Matemàtiques

Derivades i aplicacions

Solucions · 118 exercicis

Proves d'accés a la universitat (PAU) de Catalunya. Ordenats del més recent al més antic.
Retalls dels exàmens i pautes oficials (selecat.cat / universitats.gencat.cat).

1. PAU 2026 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 1

Exercici 1

[2,5 punts en total]

1.1

El domini d'aquesta funció són tots els nombres reals, ja que el denominador no s'anul·la mai. La derivada és

$$f'(x) = \frac{5(x^2+1)-5x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-5x^2+5}{(x^2+1)^2}.$$

Els candidats a màxim i mínim d'aquesta funció són els zeros de la derivada:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -5x^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Per tant, els únics possibles màxims o mínims són aquests dos punts. Ara estudiem la monotonia de la funció, mirant el signe de la derivada: el denominador és sempre positiu i el numerador, $-5x^2 + 5$, és negatiu a $(-\infty, -1)$ i a $(1, +\infty)$, mentre que és positiu a $(-1, 1)$. Per tant, $f'(x) < 0$ i la funció f és decreixent a $(-\infty, -1)$ i a $(1, +\infty)$, mentre que $f'(x) > 0$ i la funció f és creixent a l'interval $(-1,1)$. Per tant, la funció té un màxim a $x = 1$ i un mínim a $x = -1$.

1.2

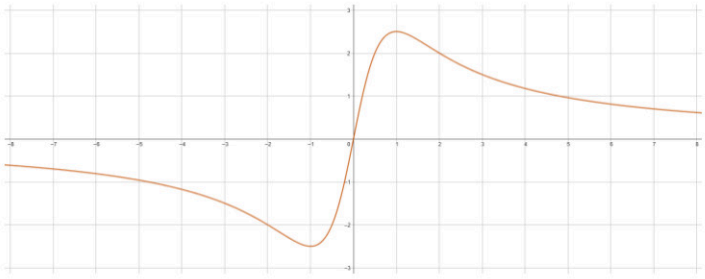
La funció no tindrà asímptotes verticals perquè el denominador mai s'anul·la. Sí que té asímptotes horitzontals, ja que $f(x) \to 0$ quan $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5/x}{1+1/x^2} = \frac{0}{1+0} = 0.$$

Alternativament, també es pot argumentar per la regla de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5}{2x} = \frac{5}{\pm\infty} = 0.$$

Amb la informació que tenim podem fer un esbós de la gràfica de la funció f:



1.3

Com que $f(2) = \frac{5\cdot 2}{2^2+1} = \frac{10}{5} = 2$, es tracta del punt $(2, 2)$. El pendent en aquest punt és $f'(2) = \frac{-5\cdot 2^2+5}{(2^2+1)^2} = \frac{-15}{25} = -\frac{3}{5}$, per tant, la recta normal, que és perpendicular a la tangent, tindrà pendent $\frac{5}{3}$ i es tracta de

$$y - 2 = \frac{5}{3}(x - 2) \longrightarrow y = \frac{5}{3}x - \frac{4}{3}.$$

2. PAU 2026 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 4 (Opció A)

OPCIÓ A

4.1

Per a saber l'expressió del volum, necessitem primer les dimensions de la caixa. Observant l'esquema de l'enunciat veiem que la base de la caixa serà un rectangle de llargada $\frac{80-2x}{2}$, és a dir, de $40 - x$, i d'amplada $50 - 2x$. Com que la caixa ens quedarà d'alçada x, el seu volum expressat en centímetres cúbics serà

$$V(x) = (40 - x) \cdot (50 - 2x) \cdot x = 2x^3 - 130x^2 + 2000x,$$

tal com indica l'enunciat.

4.2

Per a optimitzar el volum, calculem els extrems relatius d'aquesta funció, igualant la seva derivada a zero:

$$V'(x) = 6x^2 - 260x + 2000 = 0,$$

$$x = \frac{260 \pm \sqrt{67.600 - 48.000}}{12} = \frac{260 \pm 140}{12} = 10, \quad \frac{100}{3}.$$

Calculem la segona derivada per a determinar el màxim $V''(x) = 12x - 260$. Com que $V''(10) < 0$ i $V''\left(\frac{100}{3}\right) > 0$, el màxim es troba en $x = 10\ cm$. Això correspon a una caixa de $40 - 10 = 30\ cm$ de llargada, per $50 - 20 = 30\ cm$ d'amplada i $10\ cm$ d'alçada, i que té volum $V(10) = 30 \cdot 30 \cdot 10 = 9.000\ cm^3$.

3. PAU 2026 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4 (Opció A)

Exercici 4

OPCIÓ A.

Anomenem x a la longitud en metres del primer tros de barana, amb el qual es farà el tancat circular; de l'altre tros, de $10 - x$ metres de longitud, se'n farà el tancat quadrat. Com que x ha de ser el perímetre d'una circumferència, el seu radi serà $r = \frac{x}{2\pi}$, i l'àrea d'aquest espai circular delimitat valdrà $A_1 = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2$. Per altra banda, com que $10 - x$ és el perímetre d'un quadrat, el seu costat serà $c = \frac{10-x}{4}$ i l'àrea d'aquest espai quadrat valdrà $A_2 = \left(\frac{10-x}{4}\right)^2$. Així la funció a minimitzar és

$$A(x) = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{10-x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{100 - 20x + x^2}{16} = \frac{(4+\pi)x^2 - 20\pi x + 100\pi}{16\pi}.$$

Derivem i busquem els punts crítics

$$A'(x) = \frac{(8+2\pi)x - 20\pi}{16\pi} = 0 \quad \longrightarrow \quad x = \frac{20\pi}{8+2\pi} \simeq 4{,}4\ m.$$

