Matemàtiques

Funcions (estudi i representació)

Exercicis · 18 exercicis

Proves d'accés a la universitat (PAU) de Catalunya. Ordenats del més recent al més antic.
Retalls dels exàmens i pautes oficials (selecat.cat / universitats.gencat.cat).

1. PAU 2024 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 1

1. Considereu la funció polinòmica $f(x) = 3x^{13} + 5x^3 + 2$.

a) Justifiqueu que la seva gràfica talla l'eix de les abscisses en un punt de l'interval $[-2, 0]$. Doneu un interval de longitud 0,5 on es trobi aquest punt de tall.

[1,25 punts]

b) Estudieu les zones de creixement i de decreixement, i els màxims i els mínims de $y = f(x)$. Quants punts de tall té exactament la gràfica d'aquesta funció amb l'eix de les abscisses? Justifiqueu la resposta.

[1,25 punts]

2. PAU 2022 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 6

6. La columna de l'esquerra de la taula següent mostra l'esquema d'un programa informàtic que s'ha elaborat per a trobar solucions aproximades d'una equació $f(x) = 0$ en un interval (a, b), sabent que $f(a) \cdot f(b) < 0$. La columna de la dreta recull un exemple de funcionament del programa en què es pot veure com actuaria per trobar una solució de l'equació $x + \ln(x) = 0$ entre els valors $a = 0{,}5$ i $b = 2$.

Esquema del programa	*Exemple*
1. Escriure «Introduïu un valor a»	L'usuari introdueix $a = 0{,}5$
2. Escriure «Introduïu un valor b»	L'usuari introdueix $b = 2$
3. Escriure «Introduïu una funció $f(x)$»	L'usuari introdueix $f(x) = x + \ln(x)$
4. Calcular $c = (a + b)/2$	El programa calcula la mitjana entre a i b i li assigna el nom $c = (0{,}5 + 2)/2 = 1{,}25$
5. Si $f(a) * f(c) < 0$, aleshores reassignar $b = c$; en cas contrari, reassignar $a = c$	El programa comprova que $f(0{,}5) * f(1{,}25) = (0{,}5 + \ln(0{,}5)) * (1{,}25 + \ln(1{,}25)) < 0$; per tant, reassigna $b = 1{,}25$
6. Repetir els passos 4 i 5 tants cops com faci falta fins que $f(a) - f(b) < 0{,}00000001$	El programa va repetint la comprovació anterior, canviant cada vegada els valors de a o de b: inici: a = 0,5, b = 2 iteració 1: a = 0,5, b = 1,25 iteració 2: a = 0,5, b = 0,875 iteració 3: a = 0,5, b = 0,6875 iteració 4: a = 0,5, b = 0,59375 iteració 5: a = 0,546875, b = 0,59375 iteració 6: a = 0,546875, b = 0,5703125 iteració 7: a = 0,55859375, b = 0,5703125 […]
7. Quan $f(a) - f(b) < 0{,}00000001$, escriure: «La solució de l'equació és c» i aturar el programa	Després d'unes 30 iteracions, el programa escriu: «La solució de l'equació és 0,56714329»

a) Expliqueu per què aquest programa és capaç de trobar una solució aproximada de l'equació $x + \ln(x) = 0$ entre els valors $a = 0{,}5$ i $b = 2$.

[1,25 punts]

b) Volem aplicar aquest programa per a trobar les tres arrels de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ amb valors de a i b diferents. Trobeu justificadament entre quins valors a i b, per a cada arrel, hem d'aplicar el programa per a trobar aproximacions de cadascuna de les tres arrels de la funció.

[1,25 punts]

3. PAU 2021 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 6

6. Considereu la funció $f(x) = e^{x-1} - x - 1$.

a) Estudieu-ne la continuïtat, els extrems relatius i els intervals de creixement i decreixement.

[1,25 punts]

b) Demostreu que l'equació $f(x) = 0$ té exactament dues solucions entre $x = -1$ i $x = 3$.

[1,25 punts]

4. PAU 2019 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4

4. Considereu la funció $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5x + 4}{1 - x}$.

a) Calculeu-ne el domini i estudieu-ne la continuïtat. Té cap asímptota vertical?

[1 punt]

b) Observeu que $f(-2) = -\dfrac{2}{3}$, $f(0) = 4$ i $f(2) = -10$. Raoneu si, a partir d'aquesta informació, podem deduir que l'interval $(-2, 0)$ conté un zero de la funció. Podem deduir-ho per a l'interval $(0, 2)$? Trobeu un interval determinat per dos enters consecutius que contingui, com a mínim, un zero d'aquesta funció.

[1 punt]

5. PAU 2018 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 3

3. Sigui la funció $f(x) = a \cdot e^{-x^2+bx}$, amb $a \neq 0$ i $b \neq 0$.

a) Calculeu els valors de a i de b que fan que la funció tingui un extrem relatiu en el punt $(1, e)$.

[1 punt]

b) Per al cas $a = 3$ i $b = 5$, calculeu l'asímptota horitzontal de la funció f quan x tendeix a $+\infty$.

[1 punt]

6. PAU 2015 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 3

3. Sigui la funció $f(x) = e^x - x - 2$.

a) Demostreu que la funció f té una arrel (un zero) en l'interval $[0, 2]$.

[1 punt]

b) Comproveu que la funció és monòtona en l'interval $[0, 2]$ i calculeu les coordenades dels punts mínim absolut i màxim absolut de la funció en aquest interval.

