Matemàtiques

Funcions (estudi i representació)

Solucions · 18 exercicis

Proves d'accés a la universitat (PAU) de Catalunya. Ordenats del més recent al més antic.
Retalls dels exàmens i pautes oficials (selecat.cat / universitats.gencat.cat).

1. PAU 2024 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 1

1.

(a) La funció $f(x)$ és polinòmica i, per tant, contínua en tots els reals. Com que

$$f(-2) = 3 \cdot (-2)^{13} + 5 \cdot (-2)^3 + 2 < 0,$$

$$f(0) = 3 \cdot (0)^{13} + 5 \cdot (0)^3 + 2 > 0.$$

podem aplicar el Teorema de Bolzano i la funció $f(x)$ s'anul·la forçosament en algun punt de l'interval $[-2, 0]$. Per trobar un interval de longitud 0.5 només cal temptejar uns quants intervals més petits; com que

$$f(-1) = 3 \cdot (-1)^{13} + 5 \cdot (-1)^3 + 2 = -6 < 0,$$

l'arrel pertany a l'interval $[-1, 0]$. I, finalment, com que

$$f(-0.5) = 3 \cdot (-0.5)^{13} + 5 \cdot (-0.5)^3 + 2 = 1.374 \ldots > 0,$$

l'arrel pertany a l'interval $[-1, -0.5]$.

(b) Per analitzar el creixement i decreixement de la funció $f(x)$, calculem la seva derivada $f'(x) = 39x^{12} + 15x^2$: com que tots els exponents són parells, $f'(x)$ mai és negativa i, per tant, la funció f mai decreix. En particular, no té cap màxim ni mínim. Per altra banda, la funció, que és polinòmica, no té asímptotes ni discontinuïtats. En definitiva, la seva gràfica només pot tenir un únic punt de tall amb l'eix d'abscisses que es troba, com hem dit, a l'interval $[-1, -0.5]$.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0.25 per justificar que es pot aplicar el Teorema de Bolzano, 0.5 per veure que hi ha una arrel a l'interval $[-2, 0]$ i 0.5 per afinar fins a un interval de cinc dècimes d'amplada. (b) Compteu 0.25 pel càlcul de la derivada, 0.25 per deduir que es tracta d'una funció creixent, 0.25 per dir que no té màxims ni mínims, i 0.5 per justificar que hi ha una única arrel.

2. PAU 2022 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 6

a)

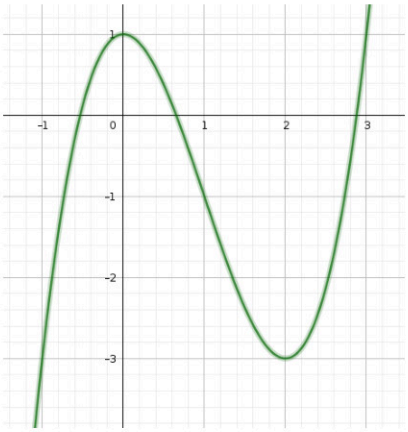
Per a que el programa pugui trobar una solució a una equació $f(x) = 0$ entre a i b cal que la funció $f(x)$ compleixi el teorema de Bolzano, és a dir que la funció sigui contínua en $[a, b]$ i que $f(a)$ i $f(b)$ siguin de signe diferent, és a dir que $f(a) \cdot f(b) < 0$. En aquest cas el teorema de Bolzano ens assegura l'existència d'una arrel dins l'interval (a, b).

En l'exemple concret en el que s'ha aplicat el programa, podem veure que la funció $f(x) = x + ln(x)$ és contínua en l'interval [0,5, 2] ja que és la suma de dues funcions contínues en aquest interval, concretament una funció polinòmica de primer grau i la funció logarítmica que és contínua en tot el seu domini $Dom(ln(x)) = (0, +\infty)$. Veiem també què $f(0{,}5) \cdot f(2) = (0{,}5 + ln(0{,}5)) \cdot (2 + ln(2)) < 0$ la qual cosa demostra que existeix una solució de l'equació en [0,5, 2].

