: \dfrac{x-1}{2} = y = 2-z$ i és paral·lel a la recta $r_2: \begin{cases} x-y-z=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$.

[2 punts]

76. PAU 2010 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4

4. Donades les rectes $r_1: \dfrac{x+5}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{-4}$ i $r_2: \begin{cases} 2x+y+2z+5=0 \\ 2x-y+z+11=0 \end{cases}$:

a) Comproveu que són paral·leles.

b) Trobeu l'equació general (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla que les conté.

[1 punt per cada apartat]

77. PAU 2010 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 1

1. Donats el pla $\pi: x + 2y + 3z - 4 = 0$ i els punts $P = (3, 1, -2)$ i $Q = (0, 1, 2)$:

a) Calculeu l'equació contínua de la recta perpendicular al pla π que passa pel punt P.

b) Calculeu l'equació general (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla perpendicular a π que passa pels punts P i Q.

[1 punt per cada apartat]

78. PAU 2010 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 6

6. Siguin $\vec{u}_1 = (-1, 3, 2)$, $\vec{u}_2 = (2, -1, 4)$ i $\vec{u}_3 = (a + 1, a - 1, 4a + 2)$ tres vectors de l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$.

a) Trobeu el valor del paràmetre a per al qual el vector $\vec{u}_3$ és combinació lineal dels vectors $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$.

b) Comproveu que per a $a = 0$ el conjunt $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ és linealment independent.

[1 punt per cada apartat]

79. PAU 2010 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 2

2. Donats el punt $P = (1, 0, -2)$ i la recta $r: \dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+3}{-3}$:

a) Trobeu l'equació contínua de la recta que passa pel punt P i talla perpendicularment la recta r.

b) Calculeu la distància del punt P a la recta r.

[1,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*]

80. PAU 2010 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 5

5. Siguin r i s dues rectes d'equacions

$$r: (x, y, z) = (-4, 3, 4) + t(2, -1, 1), \quad s: x + 1 = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-a}{3}.$$

a) Trobeu el valor del paràmetre a perquè aquestes rectes es tallin.

b) En el cas en què es tallen, trobeu l'equació general (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla que les conté.

[1,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*]

81. PAU 2009 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 2

2. Considereu en l'espai $\mathbb{R}^3$ les rectes r i s, les equacions respectives de les quals són:

$$r\colon (x,y,z) = (4,1,0) + \lambda(m,1,1)\,, \quad s\colon \begin{cases} x + 2y + mz = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases},$$

en què m és un paràmetre real. Estudieu si hi ha cap valor d'aquest paràmetre per al qual les rectes siguin perpendiculars i es tallin.

[2 punts]

82. PAU 2009 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 4

4. Donats els vectors $\vec{v}_1 = (a + 1, 2a, 1)$, $\vec{v}_2 = (-2, a, 2a)$ i $\vec{v}_3 = (a, -2, 4a - 2)$ de $\mathbb{R}^3$:

a) Calculeu l'angle que formen $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ quan $a = 0$.

b) Trobeu el valor del paràmetre a perquè els vectors $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ i $\vec{v}_3$ siguin perpendiculars dos a dos.

[1 punt per cada apartat]

83. PAU 2009 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 4

4. Donats el pla $\pi\colon x + 2y - z = 0$ i el punt $P = (3, 2, 1)$:

a) Calculeu l'equació contínua de la recta r que passa per P i és perpendicular a π.

b) Calculeu el punt simètric del punt P respecte del pla π.

[1 punt per cada apartat]

84. PAU 2009 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 6

6. Siguin $P = (3 - 2a, b, -4)$, $Q = (a - 1, 2 + b, 0)$ i $R = (3, -2, -2)$ tres punts de l'espai $\mathbb{R}^3$.

a) Calculeu el valor dels paràmetres a i b per als quals aquests tres punts estiguin alineats.

b) Trobeu l'equació contínua de la recta que els conté quan estan alineats.

c) Quan $b = 0$, trobeu els valors del paràmetre a perquè la distància entre els punts P i Q sigui la mateixa que la distància entre els punts P i R.

d) Si $b = 0$, calculeu el valor del paràmetre a perquè els punts P, Q i R determinin un triangle equilàter.