Per assegurar que es tracta d'un mínim, podem fer la segona derivada i comprovar que és positiva:

$$A''(x) = \frac{8+2\pi}{16\pi} > 0.$$

Així doncs, per tal de minimitzar la superfície total dels dos espais, l'arquitecte d'aquest poble haurà de fer un tancat circular amb $4{,}4\ m$ de barana i un tancat quadrat amb els $5{,}6\ m$ restants. La superfície total dels dos tancats serà de

$$A(4{,}4) = \frac{(4+\pi)\cdot 4{,}4^2 - 20\pi\cdot 4{,}4 + 100\pi}{16\pi} \simeq 3{,}5\ m^2.$$

Criteris de correcció: Compteu 0,25 punts per plantejar el perímetre de la circumferència; 0,25 punts pel perímetre del quadrat, i 0,5 punts per l'expressió de l'àrea total en funció d'una sola variable. Compteu 0,5 punts per la derivada i obtenció del punt crític; 0,5 per comprovar que es tracta d'un mínim, i 0,5 per la resposta final, incloent-hi les dues longituds i el valor de l'àrea mínima.

4. PAU 2026 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 4 (Opció A)

OPCIÓ A.

4.1. Usarem l'expressió de la recta punt-pendent, $\boldsymbol{y - f(x_0) = m(x - x_0)}$. Com que la recta buscada ha de passar pel punt $\boldsymbol{x_0 = -1}$, $\boldsymbol{f(x_0) = -1}$, i ha de tenir pendent $\boldsymbol{f'(x_0) = f'(-1) = 2}$ (tal com es veu al gràfic), l'equació de la recta tangent a la funció $\boldsymbol{f(x)}$ en el punt $\boldsymbol{x_0 = -1}$ serà

$$y - (-1) = 2 \cdot \big(x - (-1)\big) \;\longrightarrow\; y + 1 = 2 \cdot (x + 1) \;\longrightarrow\; y = 2x + 1.$$

4.2. Els punts crítics de $\boldsymbol{f(x)}$ són aquells que satisfan $\boldsymbol{f'(x) = 0}$. Del gràfic es veu clarament que són els punts $\boldsymbol{x = -2}$, $\boldsymbol{x = 0}$, i $\boldsymbol{x = 1}$: aquestes abscisses són possibles extrems relatius de la funció $\boldsymbol{f(x)}$.

Com que $f'(x)$ és creixent en $x = -2$, la seva derivada en aquest punt serà positiva, $f''(-2) > 0$, i això vol dir que $x = -2$ és un mínim local de $f(x)$.

Anàlogament, com que $f'(x)$ és positiva immediatament abans de $x = 1$, i negativa immediatament després, la funció $f(x)$ és creixent abans de $x = 1$ i decreixent després; per tant $x = 1$ és un màxim local de $f(x)$.

El punt $x = 0$ és diferent. Tant abans com després $f'(x)$ és positiva per tant, $f(x)$ és creixent en el punt $x = 0$. Però a més, $f'(x)$ és decreixent abans de $x = 0$ i per tant la seva derivada (és a dir, $f''(x)$) és negativa, mentre que és creixent després de $x = 0$ i per tant $f''(x)$ és positiva. Això vol dir que la funció $f(x)$ és convexa abans de $x = 0$ i còncava després. Per tant, el punt $x = 0$ és un punt d'inflexió de $f(x)$.

4.3. Com que $\boldsymbol{f(x)}$ és una primitiva de $\boldsymbol{f'(x)}$, l'àrea que ens demanen és fàcil de calcular usant la regla de Barrow (i usant les dades $\boldsymbol{f(0) = -0,2}$ i $\boldsymbol{f(-1) = -1}$):

$$A = \int_{-1}^{0} f'(x)\,dx = [f(x)]_{-1}^{0} = f(0) - f(-1) = -0{,}2 - (-1) = 0{,}8\,u^2.$$

Criteris de correcció: (4.1.) Compteu 0,5 per determinar el pendent de la recta tangent a partir del gràfic, i 0,5 per l'equació de la recta. **(4.2.)** Compteu 0,25 per la llista de punts crítics, 0,25 per deduir que $x = -2$ és un mínim, 0,25 per deduir que $x = 1$ és un màxim, i 0,25 per deduir que $x = 0$ és un punt d'inflexió. **(4.3.)** Compteu 0,25 per reconèixer que $f(x)$ és una primitiva de $f'(x)$, i 0,25 pel càlcul de l'àrea.

5. PAU 2025 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 1

1. a) Tenint en compte que la recta r ha de passar pel punt $P = (1,1)$ i que m és el seu pendent, la recta r té per equació $y - 1 = m(x - 1)$. La mida de la base del triangle és l'abscissa del punt d'intersecció de la recta r amb l'eix OX

$$\begin{cases} y - 1 = m(x - 1) \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow 0 - 1 = m(x - 1) \rightarrow x = \frac{m - 1}{m}.$$

I l'alçada del triangle és l'ordenada del punt d'intersecció de la recta r amb $y = 3x$:

$$\begin{cases} y - 1 = m(x - 1) \\ y = 3x \end{cases} \rightarrow 3x - 1 = m(x - 1) \rightarrow x = \frac{m - 1}{m - 3}, \; y = 3 \cdot \frac{m - 1}{m - 3}.$$

La funció a minimitzar és la que calcula l'àrea del triangle:

$$A(m) = \frac{1}{2} \cdot \frac{m-1}{m} \cdot 3 \cdot \frac{m-1}{m-3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{m^2-2m+1}{m^2-3m}.$$

Parlant estrictament el valor de l'àrea és $A(m) = \left|\frac{3}{2} \cdot \frac{m^2-2m+1}{m^2-3m}\right|$ perquè hi ha valors de m per als quals aquesta expressió és negativa. No tingueu en compte si ignoren aquest detall.

b) Derivem la funció àrea i igualem a zero per trobar els possibles extrems relatius:

$$A'(m) = \frac{3}{2} \cdot \frac{(2m-2)(m^2-3m)-(m^2-2m+1)(2m-3)}{(m^2-3m)^2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{-m^2-2m+3}{(m^2-3m)^2} = 0,$$

$$-m^2 - 2m + 3 = 0 \rightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{4-4(-1)3}}{-2} = \frac{2 \pm 4}{-2} = 1, -3.$$

Per comprovar si són màxims o mínims fem la segona derivada:

$$A''(m) = \frac{3}{2} \cdot \frac{(-2m-2)(m^2-3m)^2 - (-m^2-2m+3)2(m^2-3m)(2m-3)}{(m^2-3m)^4},$$

i, com que $A''(-3) = \frac{1}{54} > 0$ i $A''(1) = -\frac{3}{2} < 0$, el mínim correspon a $m = -3$ (segons l'esbós, el pendent ja ha de ser negatiu).