El que fa el programa és trobar el punt mig c entre els valors a i b, i buscar en quin interval canvia de signe la funció; si ho fa a l'interval $[a, c]$ el que fa és prendre com a nou valor de b el punt mig c, i d'aquesta manera tenim un nou interval [a,b] que torna a complir el teorema de Bolzano, ja que la funció canvia de signe i és contínua en aquest nou interval. En el cas en que el canvi de signe es produeixi a l'interval $[c, b]$, el que es fa és prendre com a nou valor a el punt mig c. En aquest cas també teniu un nou interval $[a, b]$ que compleix el teorema de Bolzano. En un i en l'altre cas reduïm a la meitat l'amplada de l'interval inicial. Repetint aquests passos diverses vegades aconseguirem apropar tant com es vulgui els valors de a i b obtenint així una aproximació de l'arrel que, pel teorema de Bolzano, està garantida en aquest interval.

b)

Les funcions polinòmiques són continues, per tant, només necessitem trobar entre quins valors es troben les arrels. Una possibilitat seria començar a fer una taula de valors exhaustiva fins trobar alguns valors en els que la funció canvia de signe i a partir d'aquí contestar la pregunta, però la millor manera de trobar els valors entre els que hi ha solució, i estar segur de que aquesta solució és única és fer una taula de comportament identificant els seus extrems relatius, en aquest cas $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0$ d'on veiem que $x = 0$ i $x = 2$.



Fent una taula de comportament:

x	$(-\infty, 0)$	0	(0,2)	2	$(2, +\infty)$
f	creix	1	decreix	-3	creix
f '	+	0	-	0	+

Aquesta taula de comportament ens indica que el polinomi tindrà una arrel entre 0 i 2, ja que en aquest interval la funció és contínua i canvia de signe, i també hi haurà una solució abans de 0 i després de 2. Com que en aquestes tres intervals la funció és monòtona (la derivada ja no canvia de signe) l'arrel serà única en cada un dels intervals. Ara només cal trobar un valor anterior a 0 i un posterior a 2 en els que la funció canviï de signe.

Per exemple per a $x = -1, f(-1) = -3 < 0$ i per a $x = 3, f(3) = 1 > 0$.

Com a conclusió el programa podrà trobar tres solucions, una en cada un dels intervals $[-1,0]$, $[0,2]$ i $[2,3]$.

3. PAU 2021 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 6

a)

[1,25 punts]

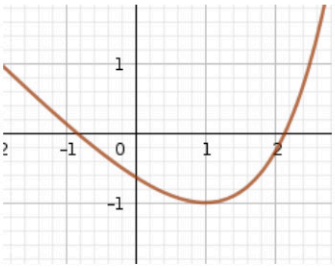
La funció és contínua per ser la suma de dues funcions continues, l'exponencial i una polinòmica de primer grau.

Per analitzar-ne la monotonia estudiarem el signe de la derivada:

$f'(x) = e^{x-1} - 1 = 0$ per tant $e^{x-1} = 1$ d'on $x - 1 = 0$ i, així, $x = 1$ és un punt crític.

Fem la taula de comportament

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	decreix	-1	creix



La funció té un mínim relatiu (i absolut) en el punt $(1, -1)$,
és monòtona decreixent en l'interval $(-\infty, 1)$ i monòtona creixent en l'interval $(1, +\infty)$.

b)

[1,25 punts]

Per demostrar si la funció té o no arrels aplicarem el teorema de Bolzano. En aquest cas la funció és contínua en tots els reals, per tant, ho és en qualsevol interval tancat, concretament en l'interval $[-1,3]$.

Els tots dos extrems de l'interval la funció és positiva:

$f(-1) = e^{-2} > 0$ i $f(3) = e^2 - 4 > 0$

Per altra banda, sabem que $f(1) < 0$ i que en $x = 1$ la funció té un mínim absolut.
Així, pel teorema de Bolzano, podem afirmar que:

- existeix una arrel en l'interval obert $(-1,1)$. Aquesta arrel és única ja que la funció és monòtona decreixent en aquest interval.
- existeix una altra arrel en l'interval $(1,3)$ que també és única per ser monòtona creixent en aquest interval.

Així no pot existir cap altra arrel d'aquesta funció en l'interval donat.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per justificar la continuïtat.

0,25 punts pel càlcul de la derivada.

0,25 punts per trobar l'abscissa del punt crític.

0,25 punts pels intervals de creixement i decreixement.

0,25 punts per justificar el mínim relatiu.

b) 0,25 punts per mencionar les hipòtesis del teorema de Bolzano.