[1 punt per cada apartat]

85. PAU 2009 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 1

QÜESTIONS

1. Donats el punt $P = (1, 2, 3)$ i la recta $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-5}{-1}$:

a) Trobeu l'equació cartesiana (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla π que passa per P i és perpendicular a la recta r.

b) Trobeu el punt de tall entre la recta r i el pla π.

[1 punt per cada apartat]

86. PAU 2009 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 6

6. Siguin r i s dues rectes de l'espai les equacions respectives de les quals, que depenen d'un paràmetre real b, són les següents:

$$r: \begin{cases} bx + y + 3z = 1 \\ x + 2y + 5z = 1 \end{cases}, \quad s: \frac{x}{1} = \frac{y-b}{b+1} = \frac{z+1}{-1}$$

a) Trobeu el punt de tall de la recta r amb el pla d'equació $x = 0$ i el punt de tall de la recta s amb aquest mateix pla.

b) Calculeu un vector director per a cada una de les dues rectes.

c) Estudieu la posició relativa de les dues rectes en funció del paràmetre b.

[1 punt per l'apartat *a*; 1 punt per l'apartat *b*; 2 punts per l'apartat *c*]

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Organització de Proves d'Accés a la Universitat

Proves d'accés a la Universitat. Curs 2008-2009

Matemàtiques

87. PAU 2008 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 4

4. Donats el punt $P = (7, 5, 1)$, el pla π: $x - 2y - 3z = 10$ i la recta $r: \begin{cases} 3x - 2y + 2z = 7 \\ x - 6y - 2z = 5 \end{cases}$:

a) Trobeu la distància del punt P al pla π.

b) Trobeu la distància del punt P a la recta r.

c) Trobeu la distància de la recta r al pla π.

[0,5 punts per l'apartat *a*; 1 punt per l'apartat *b*; 0,5 punts per l'apartat *c*]

88. PAU 2008 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 6

6. Les rectes r_1: $\frac{x-a}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{4}$ i r_2: $\frac{x+2}{1} = \frac{y-b}{2} = \frac{z-4}{-1}$ són coplanàries (és a dir, estan incloses en un mateix pla).

a) Expliqueu, raonadament, quina és la posició relativa d'aquestes rectes.

b) Trobeu la relació que hi ha entre els paràmetres a i b.

c) Trobeu els valors de a i b si el pla que les conté passa pel punt $P = (2, 4, 6)$.

[1,5 punts per l'apartat *a*; 1 punt per l'apartat *b*; 1,5 punts l'apartat *c*]

89. PAU 2008 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 4

4. Trobeu l'equació de la recta perpendicular al pla π: $2x - y + z + 3 = 0$, que passa pel punt $(-1, 3, a)$ del pla.

[2 punts]

90. PAU 2008 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 6

6. Donades les rectes r: $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$ i s: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+5}{3}$ i el punt $P = (1, 1, -1)$, volem trobar l'equació de la recta que passa per P i que talla r i s. Per aconseguir-ho:

a) Trobeu l'equació general o cartesiana (és a dir, l'equació de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla π que conté la recta r i el punt P.

b) Trobeu el punt M calculant el punt d'intersecció del pla π amb la recta s.

c) Trobeu l'equació de la recta que passa pels punts P i M.

d) Comproveu que la recta trobada en l'apartat anterior és la que busquem.

[1 punt per cada apartat]

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Organització de Proves d'Accés a la Universitat

91. PAU 2008 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 4

4. Donats el pla π: $3x - 2y + 5z = 6$ i la recta r: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-3}$, busqueu el punt de tall, si existeix.

[2 punts]

92. PAU 2007 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 1

QÜESTIONS

1. Trobeu les equacions dels plans paral·lels a π: $2x - y + 2z = 3$ situats a 6 unitats de distància d'aquest.

[2 punts]

93. PAU 2007 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 5

PROBLEMES

5. Una recta r és paral·lela a la recta s: $x - 1 = y - 1 = z - 1$, talla en un punt A la recta t: $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z + 1$, i en un punt B la recta l: $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$.

a) Trobeu l'equació del pla determinat per les rectes r i t.
b) Trobeu el punt B calculant el punt d'intersecció del pla anterior amb la recta l.
c) Trobeu l'equació de la recta r.
d) Trobeu el punt A.