Alternativament, podem estudiar el creixement i decreixement de la funció $A(m)$. Aquests venen donats pel signe de la primera derivada, però com que aquesta té un quadrat al denominador, dependrà només del signe del numerador $-m^2 - 2m + 3$. Això és una paràbola oberta cap avall i que talla l'eix OX en els punts (-3,0) i (1,0); així doncs, per a $m < -3$, la derivada és negativa i la funció decreix, i per $-3 < m < 1$, la derivada

és positiva i la funció creix, per la qual cosa en $m = -3$, l´àrea és mínima. El valor d'aquesta àrea és:

$$A(-3) = \frac{3}{2} \cdot \frac{(-3)^2 - 2(-3) + 1}{(-3)^2 - 3(-3)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{16}{18} = \frac{4}{3}\ u^2.$$

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,25 per l'equació del feix de rectes; 0,25 per la mida de la base del triangle; 0,25 per l'alçada, i 0,25 pel càlcul de l'àrea (tot en funció de m). **(b)** Compteu 0,5 per la derivada; 0,25 per calcular els punts crítics; 0,5 per justificar el mínim, i 0,25 per calcular el valor de l'àrea.

6. PAU 2025 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

1. a) Com que $f(0) = \frac{0}{-1} = 0$, el tall amb l'eix d'ordenades és al punt $(0,0)$. Per als talls amb l'eix d'abscisses, hem de resoldre l'equació $\frac{x^2-2x}{x-1} = 0$, que té com a solucions $x = 0$ i $x = 2$; per tant, els talls amb l'eix d'abscisses són $(0,0)$ i $(2,0)$.

Aquesta funció té una asímptota vertical a $x = 1$, ja que aquest punt és fora del domini i $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x}{x-1} = \frac{-1}{0} = \pm\infty$ (més precisament, $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-2x}{x-1} = \frac{-1}{+0} = -\infty$ i $\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-2x}{x-1} = \frac{-1}{-0} = +\infty$). A més a més, aquesta funció té una asímptota obliqua, ja que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x}{x(x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x}{x^2-x} = \frac{1}{1} = 1.$$

Com que

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-2x}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x-x^2+x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{x-1} = -1,$$

es tracta de la recta $y = x - 1$.

b) La derivada d'aquesta funció és:

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x-1)-(x^2-2x)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-2x+2-x^2+2x}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}.$$

Com que $f(0) = 0$ i $f'(0) = 2$, la recta tangent al punt $(0,0)$ tindrà per equació:

$$y - 0 = 2(x - 0) \quad \longrightarrow \quad y = 2x.$$

Anàlogament, com que $f(2) = \frac{4-4}{1} = 0$ i $f'(2) = \frac{4-4+2}{1} = 2$, la recta tangent al punt $(2,0)$ tindrà per equació:

$$y - 0 = 2(x - 2) \quad \longrightarrow \quad y = 2x - 4.$$

Aquestes dues rectes són paral·leles ja que tenen el mateix pendent: $f'(0) = f'(2) = 2$.

c) Igualant la derivada a 1, ens queda una equació sense solució:

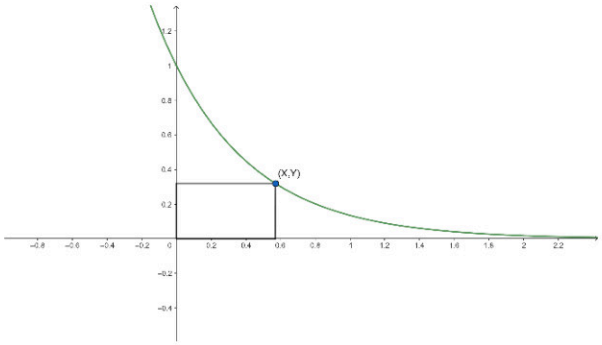
$$\frac{x^2 - 2x + 2}{(x-1)^2} = 1 \longrightarrow \quad x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 \quad \longrightarrow \quad 2 = 1.$$

Per tant, no hi ha cap punt on la recta tangent tingui pendent 1.

Criteris de correcció: a) Compteu 0,25 p. pels punts de tall; 0,25 p. per l'asímptota vertical (encara que no distingeixin el límit per la dreta i per l'esquerra), i 0,5 p. per l'equació de l'asímptota obliqua. **b)** Compteu 0,25 p. pel càlcul de la derivada; 0,25 p. per cadascuna de les rectes tangents, i 0,25 p. per justificar correctament que són paral·leles. **c)** Compteu 0,25 p. per plantejar l'equació i 0,25 p. per veure que no té solució i respondre que la gràfica no té cap recta tangent amb pendent 1.