0,5 punts per justificar l'existència de dues arrels.

0,5 punts per la unicitat en cada interval a partir de la monotonia.

4. PAU 2019 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4

4. Considereu la funció $f(x)=\dfrac{2x^3-5x+4}{1-x}$.

a) Calculeu-ne el domini i estudieu-ne la continuïtat. Té cap asímptota vertical?
[1 punt]

b) Observeu que $f(-2)=-\dfrac{2}{3}$, $f(0)=4$ i $f(2)=-10$. Raoneu si, a partir d'aquesta informació, podem deduir que l'interval $(-2,0)$ conté un zero de la funció. Podem deduir-ho per a l'interval $(0,2)$? Trobeu un interval determinat per dos enters consecutius que contingui, com a mínim, un zero d'aquesta funció.
[1 punt]

Resolució:

a) En tractar-se d'una funció que és quocient de dos polinomis, el domini d'aquesta funció són tots els nombres reals excepte els que anul·len el denominador: $1-x=0\rightarrow x=1$.

Per tant, $\text{Dom}\, f=\mathbf{R}-\{1\}=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

La funció f és contínua en tot el seu domini ja que és quocient de polinomis, que són funcions contínues.

L'únic punt on pot presentar una asímptota vertical és en $x=1$ i, efectivament, ho és ja que:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x^3-5x+4}{1-x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x^3-5x+4}{1-x}=-\infty\end{array}\right\}$$

b) La funció presenta una discontinuïtat asimptòtica en $x=1$. Podem aplicar el teorema de Bolzano per determinar un interval que contingui un zero de la funció, però aquest interval no pot contenir $x=1$.

Així doncs, quan apliquem el teorema de Bolzano a l'interval [-2, 0], podem afirmar que la funció té un zero a l'interval $(-2,0)$, ja que $f(-2)\cdot f(0)<0$ però no ho podem afirmar en l'interval $(0,2)$, ja que aquest interval conté el punt de discontinuïtat $x=1$.

Avaluant la funció per a $x=-1$, tindrem l'interval demanat:

$$\left.\begin{array}{l} f(-2)=-\dfrac{2}{3}<0 \\ f(-1)=\dfrac{7}{2}>0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Per tant, aplicant el teorema de Bolzano a l'interval}$$

[-2,-1], l'interval $(-2,-1)$ conté un zero de la funció.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts pel domini.
0,5 punts per la continuïtat.
0,25 punts per l'asímptota

Observació: Cal explicitar els límits laterals per a determinar l'asímptota

b) 0,25 punts per fer servir el teorema de Bolzano.
0,5 punts per raonar que la funció té un zero en un interval però no en l'altre.
0,25 punts per trobar l'interval d'extrems dos enters consecutius.

5. PAU 2018 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 3

3. Sigui la funció $f(x) = a \cdot e^{-x^2+bx}$, amb $a \neq 0$ i $b \neq 0$.

a) Calculeu els valors de *a* i de *b* que fan que la funció tingui un extrem relatiu en el punt $(1, e)$.

[1 punt]

b) Per al cas $a = 3$ i $b = 5$, calculeu l'asímptota horitzontal de la funció *f* quan *x* tendeix a $+\infty$.

[1 punt]

Resolució:

a) Per tal que la funció tingui un extrem relatiu en el punt $(1, e)$ cal que la derivada primera de la funció f s'anul.li en el punt d'abscissa $x = 1$ i que la imatge de la funció en aquest punt sigui e, és a dir, $f'(1) = 0$ i $f(1) = e$.

$$f(x) = a \cdot e^{-x^2+bx}$$

$$f'(x) = a(-2x + b)e^{-x^2+bx}$$

$$f'(1) = a(-2 + b)e^{-1+b} = 0$$

$$f(1) = ae^{-1+b} = e$$

De la primera igualtat com que $e^{-1+b} \neq 0$ aleshores deduïm que $a = 0$ o $b = 2$. Ara bé, si $a = 0 \Rightarrow f(x) = 0$, per a qualsevol valor de *x*, per tant tenim que $\boxed{b = 2}$ i si substituïm a la segona equacio obtenim $f(1) = ae^{-1+2} = ae = e$ d'on deduïm que $\boxed{a = 1}$.

b) Si $a = 3$ i $b = 5$ aleshores tenim $f(x) = 3 \cdot e^{-x^2+5x}$.