[1 punt cada apartat]

94. PAU 2007 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2

2. Considereu els punts de l'espai $P = (-1, a - 1, 3)$, $Q = (0, a - 2, 1 - a)$ i $R = (2, -1, 6 - 6a)$.

a) Trobeu el valor de a per al qual els tres punts estan alineats.
b) Quan els tres punts estan alineats, quina és l'equació de la recta que els conté?

[1 punt cada apartat]

95. PAU 2007 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4

4. Trobeu l'equació de la recta continguda en el pla π: $x + 2y + 6z - 2 = 0$, que talla els eixos OY i OZ.

[2 punts]

96. PAU 2007 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 5

PROBLEMES

5. Considereu la recta d'equació $r: x = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{2}$.

a) Expresseu el quadrat de la distància d'un punt qualsevol (x, y, z) de la recta al punt $P = (1, 2, 5)$ com una funció de la coordenada x.

b) Trobeu quin valor de x fa mínima aquesta funció, deduïu quin punt Q de la recta és el més proper a P i calculeu la distància del punt a la recta.

c) Escriviu l'equació de la recta que passa per P i Q i comproveu que és perpendicular a r.

[1,5 punts l'apartat *a*; 1,5 punts l'apartat *b*; 1 punt l'apartat *c*]

97. PAU 2007 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 1

QÜESTIONS

1. Trobeu l'equació del pla perpendicular a la recta $r: \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y=3 \end{cases}$ que passa per l'origen de coordenades.

[2 punts]

98. PAU 2007 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 4

4. Trobeu els punts de la recta r: $x - 1 = y + 2 = z$ que equidisten dels plans π_1: $4x - 3z - 1 = 0$ i π_2: $3x + 4y - 1 = 0$.

[2 punts]

99. PAU 2007 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 6

6. A l'espai es consideren els tres plans d'equacions:
π_1: $x + 2y + z = 1$, π_2: $px + y + pz = 1$ i π_3: $px + y + 2z = 1$, on p és un paràmetre real.

a) Esbrineu per a quins valors de p els tres plans es tallen en un únic punt. Trobeu aquest punt quan $p = 1$.

b) Hi ha algun valor de p que faci que la intersecció comuna sigui una recta? Si és així, escriviu l'equació vectorial d'aquesta recta.

c) Trobeu quina és la posició relativa dels tres plans quan $p = 1/2$.

[2 punts l'apartat *a*, 1 punt l'apartat *b*, 1 punt l'apartat *c*]

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Proves d'accés a la Universitat. Curs 2006-2007

Matemàtiques

100. PAU 2006 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 3

3. Calculeu l'equació de la recta paral·lela a la recta $r: \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$ que passa pel punt (0,1,0).

[Puntuació: 2 punts]

101. PAU 2006 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 4

4. Determineu els extrems d'un segment *AB* sabent que el punt *A* pertany al pla $2x+y+z=0$, el punt *B* pertany a la recta $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{3}$ i el punt mitjà del segment és (0,0,0).

[Puntuació: 2 punts]

102. PAU 2006 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

Qüestions

1. Trobeu les coordenades dels punts situats sobre la recta d'equació $(x,y,z)=(-1,1,1)+t\cdot(1,2,1)$ que estan a distància 1 del pla $2x+2y+z=5$.

[Puntuació: 2 punts]

103. PAU 2006 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 5

Problemes

5. Una recta *r* passa pel punt *A* = (3,0,2) i té la direcció del vector (–1,1,4).
   a) Trobeu quin angle forma *r* amb el pla horitzontal.
   b) Comproveu que no passa pel punt *B* = (1,3,10).
   c) Trobeu l'equació de la recta que passa per *A* i *B*.

[Puntuació: apartat a) 1,5 punts; apartat b) 1 punt; apartat c) 1,5 punts. Total: 4 punts]

104. PAU 2006 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 3

3. Determineu l'equació del pla perpendicular a la recta $r: \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + z + 2 = 0 \end{cases}$ que passa pel punt (1,1,2). Quina distància hi ha d'aquest pla a l'origen de coordenades?