7. PAU 2024 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 5

(a) La gràfica de la funció $y = e^{-2x}$ està esbossada en el dibuix següent, juntament amb un dels rectangles descrits a l'enunciat:



Com que un qualsevol d'aquests rectangles mesura x de base i e^{-2x}d'alçada, la seva àrea és $A(x) = xe^{-2x}$. Busquem els extrems relatius d'aquesta funció:

$$A'(x) = e^{-2x} + xe^{-2x}(-2) = e^{-2x}(1-2x) = 0 \;\longrightarrow\; x = \frac{1}{2}.$$

A partir del signe de la funció derivada es veu clarament que $A(x)$ és creixent per a $x < \frac{1}{2}$ i decreixent per a $x > \frac{1}{2}$. Per tant, el punt $x = \frac{1}{2}$ és un màxim absolut de $A(x)$. Així, el rectangle d'àrea màxima correspon al de costats $x = \frac{1}{2}$ i $y = e^{-2\cdot(\frac{1}{2})} = \frac{1}{e}$, i té àrea $A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2e}\ u^2$.

(b) La derivada d'aquesta funció és $y' = -2e^{-2x}$. El pendent de la recta tangent en el punt d'abscissa 0 és $y'(0) = -2e^0 = -2$. Com que $y(0) = e^0 = 1$, la recta tangent serà la d'equació $y - 1 = -2(x - 0)$, és a dir, $y = -2x + 1$. El punt de tall d'aquesta recta amb l'eix d'abscisses és $x = \frac{1}{2}$, és a dir, el punt $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0.25 per escriure la funció àrea, 0.25 per derivar-la, 0.25 per trobar el punt crític, 0.5 per justificar que es tracta d'un màxim, i 0.25 per calcular l'àrea màxima. (b) Compteu 0.25 pel càlcul de la derivada, 0.5 per l'equació de la recta tangent, i 0.25 pel punt de tall.

Comentaris: La justificació del màxim es pot fer també via derivada segona. Compteu bé qualsevol de les maneres de fer-ho, en la mesura que siguin correctes i estiguin ben explicades.

8. PAU 2024 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

1.

a)

[1 punt]

Derivant i igualant a zero,

$$f'(x) = 2\frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = 2\frac{1 - \ln x}{x^2} = 0,$$

ens queda l'equació $\ln x = 1$; per tant, f té només un punt crític, $x = e$. Resulta que és un màxim ja que la derivada segona és negativa:

$$f''(x) = 2\frac{-\frac{1}{x}x^2 - (1-\ln x)\cdot 2x}{x^4}, \qquad f''(e) = 2\frac{-e}{e^4} = -2e^{-3} < 0.$$

Com que només té un màxim, la funció és creixent a l'interval $(0, e)$ i decreixent a $(e, +\infty)$, cosa que també podem veure directament mirant el signe de la derivada.

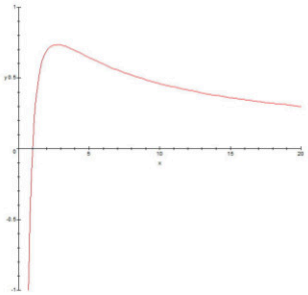
b)

[1 punt]

A zero, hi ha una asímptota vertical, ja que $\lim_{x\to 0^+} 2\frac{\ln(x)}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$. I a infinit, una asímptota horitzontal, cosa que es veu fent l'Hôpital,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0^+,$$

o bé argumentant que, per a $x>e$ la funció és sempre decreixent, però no travessa mai l'eix d'abscisses, ja que $2\frac{\ln x}{x} = 0$ només té la solució $x = 1$. Aquest és un esbós de la gràfica d'aquesta funció:



c)

[0,5 punts]

Com que $f(1) = 2\frac{\ln 1}{1} = 0$ i $f'(1) = 2\frac{1-\ln 1}{1^2} = 2$, es tracta de la recta que passa pel punt $(1,0)$ i té pendent 2: és la recta $y - 0 = 2(x-1) \longrightarrow y = 2x - 2$.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,5 pel càlcul de la derivada, 0,25 per determinar el màxim i 0,25 per les zones de creixement i decreixement. (b) Compteu 0,25 per l'asímptota vertical, 0,5 per l'horitzontal i 0,25 per l'esbós de la gràfica. (c) Compteu 0,5 pel càlcul correcte de la recta tangent.

Comentari: Si justifiquen l'existència de l'asímptota horitzontal sense calcular el seu valor (per exemple, dient que al tendir a infinit la funció és decreixent sense tallar mai l'eix d'abscisses), o fins i tot dient que és 0 sense justificar, compteu la totalitat dels 0,5 punts corresponents (l'enunciat pregunta si $f(x)$ té asímptotes, no que les calculin).

9. PAU 2024 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 5

5.

a)

[1,25 punts]

Com s'indica a l'enunciat, denotem per x la fondària del cobert, i denotem per h l'alçada; l'amplada serà $3x$. El volum del cobert ha de ser de 6 m^3, és a dir, $3x \cdot x \cdot h = 6$ i per tant $h = \frac{2}{x^2}$. El cost de construcció és donat per

$$C(x) = 30 \cdot (3xh + xh + xh) + 50 \cdot 3x^2 + 35 = 150xh + 150x^2 + 35 =$$

$$= 150x \cdot \frac{2}{x^2} + 150x^2 + 35 = \frac{300}{x} + 150x^2 + 35.$$

b)

[1,25 punts]

Per minimitzar la funció $C(x)$, calculem la seva derivada:

$$C'(x) = \frac{-300}{x^2} + 300x$$

Si resolem l'equació $C'(x) = 0$ obtenim $\frac{300}{x^2} = 300x$ o, equivalentment, $x^3 = 1$, que té com a única solució real $x = 1$. Com que $C''(x) = \frac{600}{x^3} + 300$ i $C''(1) > 0$, comprovem fàcilment que es tracta d'un mínim de la funció. Així doncs, les dimensions del cobert han de ser $x = 1$ metre de fondària, $3x = 3$ metres d'amplada, i $h = \frac{2}{1^2} = 2$ metres d'alçada. Per a aquestes dimensions el cost de construcció és de $C(1) = \frac{300}{1} + 150 \cdot 1^2 + 35 = 485$ euros.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,25 pel plantejament correcte de les variables (amplada, fondària i alçada), 0,5 per expressar la lligadura que representa el volum fixat, i 0,5 per l'expressió final del cost. (b) Compteu 0,25 per la derivada, 0,25 per aïllar correctament, 0,25 per justificar que es tracta d'un mínim, 0,25 per les tres dimensions demanades i 0,25 pel càlcul del cost total.