Per a calcular l'asímptota horitzontal quan *x* tendeix a $+\infty$., hem de calcular $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 3 \cdot e^{-x^2+5x} = 3 \cdot e^{-\infty} = 0.$$

Per tant, la funció $\boxed{\text{té una asímptota horitzontal en l'eix de les } x\text{'s, } y = 0}$.

Apartat a)
0,25 punts per la derivada de la funció.
0,25 punts pel plantejament del sistema a resoldre.
0,25 punts pel càlcul d'un paràmetre.
0,25 punts pel càlcul de l'altre paràmetre.
Apartat b)
0,25 punts per plantejar el límit a calcular.
0,5 punts pel càlcul del límit.
0,25 punts per l'asímptota horitzontal.

6. PAU 2015 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 3

3. Sigui la funció $f(x) = e^x - x - 2$.

a) Demostreu que la funció f té una arrel (un zero) en l'interval [0, 2].

[1 punt]

b) Comproveu que la funció és monòtona en l'interval [0, 2], i calculeu les coordenades dels punts mínim absolut i màxim absolut de la funció en aquest interval.

[1 punt]

Resolució:

a) Observem que la funció *f* és contínua en tot el seu domini ja que és combinació lineal de funcions contínues com l'exponencial i els polinomis. És suficient observar que $\left.\begin{matrix} f(0) = e^0 - 0 + 2 = 1 - 2 = -1 < 0 \\ f(2) = e^2 - 2 - 2 = e^2 - 4 > 0 \end{matrix}\right\}$ i per tant per continuïtat en l'interval [0, 2] i aplicant el Teorema de Bolzano hi haurà algun punt a (0, 2) en el qual la funció s'anul.la com l'enunciat ens demana que demostrem.

b) La derivada de la funció f és $f'(x) = e^x - 1$. Observem que f' s'anul·la únicament per a $x = 0$ i que és estrictament positiva a l'interval (0, 2], ja que $e^x > 1$ quan $x > 0$. Per tant la funció *f* és creixent en l'interval [0, 2] i aleshores prendrà el mínim absolut en l'extrem inferior, $x = 0$, i el màxim absolut en l'extrem superior, $x = 2$, de l'interval.
Així doncs tindrem: mínim absolut $m = (0, -1)$ i màxim absolut $M = (2, e^2 - 4)$.

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts per l'argument de continuïtat de la funció.

0,25 punts pels càlculs de *f(0)* i *f(2)*.

0,5 punts per l'aplicació del Teorema de Bolzano.

Apartat b)

0,25 punts pel càlcul de la funció derivada.

0,25 punts pel signe de la funció derivada i la deducció de la monotonia.

0,25 punts pel punt *m*. (ambdues coordenades)

0,25 punts pel punt *M*. (ambdues coordenades)

7. PAU 2012 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 2

2.- Sigui $f(x) = \dfrac{ax^2}{x+b}$***, en què*** $a \neq 0$ ***.***

(a) Determineu si té alguna asímptota vertical, en funció del paràmetre b***.***

(b) Indiqueu el valor dels paràmetres a ***i*** b ***perquè la funció*** $f(x)$ ***tingui la recta*** $y = 2x - 4$ ***com a asímptota obliqua a*** $+\infty$ ***.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) La funció, per ser racional, pot tenir una asímptota vertical en el valor de la variable x que anul·li

- Si $b \neq 0$, $\lim\limits_{x\to -b} \dfrac{ax^2}{x+b} = \dfrac{ab^2}{0} = \infty$ (el signe d'aquest "límit" depèn de si es realitza per la dreta o per l'esquerra, però no ens interessa). En aquest cas, la recta $x = -b$ és una asímptota vertical.
- Si $b = 0$, $\lim\limits_{x\to -b} \dfrac{ax^2}{x+b} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ax^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} ax = 0$. Llavors, la funció no té cap asímptota vertical.