[Puntuació: 2 punts]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

105. PAU 2006 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 6

6. Considereu la recta $r: \begin{cases} 2x - 3y - z - 3 = 0 \\ x - 3y - z - 2 = 0 \end{cases}$ i el pla $p: 2x - y + az + 2 = 0$ on a és un paràmetre.
   a) Trobeu un vector director de la recta i un vector perpendicular al pla.
   b) Quin ha de ser el valor de a per tal que la recta i el pla siguin paral·lels?
   c) Esbrineu si existeixen valors de a per als quals la recta i el pla siguin perpendiculars. En cas afirmatiu, calculeu-los.
   d) Esbrineu si existeixen valors de a per als quals la recta i el pla formin un angle de 30º. En cas afirmatiu, calculeu-los.

[Puntuació: cada apartat val 1 punt. Total: 4 punts]

106. PAU 2005 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 2

2. Considereu els vectors de $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{v}_1 = (-1,\ 3,\ 4),\ \vec{v}_2 = (2,\ -1,\ -3) \quad \text{i} \quad \vec{v}_3 = (1,\ 2k\ +\ 1,\ k+3).$$

a) Trobeu l'únic valor de k per al qual aquests vectors **no** són una base de $\mathbb{R}^3$.

b) Per a un valor de k diferent del que heu trobat en l'apartat a), quins són els components del vector $\vec{w} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ en la base $\left\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\right\}$?

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. Total: 2 punts]

107. PAU 2005 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 3

3. Trobeu la distància entre la recta $r: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z+2}{3}$ i el pla $\pi: 2x - 3y + 3z + 5 = 0$.

[2 punts]

108. PAU 2005 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 4

Generalitat de Consell Interuni Organització d

4. Donats els punts $A = (1, 0, 0)$ i $B\ (0, 0, 1)$:

a) Trobeu un punt C sobre la recta d'equació paramètrica $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$ que faci que el triangle ABC sigui rectangle en C.

b) Trobeu l'àrea del triangle ABC.

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. Total: 2 punts]

109. PAU 2005 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3

Generali Consell I Organitz

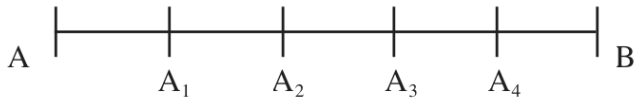
3. Trobeu la distància entre la recta r: $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z+2}{3}$ i el pla π: $3x + 4y + 7 = 0$.

[2 punts]

1

110. PAU 2005 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4

4. Un segment d'origen en el punt $A = (-1, 4, -2)$ i extrem en el punt B està dividit en cinc parts iguals mitjançant els punts de divisió A_1, A_2, A_3 i A_4 (vegeu la figura). Si sabem que $A_2 = (1, 0, 2)$, quines són les coordenades de B?



[2 punts]

111. PAU 2005 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 6

6. Una piràmide de base quadrada té el vèrtex en el pla d'equació $z = 3$. Tres dels vèrtexs de la base són els punts del pla OXY: $A = (1, 0, 0)$, $B = (1, 1, 0)$ i $C = (0, 1, 0)$.

a) Feu un gràfic dels elements del problema. Quines són les coordenades del quart vèrtex de la base, D?

b) Quin és el volum de la piràmide? $\left[\text{Volum} = \dfrac{\text{àrea base} \times \text{altura}}{3}\right]$

c) Si el vèrtex de la piràmide és el punt $V = (a, b, 3)$, quina és l'equació de la recta que conté l'altura sobre la base?

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt; apartat c) 2 punts. Total: 4 punts]

ri de Catalunya

A continuació trobareu l'enunciat de quatre qüestions i dos problemes. Heu de respondre només tres de les quatre qüestions i resoldre només un dels dos problemes (podeu triar les qüestions i el problema que vulgueu). En les respostes que doneu heu d'explicar sempre què és el que voleu fer i per què. Puntuació de cada qüestió: 2 punts. Total qüestions: 3 x 2 = 6 punts. Problema: 4 punts. Podeu fer servir qualsevol mena de calculadora llevat de les que treballin amb un sistema operatiu d'ordinador tipus WINDOWS/LINUX.