Comentaris: Poden plantejar que l'amplada és x i la fondària $\frac{x}{3}$; els càlculs seran diferents però doneu els punts corresponents de cada part sempre que estigui ben feta i ben argumentada. La justificació que es tracta d'un mínim pot fer-se també sense la derivada segona, analitzant el signe de la derivada primera; compteu-ho bé si ho fan així, sempre que estigui ben argumentat.

10. PAU 2023 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 2

$f(x) = {}^{1}/_{x} \qquad f'(x) = {}^{-1}/_{x^2},$

Punt per on passa la recta, $(2, f(2)) = (2\ ,\ {}^{1}/_{2})$

Pendent de la recta $= f'(2) = {}^{-1}/_{4}$

$y - \frac{1}{2} = \left(\frac{-1}{4}\right) \cdot (x - 2) \qquad \Longrightarrow \quad y = \frac{-1}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

Per tant, la recta tangent és $\boxed{y = \frac{-1}{4}x + 1}$

b)

$f(x) = {}^{1}/_{x} \qquad f'(x) = {}^{-1}/_{x^2}$

Punt per on passa la recta, $(k, f(k)) = \left(k\ ,\ {}^{1}/_{k}\right)$

Pendent de la recta $= f'(k) = {}^{-1}/_{k^2}$

$y - \frac{1}{k} = \left(\frac{-1}{k^2}\right) \cdot (x - k) \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{2}{k} - \frac{x}{k^2}$

Per tant, la recta tangent és $\boxed{y = \frac{-1}{k^2}x + \frac{2}{k}}$.

c)

Calculem el punt de tall de la recta tangent $y = \frac{2}{k} - \frac{x}{k^2}$ amb l'eix d'abscisses:

$$\begin{cases} y = \frac{2}{k} - \frac{x}{k^2} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \text{Tall amb l'eix d'abscisses} = (2k\ ,\ 0)$$

Punt de tall de la recta tangent $y = \frac{-x}{k^2} + \frac{2}{k}$ amb l'eix d'ordenades:

$$\begin{cases} y = \frac{2}{k} - \frac{x}{k^2} \\ x = 0 \end{cases} \qquad \text{Tall amb l'eix d'ordenades} = \left(0\ ,\ \frac{2}{k}\right)$$

$\text{Àrea del triangle} = \frac{1}{2} \cdot 2k \cdot \frac{2}{k} = 2\ u^2$

El triangle té àrea constant igual a 2 unitats de superfície, per a qualsevol valor del paràmetre k.

Pautes de correcció:

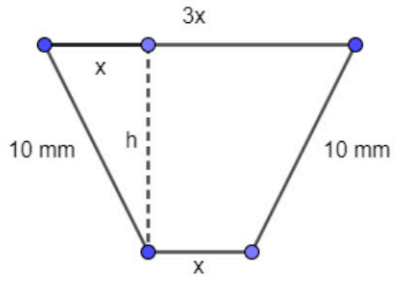
a) 0,25 per trobar el punt.
0,25 per trobar el pendent.
0,25 per trobar la recta tangent.

b) 0,25 punts per trobar el punt.
0,25 per trobar el pendent.
0,25 per trobar la recta tangent (en funció de k).

c) 0,25 per trobar el punt de tall amb l'eix de les abscisses.
0,25 per trobar el punt de tall amb l'eix de les ordenades.
0,25 per trobar el valor de l'àrea.
0,25 per expressar que l'àrea és constant per a qualsevol valor del paràmetre k.

11. PAU 2023 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 6

A partir de la situació exposada tenim el gràfic següent:



Pel teorema de Pitàgores s'obté que $x^2 + h^2 = 10^2$, i per tant $\boxed{h = \sqrt{100 - x^2}}$

b)

L'àrea del trapezi és $A(x) = (x + 3x)/2 \cdot h = 2x \cdot \sqrt{100 - x^2}$

Per a trobar els candidats a valors que fan màxima aquesta àrea calcularem la funció derivada $A'(x)$ i obtindrem les solucions de l'equació $A'(x) = 0$.

$$A'(x) = 2 \cdot \sqrt{100 - x^2} + 2x \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{100 - x^2}} (-2x)$$

$$= 2 \cdot \sqrt{100 - x^2} + \frac{-2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{2(100 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{200 - 4x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$$= \frac{4(50 - x^2)}{\sqrt{100 - x^2}}$$

Per tant tindrem $A'(x) = 0$ quan $50 - x^2 = 0$, és a dir $x^2 = 50$ i $x = \pm\sqrt{50} = \pm 5\sqrt{2} \approx \pm 7'07$

A partir del context de l'enunciat, l'únic candidat és el valor positiu $x = \sqrt{50} = 7'07$ mm. Ara cal comprovar que amb aquest valor l'àrea sigui màxima. Això es comprova veient que per valors propers l'àrea és més petita:

A(7)= 99'980

A$(\sqrt{50}) = 2 \cdot \sqrt{50} \cdot \sqrt{100 - 50} = 2 \cdot \sqrt{50} \cdot \sqrt{50} = 100$

A(7'1)=99.9966

Per tant, el valor de la base petita que fa l'àrea màxima és de $5\sqrt{2} = 7'07$ mm i el valor de l'àrea és 100 mm^2

Observació: Per a la comprovació de la condició de màxim es podria també fer servir, alternativament, el comprovar que la derivada segona de la funció àrea és negativa per al valor $x = \sqrt{50}$.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per l'aplicació del teorema de Pitàgores.
0,25 punts per l'expressió final.

b) 0,25 punts per la formulació de l'àrea del trapezi.
0,25 punts per l'expressió de l'àrea en funció de *x*.
0,5 punts per la derivada de la funció.
0,25 punts pel càlcul del punt singular.
0,5 punts per l'avaluació de la condició de màxim relatiu.
0,25 punts pel càlcul de l'àrea màxima.