[1 punt]

7. PAU 2012 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 2

2. Sigui $f(x)=\dfrac{ax^2}{x+b}$, en què $a\neq 0$.

a) Determineu si té alguna asímptota vertical, en funció del paràmetre b.
b) Indiqueu el valor dels paràmetres a i b perquè la funció $f(x)$ tingui la recta $y=2x-4$ com a asímptota obliqua a $+\infty$.

[1 punt per cada apartat]

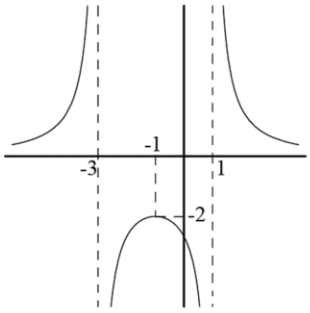
8. PAU 2010 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 1

1. Trobeu les asímptotes de la funció $f(x)=\dfrac{3x^2-3x-2}{x^2-4x-5}$.

[2 punts]

9. PAU 2010 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 3

3. Determineu el valor dels paràmetres a, b i c perquè la gràfica de la funció $f(x)=\dfrac{a}{x^2+bx+c}$ sigui la següent:



[2 punts]

10. PAU 2009 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 5

PROBLEMES

5. Considereu la funció real de variable real $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2-1}$.

a) Trobeu-ne el domini.
b) Calculeu l'equació de les seves asímptotes, si en té.
c) Estudieu-ne els intervals de creixement i de decreixement, així com les abscisses dels seus extrems relatius, si en té, i classifiqueu-los.

[0,5 punts per l'apartat *a*; 1,5 punts per l'apartat *b*; 2 punts per l'apartat *c*]

11. PAU 2008 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 5

PROBLEMES

5. Donades les funcions $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ i $g(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$:

a) Comproveu que $[g(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$.
b) Comproveu també que $f'(x) = g(x)$ i $g'(x) = f(x)$.
c) Comproveu que $f(x + y) = f(x) \cdot g(y) + f(y) \cdot g(x)$.

d) Calculeu $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ dividint per e^x el numerador i el denominador; amb un procediment similar (però no igual), trobeu $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

[1 punt per cada apartat]

12. PAU 2006 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4

4. Trobeu el domini i les asímptotes de la funció definida per $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{x - 1}$.

[Puntuació: 0,5 punts pel càlcul del domini i 1,5 pel de les asímptotes. Total: 2 punts]

13. PAU 2006 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 5

Problemes

5. Donada la funció $f(x) = e^{-x^2 + 2x}$.
   a) Trobeu el seu domini i les possibles interseccions amb els eixos.
   b) Trobeu els intervals on creix i decreix i els extrems relatius.
   c) Trobeu les possibles asímptotes.
   d) Feu la representació gràfica aproximada de la funció.

[Puntuació: cada apartat val 1 punt. Total: 4 punts]

$\begin{cases} 2x - 5y - z - 3 = 0 \end{cases}$

14. PAU 2003 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 1 (Problemes)

PROBLEMES

1. a) Determineu el valor del paràmetre a que fa que la funció

$$f(x) = \frac{x + a}{x^3}$$

presenti un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = 3$.

b) Per a aquest valor del paràmetre a, calculeu els intervals de creixement i decreixement, i les asímptotes de la funció.

c) A partir de les dades que heu obtingut, feu una gràfica aproximada d'aquesta funció.

[4 punts]

15. PAU 2002 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 2 (Qüestions)

2. Determineu el valor que ha de tenir k perquè la funció $f(x) = \frac{2x^2 - 3kx + 5}{x - 2}$ tingui límit quan x tendeix a 2 (és a dir, existeixi $\lim_{x \to 2} f(x)$) i calculeu el valor que tindrà aquest límit. [2 punts]

16. PAU 2001 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 2 (Problemes)

2. Considereu la funció $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 1}$

a) Determineu les seves asímptotes.
b) Calculeu els intervals on creix i on decreix, i els extrems relatius.
c) D'acord amb els resultats que heu obtingut, dibuixeu aproximadament la seva gràfica.
d) Fixant-vos en la gràfica anterior, expliqueu quina seria la gràfica de la funció $g(x) = -f(x) + 3$ (feu-ne un esquema). En quins punts té màxims la funció $g(x)$?

[4 punts]

SÈRIE 5 PAAU. LOGSE MATEMÀTIQUES

Curs 2000-2001

A continuació trobareu l'enunciat de quatre qüestions i dos problemes. Heu de respondre només tres de les quatre qüestions i resoldre només un dels dos problemes (podeu triar les qüestions i el problema que vulgueu). En les respostes que doneu heu d'explicar sempre què és el que voleu fer i per què.

17. PAU 2000 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 1 (Qüestions)

1. a) Trobeu els extrems relatius de la funció polinòmica

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x - 3$$

i calculeu els valors de *f(x)* en aquests punts. A partir d'aquestes dades, feu un dibuix aproximat de la seva gràfica.

b) Demostreu que l'equació $x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x - 3 = 0$ té, exactament, tres solucions reals.

[2 punts]

18. PAU 2000 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 1 (Problemes)

PROBLEMES

1. Considereu la funció $f(x) = \frac{x^2}{x + a}$, on *a* és un paràmetre.

a) Calculeu *a* sabent que la recta $y = x + 2$ és una asímptota obliqua d'aquesta funció.

b) Prenent el valor de *a* obtingut en l'altre apartat, calculeu el domini, les interseccions de la gràfica amb els eixos, els intervals de creixement i decreixement i els extrems relatius de la funció *f.* Feu una gràfica aproximada d'aquesta funció a partir de les dades que heu obtingut.

[4 punts]