(b) **Solució 1**

Una asímptota obliqua al $+\infty$ és de la forma $y = mx + n$ amb

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{i} \quad n = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx)\,.$$

En el nostre cas,

- $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{ax^2}{x+b}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ax^2}{x^2+bx} = a\,.$
- $n = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{ax^2}{x+b} - ax\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-abx}{x+b} = -ab\,.$

Si l'asímptota obliqua a $+\infty$ ha de ser $y = 2x - 3$, cal que $a = 2$ i $-ab = -4$. Per tant, la resposta és

$$a = 2 \quad \text{i} \quad b = 2\,.$$

Solució 2

Com que la funció donada és racional, podem efectuar el seu quocient, obtenint que

$$\frac{ax^2}{x+b} = ax - ab + \frac{ab^2}{x+b}\,,$$

d'on l'asímptota obliqua és $y = ax - ab$. Llavors, $a = 2$ i $-ab = -4$ i es segueix igual que abans.

8. PAU 2010 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 1

1.- Trobeu les asímptotes de la funció $f(x) = \dfrac{3x^3 - 5x - 2}{x^2 - 4x - 5}$ **.**

[2 punts]

Solució

Comencem buscant les asímptotes verticals. Per fer-ho, igualem el denominador de la funció a zero i resolem l'equació resultant.

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \iff x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-5)}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} \iff x = 5 \ \text{ o } \ x = -1\,.$$

Això ens indica que les possibles asímptotes verticals són $x = 5$ i $x = -1$. Comprovem si ho són o no.

- $\lim\limits_{x \to 5^-} \dfrac{3x^3 - 5x - 2}{x^2 - 4x - 5} = \dfrac{348}{0^-} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 5^+} \dfrac{3x^3 - 5x - 2}{x^2 - 4x - 5} = \dfrac{348}{0^+} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^3 - 5x - 2}{x^2 - 4x - 5} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x+1)(3x^2 - 3x - 2)}{(x+1)(x-5)} = -\dfrac{2}{3}$.

O sigui, la funció té una sola asímptota vertical, $x = 5$.

Com que $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^3 - 5x - 2}{x^2 - 4x - 5} = \infty$ (ja que el grau del numerador és superior al grau del denominador), la funció no té asímptotes horitzontals.

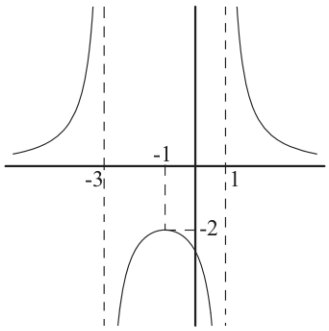
Finalment, busquem si la funció té asímptotes obliqües. Recordem que són de la forma $y = mx + n$ on $m = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ i $n = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - m \cdot x)$. En el nostre cas,

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^3 - 5x - 2}{x^3 - 4x^2 - 5x} = 3 \quad \text{i} \quad n = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x^3 - 5x - 2}{x^2 - 4x - 5} - 3x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{12x^2 + 10x - 2}{x^2 - 4x - 5} = 12\,.$$

L'asímptota oblíqua és $y = 3x + 12$.

9. PAU 2010 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 3

3.- Determineu el valor dels paràmetres a, b ***i*** c ***perquè la gràfica de la funció*** $f(x) = \dfrac{a}{x^2+bx+c}$ ***sigui la següent:***



[2 punts]

Solució

És evident que la funció té dues asímptotes verticals, $x = -3$ i $x = 1$. Això vol dir que el denominador de la funció s'ha d'anul·lar per aquests valors. Arribem, doncs, al sistema

$$\left.\begin{array}{r} 9-3b+c=0 \\ 1+b+c=0 \end{array}\right\}$$

que té per solució $b = 2$, $c = -3$.

També es pot resoldre aquest troç de la qüestió adonant-se'n que el denominador ha de ser

Ara solament cal fer passar la funció pel punt $(-1, -2)$.

$$f(-1) = -2 \iff \frac{a}{(-1)^2+2(-1)-3} = -2 \iff a = 8\ .$$

Així el valor dels paràmetres és $a = 8$, $b = 2$, $c = -3$.

Observem que no hem utilitzat en cap moment que el punt $(-1, -2)$ és un màxim relatiu de la funció. Si es vol, es pot comprovar que efectivament és així.

$$f'(x) = -\frac{16(1+x)}{(x^2+2x-3)^2} \Longrightarrow f'(-1) = 0\ .$$

A més a més, $f'(x) > 0$ si $-3 < x < -1$ i $f'(x) < 0$ si $-1 < x < 1$.