112. PAU 2004 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 4

Generalita
Consell In
Coordinac

4. Donats els vectors $\vec{u} = (1, 2)$ i $\vec{v} = (-3, 1)$:

   a) comproveu que $\vec{u}$ i $\vec{v}$ formen una base de l'espai vectorial dels vectors del pla;
   b) trobeu els components del vector $\vec{w} = (-1, 5)$ en la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. Total: 2 punts]

113. PAU 2004 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 6

6. Considereu les rectes

$$r: \frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-2} \qquad \text{i} \qquad s: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 - 4t \\ z = 5 + t \end{cases}$$

a) Estudieu la seva posició relativa.
b) Trobeu l'equació del pla que conté s i és paral·lel a r.
c) Calculeu la distància entre r i s.

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1,5 punts; apartat c) 1,5 punts. Total: 4 punts]

114. PAU 2004 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2

J de Catalunya

2. Considereu els punts de l'espai $A(0, 0, 1)$, $B(1, 1, 2)$ i $C(0, -1, -1)$.

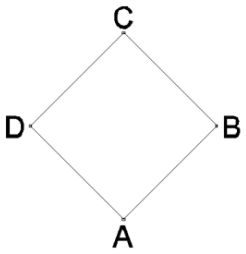
   a) Trobeu l'equació del pla ABC.
   b) Si D és el punt de coordenades $(k, 0, 0)$, quant ha de valer k per tal que els quatre punts A, B, C i D siguin coplanaris?

[2 punts]

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari
Coordinació

115. PAU 2004 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4

4. Els punts $A(k-3, 2, 4)$, $B(0, k+2, 2)$ i $C(-2, 6, k+1)$ són tres dels vèrtexs d'un rombe $ABCD$ (vegeu la figura).



a) Calculeu el valor de k.
b) Demostreu que el rombe és un quadrat.

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. Total: 2 punts]

116. PAU 2004 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 6

6. Tenim quatre punts a l'espai: $A(0, 0, 0)$; $B(0, 0, 2)$; $C(0, 2, 0)$ i $D(2, 0, 0)$. Es demana:

a) representeu gràficament els quatre punts;
b) calculeu el volum del tetràedre (piràmide de base triangular) $ABCD$;
c) trobeu l'equació del pla que passa per B, C i D;
d) calculeu la distància de l'origen al pla de l'apartat anterior.

[Puntuació: apartat a) 0,5 punts; apartat b) 1,5 punts; apartat c) 1 punt; apartat d) 1 punt. Total 4 punts]

SÈRIE 1 PAU. Curs 2003-2004 MATEMÀTIQUES

A continuació trobareu l'enunciat de quatre qüestions i dos problemes. Heu de respondre només tres de les quatre qüestions i resoldre només un dels dos problemes (podeu triar les qüestions i el problema que vulgueu). En les respostes que doneu heu d'explicar sempre què és el que voleu fer i per què. Puntuació de cada qüestió: 2 punts. Total qüestions: 3 x 2 = 6 punts. Problema: 4 punts.

117. PAU 2003 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 2 (Problemes)

2. Un segment d'extrems $A = (5, 3, 1)$ i $B = (4, 2, -1)$ es divideix en tres parts iguals mitjançant dos plans perpendiculars a aquest segment. Calculeu les equacions dels dos plans i la distància entre ells.

[4 punts]

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari d
Coordinació i Organitzaci

118. PAU 2003 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 4 (Qüestions)

4. Considereu els punts de l'espai $A = (0, -2a - 1, 4a - 2)$, $B = (1, -3, 4)$, $C = (3, -5, 3)$.

   a) Comproveu que el triangle de vèrtexs A, B i C és rectangle en B per a qualsevol valor de a.

   b) Calculeu els valors de a que fan que aquest triangle sigui isòsceles.

[2 punts]

119. PAU 2003 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 3 (Qüestions)

Catalunya

3. Considereu el punt $P = (5, -2, 9)$ i la recta r: $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{6}$

   a) Calculeu l'equació de la recta s que talla perpendicularment r i que passa per P.

   b) Calculeu el punt de tall T entre les rectes r i s.