12. PAU 2023 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

Resolució:

Si calculem les funcions derivades successives tenim:

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c; \quad f''(x) = 6ax + 2b$

Si anem traduint en termes de *f* i *f'* les condicions de l'enunciat obtenim:

* *f* passa per (1,0) $\rightarrow$ $f(1) = 0$ $\rightarrow$ a + b + c + d = 0 (equació 1)

* (1,0) és un punt d'inflexió $\rightarrow$ $f''(1) = 0 \rightarrow 6a + 2b = 0$ (equació 2)

* El pendent de la tangent en *x = 1* és igual a $-3 \rightarrow f'(1) = -3 \rightarrow$ $3a + 2b + c = -3$ (equació 3)

* *f* té un extrem en $x = 0 \rightarrow f'(0) = 0 \rightarrow$ c = 0 (equació 4)

Resolent el sistema format per les equacions (1), (2), (3) i (4), obtenim la solució al problema $\boxed{a = 1, b = -3, c = 0, d = 2}$.

Pautes de correcció:

0,5 punts per la traducció de cadascuna de les quatre condicions.

0,5 punts per la resolució final del sistema.

13. PAU 2023 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 5

Resolució:

a) El tancat té forma de rectangle. Anomenem x a la base del rectangle i y a l'altura. Sabem que l'àrea del tancat és $8\ m^2$, per tant, podem escriure:

$$x \cdot y = 8$$

Aïllant tenim que $y = \frac{8}{x}$.

El cost del tancat és $C(x, y) = 2{,}5 \cdot (2y + x)$. Substituint obtenim:

$$C(x) = 2{,}5 \cdot \left(2\frac{8}{x} + x\right) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{16 + x^2}{x}\right)$$

Per calcular el cost mínim, calcularem els extrems relatius de la funció $C(x)$, a partir de la primera derivada i igualant-la a 0:

$$C'(x) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{2x \cdot x - (16 + x^2) \cdot 1}{x^2}\right) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{x^2 - 16}{x^2}\right)$$

$$2{,}5 \cdot \left(\frac{x^2 - 16}{x^2}\right) = 0$$

$$x = \pm 4$$

Pel context del problema, només té sentit la solució positiva. Per comprovar si en $x = 4$ hi ha un mínim, calculem la segona derivada i observem el signe:

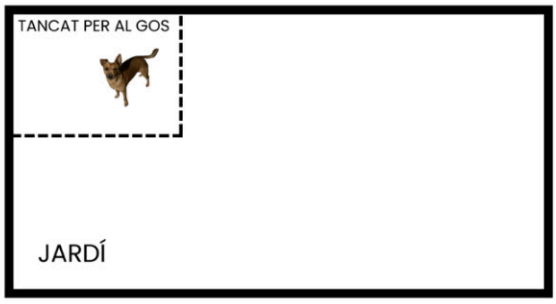
$$C''(x) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{2x \cdot x^2 - (x^2 - 16) \cdot 2x}{x^4}\right) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{2x^3 - (2x^3 - 32x)}{x^4}\right) = 2{,}5 \cdot \frac{32}{x^3}.$$

Com que $C''(4) > 0$, en $x = 4$ hi ha un mínim.

Per tant, les dimensions del tancat seran de $\boxed{4\ m}$ de base i $2\ m$ d'altura.

El cost serà: $C(4) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{16+4^2}{4}\right) = \boxed{20€}$

b) Per estalviar amb la tanca, podem posar el tancat a una cantonada del jardí:



Ara podem reproduir els càlculs fets a l'apartat *a*, amb la nova situació.

En aquest cas, el cost del tancat és $C(x,y) = 2{,}5 \cdot (y + x)$. Com que $y = \frac{8}{x}$:

$$C(x) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{8}{x} + x\right) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{8 + x^2}{x}\right)$$

Calculant la primera derivada i igualant-la a 0:

$$C'(x) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{2x \cdot x - (8 + x^2) \cdot 1}{x^2}\right) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{x^2 - 8}{x^2}\right)$$

$$2{,}5 \cdot \left(\frac{x^2 - 8}{x^2}\right) = 0$$

$$x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$$

Anàlogament, l'única solució que té sentit és la positiva. Per comprovar si en $x = 2\sqrt{2}$ hi ha un mínim, calculem la segona derivada i observem que el seu signe és positiu:

$$C''(x) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{2x \cdot x^2 - (x^2 - 8) \cdot 2x}{x^4}\right) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{2x^3 - (2x^3 - 16x)}{x^4}\right) = 2{,}5 \cdot \frac{16}{x^3}$$

Com que $C''(2\sqrt{2}) > 0$, en $\boxed{x = 2\sqrt{2}}$ hi ha un mínim.

L'altura del tancat serà $\boxed{y = \frac{8}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}}$.

Per tant, el tancat tindrà forma quadrada de costat $2\sqrt{2} \approx 2{,}83\ m$.

En aquest cas el preu mínim serà

$$C(2\sqrt{2}) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{8 + (2\sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}}\right) = 2{,}5 \cdot \frac{16}{\sqrt{8}} = 2{,}5 \cdot 2\sqrt{8} = 14{,}14€$$

Per tant, tindríem un estalvi de 20 –14,14 = 5,86 €

Observació: qualsevol altra argumentació correcta serà considerada vàlida, encara que no es faci servir càlcul diferencial per arribar a la resposta, sempre que s'argumenti amb càlculs matemàtics.