10. PAU 2009 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 5

PROBLEMES

5.- Considereu la funció real de variable real $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2-1}$.

a) Trobeu-ne el domini.

b) Calculeu l'equació de les seves asímptotes, si en té.

c) Estudieu-ne els intervals de creixement i de decreixement, així com les abscisses dels seus extrems relatius, si en té, classificant-los.

[0,5 punts per l'apartat a; 1,5 punts per l'apartat b; 2 punts per l'apartat c]

Solució

a) No són del domini solament els valors de la variable x que anul·len en denominador. Per tant, $\text{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

b) *Asímptotes verticals.* Com que

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{2x^3}{x^2-1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty, \qquad \lim_{x \to -1^+} \frac{2x^3}{x^2-1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty,$$

podem assegurar que la recta $x = -1$ és una asímptota vertical. Paral·lelament, es comprova que $x = 1$ també és una asímptota vertical.

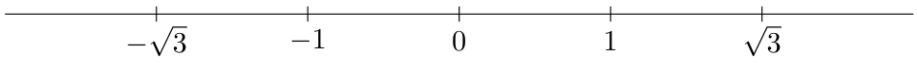
Asímptota horitzontal. El fet de què $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ (ja que el grau del numerador és major que el grau del denominador), ens assegura que no hi ha asímptota horitzontal.

Asímptota obliqua. És de la forma $y = mx + b$ amb $m = \lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ i $b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx)$. En el nostre cas,

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^3}{x^3 - x} = 2; \qquad b = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^3}{x^2-1} - 2x \right) = 0.$$

Així, tenim asímptota obliqua, d'equació $y = 2x$.

c) La derivada de la funció és $f'(x) = \dfrac{2x^4 - 6x^2}{(x^2-1)^2}$, que val zero quan $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$ o $x = \sqrt{3}$. Marquem, a la recta real, els punts que anul·len la primera derivada i els que no són del domini,



Així, la recta real queda dividida en sis intervals: $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \sqrt{3})$ i $(\sqrt{3}, +\infty)$. Busquem el signe de la primera derivada en un punt de cada un d'aquests intervals,

$$f'(-2) > 0;\ f'(-1,5) < 0;\ f'(-0,5) < 0;\ f'(0,5) < 0;\ f'(1,5) < 0;\ f'(2) > 0.$$

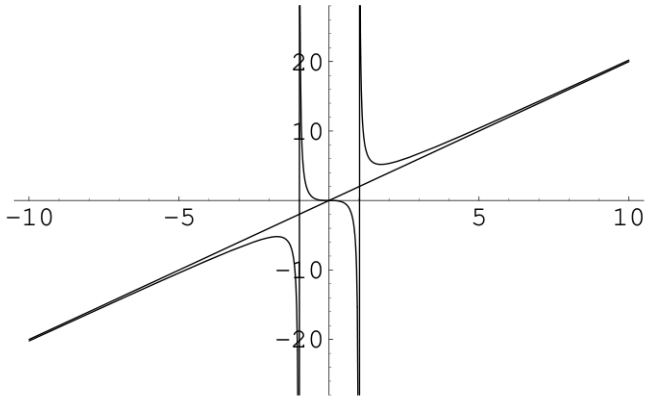
L'esquema de signes per la primera derivada és



Per tant, la funció $f(x)$

- és creixent a $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$;
- és decreixent a $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$;
- té un màxim quan $x = -\sqrt{3}$;
- té un mínim quan $x = \sqrt{3}$.

Encara que en el problema no es demana, la gràfica d'aquesta funció (amb indicació de les asímptotes) és, aproximadament,



11. PAU 2008 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 5

PROBLEMES

5.- Definim les funcions $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ ***i*** $g(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$***.***

a) Comproveu que $[g(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$***.***

b) Comproveu també que $f'(x) = g(x)$ ***i*** $g'(x) = f(x)$***.***

c) Comproveu que $f(x+y) = f(x) \cdot g(y) + f(y) \cdot g(x)$***.***

d) Calculeu $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ***dividint per*** e^x ***el numerador i el denominador; amb un procediment similar (però no igual), trobeu*** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$***.***

PUNTUACIÓ: 1 punt cada apartat.