[2 punts]

120. PAU 2003 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 2 (Qüestions)

Districte U

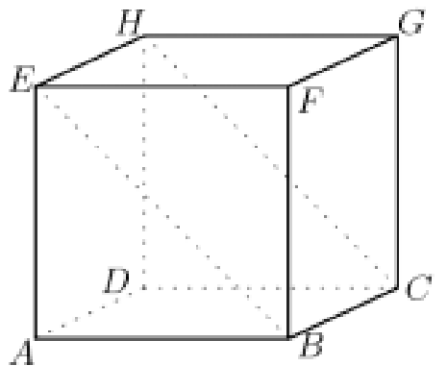
2. Determineu l'equació del pla que conté a la recta

$$x - 1 = \frac{y}{2} = z + 1$$

i passa per l'origen de coordenades. [2 punts]

121. PAU 2002 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 2 (Problemes)

2. Considerem el cub de vèrtexs A, B, C, D, E, F, G, H que té l'aresta de longitud 4 dm.



a) Determineu l'equació del pla inclinat $EHBC$ si prenem com a origen de coordenades el vèrtex D i com a eixos de coordenades DA, DC i DH en aquest ordre, tenint en compte que el sentit positiu de cada un d'ells és el que sortint de l'origen D va cap a A, C i H, respectivament.
b) Calculeu les equacions de les diagonals CE i AG i utilitzeu-les per calcular les coordenades del seu punt d'intersecció.

[4 punts]

122. PAU 2002 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 3 (Qüestions)

3. Comproveu que la recta que passa pels punts $A = (4, 0, 0)$ i $B = (0, 2, 2)$ és paral·lela al pla d'equació $x - 3y + 5z = 2$, i calculeu la distància entre la recta i el pla. [2 punts]

123. PAU 2002 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 1 (Problemes)

PROBLEMES

1. Considereu les rectes r i s amb les equacions següents:

$$r: \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 2 = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} y + \frac{1}{3} = 0 \\ x - 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

a) Calculeu, de cada una de les rectes, un punt i un vector director.
b) Determineu si existeix cada un dels objectes següents i en cas afirmatiu calculeu la seva equació:

i) El pla paral·lel a la recta s que conté la recta r.
ii) El pla perpendicular a la recta s que conté la recta r.
iii) La recta perpendicular a les rectes r i s que passa per (0, 0, 0).

[4 punts]

124. PAU 2002 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 4 (Qüestions)

4. Calculeu l'angle que forma el pla $x - 2y + z = 1$ amb la recta determinada per les equacions $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2 \end{cases}$

[2 punts]

125. PAU 2002 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 3 (Qüestions)

3. Considereu els plans d'equacions:

$$\pi_1 : x + 2y - z = 3 \quad \text{i} \quad \pi_2 : ax + (a - 2)y + 2z = 4.$$

a) Hi ha algun valor del paràmetre a per al qual la intersecció dels plans π_1 i π_2 no és una recta?
b) Calculeu un vector director de la recta que s'obté quan es fa la intersecció de π_1 i π_2 per al valor del paràmetre $a = 0$.

[2 punts]

126. PAU 2002 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 4 (Qüestions)

4. Considereu la recta r d'equacions: $x - 1 = \dfrac{y - 5}{-3} = \dfrac{z - 7}{-4}$. Calculeu els punts d'aquesta recta situats a una distància 3 del punt $A = (1, 0, 1)$.

[2 punts]

127. PAU 2001 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 1 (Qüestions)

QÜESTIONS

1. Determineu per a quins valors del paràmetre a el pla $\pi : ax + 2y + z = a$ és paral·lel a la recta r: $\begin{cases} x - ay + z = 1 \\ ax + z = a + 1 \end{cases}$

[2 punts]

128. PAU 2001 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 2 (Problemes)

2. Sigui π el pla d'equació $x - y + 2z = 3$ i P el punt $(1, 1, 0)$.

a) Calculeu la distància d de P a π.
b) Determineu l'equació de l'altre pla π' paral·lel a π que també dista d del punt P.
c) Determineu l'equació de la recta r perpendicular a π que passa per P.
d) Calculeu la intersecció de la recta r amb el pla π.

[4 punts]

129. PAU 2001 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 3 (Qüestions)

3. Donats els punts de l'espai $A = (2, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ i $C = (0, 0, 3)$.

   a) Determineu l'equació del pla π que els conté.
   b) Calculeu l'equació de la recta r perpendicular al pla π i que passa per l'origen.