Pautes de correcció:

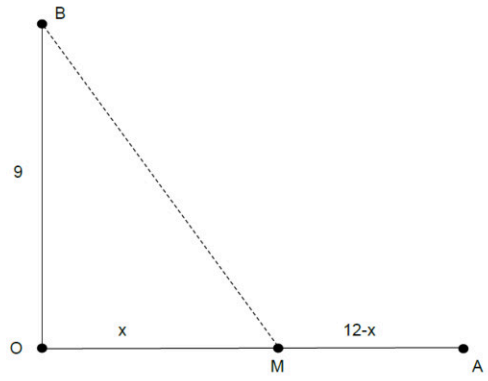
a) 0,25 punts per l'assignació de les variables i la lligadura d'igualtat de l'àrea.
0,25 punts per la funció cost.
0,25 punts per la derivada primera.
0,25 punts per l'abscissa del punt singular.
0,25 punts per argumentar que es tracta d'un mínim.
0,25 punts per les dimensions finals
0,25 punts pel cost mínim.

Observació: a l'hora de trobar el punt singular es pot utilitzar la funció $C(x)$ *o bé la funció* $f(x) = \frac{16+x^2}{x}$.

b) 0,25 punts per situar el tancat correctament i per la funció cost.
0,25 punts per la derivació, punt singular i justificació de mínim.
0,25 punts per les dimensions i el càlcul de l'estalvi.

14. PAU 2023 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 4

Si denotem per x la distància de l'encreuament a la torre, és a dir, $x = d(O, M)$, aleshores obtenim



Pel teorema de Pitàgores veiem que $d(B, M) = \sqrt{81 + x^2}$.

Així doncs el preu del cablejat serà vindrà donat per la funció

$$P(x) = 125(12 - x) + 250\sqrt{81 + x^2}.$$

Per trobar el preu mínim derivem la funció P:

$$P'(x) = -125 + 250 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{81 + x^2}}$$

Resolent $P'(x) = 0$ obtenim $\sqrt{81 + x^2} = 2x$, i elevant les dues bandes al quadrat tenim

$81 + x^2 = 4\,x^2$, que té com a solució real positiva $x = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ km. Per comprovar que és un mínim estudiem el signe de la derivada als intervals $(0,\, 3\sqrt{3})$ i $\left(3\sqrt{3}, 12\right)$. En el primer cas $P'(x) < 0$ i en el segon cas $P'(x) > 0$, per tant deduïm que el mínim de la funció P s'assoleix per a $x = 3\sqrt{3}\ km,$ és a dir, situant la torre a $3\sqrt{3}\ km = 5{,}2\ km$ de l'encreuament.

Pautes de correcció:

0,5 punts pel plantejament del problema.
0,5 punts per determinar la funció cost que cal optimitzar.
0,5 punts pel càlcul de la derivada primera.
0,5 punts per determinar el candidat a mínim.
0,25 punts per justificar que, efectivament, correspon a un mínim.
0,25 punts pel valor del cost mínim.

15. PAU 2023 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 6

a)

La funció derivada de $f(x)$ és $f'(x) = \frac{-x^2+(2a-2b)x+1}{(x^2+1)^2}$

Imposem la condició d'extrem relatiu $f'(-1) = 0 \rightarrow \frac{-1+2b-2a+1}{4} = 0 \rightarrow a = b$

Imposem que la funció passi pel punt $P = \left(-2, \frac{13}{5}\right)$

$$f(-2) = \frac{13}{5} \rightarrow \frac{4a-2+b}{5} = \frac{13}{5} \rightarrow 4a+b = 15$$

D'on es dedueix $a = b = 3$

b)

Per $a = b$ la derivada és $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

Resolem $f'(x) = 0$ per trobar els possibles extrems relatius i obtenim $x = 1$, $x = -1$.

Com que $f'(-2) < 0,\ f'(0) > 0,\ f'(2) < 0$ deduïm que la funció té un mínim relatiu en $x = -1$ i un màxim relatiu en $x = 1$.

a) 0,25 punts pel càlcul de la funció derivada.
0,25 punts per imposar la condició d'extrem i trobar una primera condició pels paràmetres.
0,25 punts per imposar que passi pel punt donat i trobar una segona condició.
0,5 punts per trobar els valors dels paràmetres a i b.

b) 0,25 punts per donar la funció derivada en el cas demanat.
0,5 punts per trobar els dos candidats a extrems.
0,5 punts per donar i justificar on fa un mínim i on fa un màxim.

16. PAU 2022 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 2

a) La funció $f(x)$ és un quocient de polinomis. Per tant, el seu domini seran tots els nombres reals excepte aquells punts que anul·lin el polinomi denominador.

Si resolem $x^2 + x - 2 = 0$, obtenim $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$ i, per tant, el denominador s'anul·la pels valors $x = -2$ i $x = 1$.

Així doncs, tindrem: $\boxed{Dom(f) = (-\infty, -2) \cup (-2,1) \cup (1, +\infty)}$.

Asímptotes verticals: $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1) = 0$

$x = -2 \quad \rightarrow \quad \lim_{x \to -2} f(x) = \frac{9}{0} = \infty \quad \Rightarrow \boxed{f(x) \text{ té asímptota vertical a } x = -2}$

$x = 1 \quad \rightarrow \quad \lim_{x \to 1} f(x) = \frac{9}{0} = \infty \quad \Rightarrow \boxed{f(x) \text{ té asímptota vertical a } x = 1}$

Asímptotes horitzontals:

$$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = \frac{9}{+\infty} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{f(x) \text{ té asímptota horitzontal a } x = 0}$$

Asímptotes obliqües: com que la funció $f(x)$ té asímptota horitzontal, quan $x \to \mp\infty$ aleshores $\boxed{f(x) \text{ no té asímptotes obliqües.}}$

Màxims i mínims relatius: són els punts que anul·len la funció derivada.