a) Es tracta simplement de fer les operacions indicades,

$$[g(x)]^2 - [f(x)]^2 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$
$$= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} = \frac{4e^{x-x}}{4} = \frac{4 \cdot 1}{4} = 1$$

b) Recordant les propietats de la derivada, tenim

- $Df(x) = D\left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right] = \frac{D(e^x - e^{-x})}{2} = \frac{e^x - e^{-x} \cdot (-1)}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = g(x)$
- $Dg(x) = D\left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right] = \frac{D(e^x + e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x} \cdot (-1)}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = f(x)$

c) Observem que $f(x+y) = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2}$. Intentarem arribar a aquesta expressió fent els càlculs del membre de la dreta de la igualtat

$$f(x) \cdot g(y) + f(y) \cdot g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{y+x} + e^{y-x} - e^{-y+x} - e^{-y-x}}{4}$$
$$= \frac{2e^{x+y} - 2e^{-x-y}}{4} = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = f(x+y).$$

d) El càlcul d'aquests límits no es pot fer utilitzant la regla de l'Hôpital degut a què la derivada de la funció exponencial és ella mateixa. La forma de calcular-los consisteix en dividir numerador i denominador pel factor adequat (aquell que fa que el quocient sigui una indeterminació del tipus ∞/∞). Així,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{e^x}}{\frac{e^x + e^{-x}}{e^x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{e^{-x}}}{\frac{e^x + e^{-x}}{e^{-x}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

12. PAU 2006 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4

4.- Trobeu el domini i les asímptotes de la funció definida per $f(x)=\dfrac{x^2-4x+1}{x-1}$.

El domini de la funció és $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$.
La funció té per asímptota vertical la recta $x=1$, corresponent a la discontinuïtat.
D'altra banda,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-4x+1}{x^2-x}=1 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3x+1}{x-1}=-3.$$

Per tant, y=x-3 és una asímptota obliqua a dreta i esquerra.

0.5 punts per identificar domini.
0.5 per l'asímptota vertical.
0.5 pel pendent de l'asímptota obliqua.
0.5 per l'ordenada a l'origen.

13. PAU 2006 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 5

PROBLEMES

5. Donada la funció $f(x)=e^{-x^2+2x}$,
   a) trobeu el seu domini i les possibles interseccions amb els eixos;
   b) trobeu els intervals on creix i decreix i els extrems relatius;
   c) trobeu les possibles asímptotes;
   d) feu la representació gràfica de la funció.

a) El domini de la funció és tot $\mathbb{R}$.

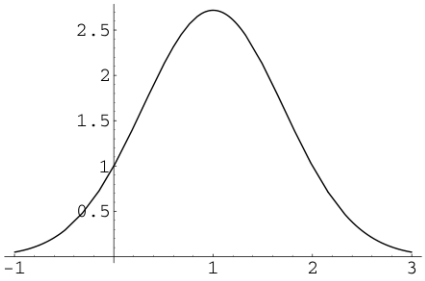
Com que $e^{-x^2-2x}=0$ no té solució, la funció no talla l'eix horitzontal.

Donat que $f(0)=1$, la funció talla l'eix vertical en el punt $(0,1)$.

b) La derivada és $f'(x)=e^{-x^2+2x}(-2x+2)=2e^{-x^2+2x}(1-x)$. Llavors, la derivada només s'anul·la quan $x=1$. Per qualsevol valor de x inferior a 1 la derivada és positiva i en qualsevol superior és negativa; per tant, la funció creix a $(-\infty,1)$, decreix a $(1,\infty)$ i, com a conseqüència, el punt $(1,e)$ és un màxim relatiu.

c) $\lim_{x\to\infty}e^{-x^2+2x}=\lim_{x\to-\infty}e^{-x^2+2x}=0$. Per això $y=0$ és asímptota horitzontal en ambdós costats. La funció no té altres asímptotes.

d) La representació gràfica és



1 punt cada apartat.