[2 punts]

130. PAU 2001 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 1 (Problemes)

PROBLEMES

1. Considereu a l'espai la recta r d'equacions $\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z+1}{-1}$ i la recta s d'equacions $\frac{x+4}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+4}{1}$

   a) Determineu el punt de tall de la recta r amb el pla $z = 0$.
   b) Comproveu que les rectes r i s són paral·leles i calculeu la distància entre elles.
   c) Quina és l'equació del pla que conté les dues rectes?
   d) Calculeu la distància del pla anterior a l'origen de coordenades.

[4 punts]

131. PAU 2000 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 2 (Problemes)

2. Considereu la recta

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & - & 5y & - & z & - & 3 & = & 0 \\ x & - & 3y & - & z & - & 2 & = & 0 \end{array}\right\}$$

   i el pla $2x - y + az + 2 = 0$, on a és un paràmetre.

   a) Per a quin valor de a la recta i el pla són paral·lels? Quina serà llavors la distància entre el punt $P = (1, 0, -1)$ de la recta i el pla?
   b) Existeix algun valor de a per al qual la recta i el pla siguin perpendiculars?
   c) Determineu el valor de a perquè la recta i el pla formin un angle de 30^o.

[4 punts]

132. PAU 2000 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 3 (Qüestions)

3. Donats els vectors $\vec{u} = (1, -1, 4)$, $\vec{v} = (2, 1, 3)$ i $\vec{w} = (1, 0, 0)$

   a) Determineu si són vectors linealment dependents o independents.
   b) Calculeu la relació que hi ha d'haver entre els valors de a i b per tal que el vector $(a, 1, b)$ sigui combinació lineal de $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

[2 punts]

133. PAU 2000 · Setembre · Sèrie 6 · Exercici 1 (Problemes)

1. Considereu la recta r de l'espai que passa pel punt $P = (1, 1, 3)$ i té per vector director $\vec{v} = (1 - a, a, 1)$. Sigui π el pla que té per equació $2x + y - z = 1$.

   a) Determineu per a cada valor del paràmetre a la posició relativa de la recta r respecte al pla π (paral·lela, continguda o amb un punt d'intersecció).
   b) Hi ha alguna de les rectes r que sigui perpendicular al pla π ?
   c) Calculeu la distància que hi ha entre el punt P i el pla π.

[4 punts]

134. PAU 2000 · Setembre · Sèrie 6 · Exercici 3 (Qüestions)

3. Calculeu el peu de la recta perpendicular a la recta $(x, y, z) = (1, -1, 1) + \lambda(0, 1, 1)$ traçada des del punt $(1, 0, -1)$. [2 punts]

135. PAU 2000 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2 (Problemes)

2. Donats el pla π d'equació $x + 2y + 3z - 1 = 0$, la recta r d'equacions $\begin{cases} x = 2z - 3 \\ y = z + 4 \end{cases}$ i el punt $P = (2, 1, 1)$, calculeu:

   a) Unes equacions de la recta que passa per P i és perpendicular a π.
   b) L'equació del pla que passa per P i és perpendicular a la recta r.
   c) Unes equacions de la recta que passa per P i talla perpendicularment r.
   d) Unes equacions de la recta que passa per P, és paral·lela al pla π i tal que el seu vector director és perpendicular al de r.

[4 punts]

SÈRIE 3 PAAU. LOGSE MATEMÀTIQUES

Curs 1999-2000

A continuació trobareu l'enunciat de quatre qüestions i dos problemes. Heu de respondre només tres de les quatre qüestions i resoldre només un dels dos problemes (podeu triar les qüestions i el problema que vulgueu).

136. PAU 2000 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 2 (Problemes)

2. Un quadrat de l'espai té tres dels seus vèrtexs consecutius situats en els punts de coordenades enteres $P = (3, -2, 4)$, $Q = (a, -1, a + 1)$ i $R = (2, -3, 0)$.

   a) Tenint en compte que els vectors $\overrightarrow{QP}$ i $\overrightarrow{QR}$ han de ser perpendiculars, calculeu el valor del nombre enter a.
   b) Calculeu l'equació del pla que conté aquest quadrat.
   c) Calculeu el quart vèrtex d'aquest quadrat.
   d) Calculeu l'àrea d'aquest quadrat.

[4 punts]