14. PAU 2003 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 1 (Problemes)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

15. PAU 2002 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 2 (Qüestions)

2. *Determineu el valor que ha de tenir k perquè la funció $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3kx + 5}{x - 2}$ tingui límit quan x tendeix a 2 (és a dir, existeixi $\lim_{x\to 2} f(x)$) i calculeu el valor que tindrà aquest límit.*

El polinomi $2x^2-3kx+5$ s'ha d'anul·lar per a $x = 2$. Llavors $2\times 2^2-3\times k\times 2+5 = 0$ i $k = \dfrac{13}{6}$. Ara tenim $f(x) = 2x^2 - \dfrac{13}{2}x + 5 = 2(x-2)(x-\dfrac{5}{4})$ i per tant

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 2(2 - \frac{5}{4}) = \frac{3}{2}$$

Compteu un punt per la determinació del valor de k (el punt fonamental és saber que el valor del polinomi en $x = 2$ ha de ser 0) i l'altre punt pel càlcul del límit. No traieu més de mig punt per errors en els càlculs.

16. PAU 2001 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 2 (Problemes)

2. *Considereu la funció:* $f(x) = \dfrac{x^2 \quad 2x}{2x^2 + 1}$

a) *Determineu les seves asímptotes.*

b) *Calculeu els intervals on creix i on decreix i els extrems relatius.*

c) *D'acord amb els resultats que heu obtingut, dibuixeu aproximadament la seva gràfica.*

d) *Fixant-vos en la gràfica anterior, expliqueu quina seria la gràfica de la funció* $g(x) = \quad f(x) + 3$ *(feu-ne un esquema). En quins punts té màxims la funció* $g(x)$*?*

a) Com que el denominador $2x^2 + 1$ no s'anul·la per a cap valor de x, no hi ha cap valor b per al que $\lim_{x \to b} f(x)$ sigui infinit. Per tant, no hi ha cap asímptota vertical.

Es té $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = 1/2$. Per tant la recta $y = 1/2$ és asímptota horitzontal de la gràfica de $f(x)$ quan x tendeix a $+\infty$ i també quan x tendeix a ∞ .

b) Tenim

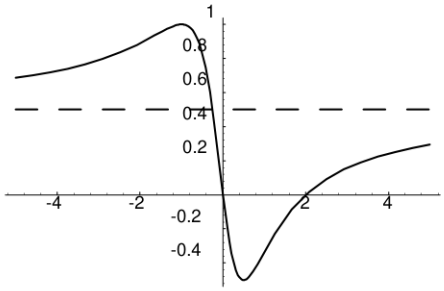
$$f'(x) = 2\frac{2x^2 + x \quad 1}{(2x^2 + 1)^2}$$

de forma que $f'(x) = 0$ per a $x = \quad 1$ i per a $x = 1/2$. Els signes de $f'(x)$ seran

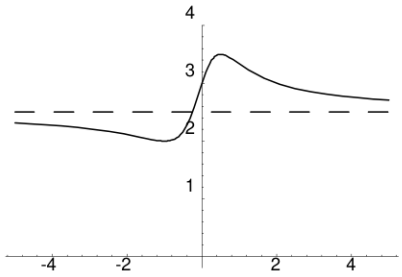
- Positiu quan $x < \quad 1$ (i $f(x)$ és creixent).
- Negatiu quan $\quad 1 < x < 1/2$ (i $f(x)$ és decreixent).
- Positiu quan $x > 1/2$ (i $f(x)$ torna a ser creixent).

A més, podem afirmar que hi ha un màxim local en el punt d'abscissa $x = \quad 1$ i un mínim local en el d'abscissa $x = 1/2$.

c) Les informacions que hem obtingut permeten deduir una gràfica per a $f(x)$ de la forma següent



d) Tenint en compte el canvi de signe i la translació que produeix la suma de 3 unitats, la gràfica de $g(x)$ serà de la forma



que tindrà per asímptota horitzontal la recta $y = \quad 3 + (1/2)$, un mínim local en $x = \quad 1$ i un màxim local en $x = 1/2$.

Compteu fins a 1 punt en cada apartat. En l'apartat a) compteu 1 punt si s'ha calculat l'asímptota horitzontal i s'ha explicat que no hi ha asímptotes verticals. En l'apartat c) valoreu principalment la coherència amb els resultats obtinguts en els apartats anteriors. En l'apartat d) teniu en compte que l'enunciat demana

explícitament que la gràfica de $g(x)$ es dedueixi de la gràfica de $f(x)$, el que s'ha de valorar, doncs, és com es relacionen les gràfiques de $f(x)$ i $g(x)$ entre si. Procureu valorar cada un dels apartats el més independentment possible dels altres.

17. PAU 2000 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 1 (Qüestions)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

18. PAU 2000 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 1 (Problemes)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.