$f'(x) = \frac{-9(2x+1)}{(x^2+x-2)^2} \quad f'(x) = 0? \Rightarrow -9(2x + 1) = 0 \Rightarrow 2x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$

Mitjançant el signe de la derivada primera, podem comprovar que a $\boxed{x = -\frac{1}{2}}$ hi ha un $\boxed{\text{màxim relatiu}}$, ja que abans la derivada és positiva $(f'(-1) > 0)$ i després és negativa $(f'(0) < 0)$.

Pel que fa a la monotonia de la funció, atès que la funció té discontinuïtats asimptòtiques, busquem quin signe té la derivada en els diferents intervals de continuïtat:

	$(-\infty, -2)$	$\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$	$(1, +\infty)$
f '	> 0	> 0	< 0	< 0
f	creixent	creixent	decreixent	decreixent

Per tant:

$\boxed{f(x) \text{ és creixent a } (-\infty,-2) \cup \left(-2,-\frac{1}{2}\right).}$

$\boxed{f(x) \text{ és decreixent a } \left(-\frac{1}{2},1\right) \cup (1,+\infty).}$

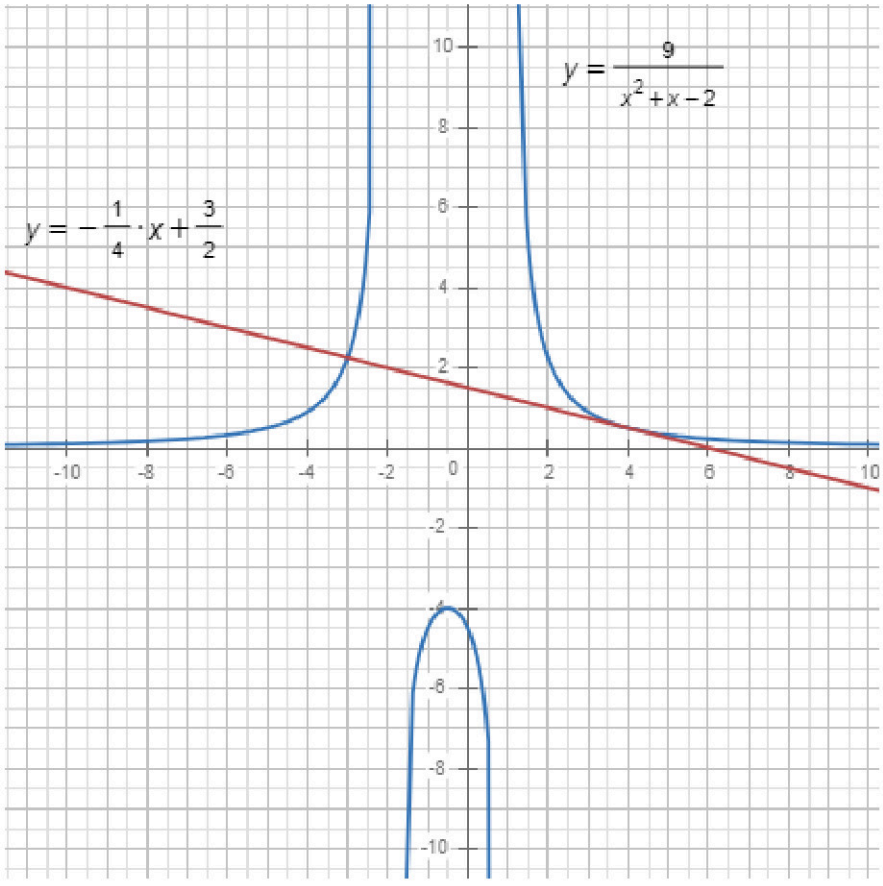
b) Per a calcular l'equació general de la recta tangent a la funció, fem servir la fórmula $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ per al cas $a = 4$.

$f(4) = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$, la recta passa pel punt $(4, \frac{1}{2})$

$f'(4) = \frac{-81}{324} = -\frac{9}{36} = -\frac{1}{4}$

La recta tangent serà $\boxed{y =} -\frac{1}{4}(x-4) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}x + 1 + \frac{1}{2} = \boxed{-\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}}$.

Per a la representació de la funció i de la recta tangent, utilitzem els resultats de l'apartat anterior i es pot complementar amb una petita taula de valors:



Pautes de correcció:

a) 0,25 punts pel domini de la funció.

0,25 punts per les asímptotes verticals.

0,25 punts per les asímptotes horitzontals i obliqües.

0,25 punts per la determinació i la classificació de l'abscissa del màxim relatiu.

0,25 punts pels intervals de creixement i decreixement.

b) 0,25 punts per la formulació de la recta tangent.

0,25 punts pel càlcul de la recta tangent.

0,5 punts per la representació de la gràfica de la funció.

0,25 punts per la representació de la recta tangent.

17. PAU 2022 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 4

a) Per tal que $f(x)$ sigui contínua, com que les dues funcions que defineixen $f(x)$, la logarítmica i la lineal, són contínues en el domini on estan definides respectivament, només ens cal imposar la continuïtat en el valor $x = e$:

$$f(e) = ae + b = \lim_{x \to e} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to e^-} \ln(x) = \ln(e) = 1 \\ \lim\limits_{x \to e^+} (ax + b) = ae + b \end{cases} \Rightarrow ae + b = 1.$$

Per tal que sigui derivable, com que les dues funcions que defineixen la funció $f(x)$, la logarítmica i la lineal, són derivables en el domini on estan definides respectivament, tenim:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \text{ si } x \in (0, e) \\ a \text{ si } x \in (e, 4) \end{cases}.$$

Per tant, només ens cal imposar la derivabilitat a $x = e$.

$$f'(e) = \lim_{x \to e} f'(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to e^-} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \\ \lim\limits_{x \to e^+} a = a \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{e}}.$$

I com que $ae + b = 1 \Rightarrow \frac{1}{e} \cdot e + b = 1 \Rightarrow \boxed{b = 0}$.

b) Busquem primer la integral indefinida $\int \frac{x^3}{9x^4+1} dx$.

Multiplicant i dividint adequadament, podem tenir al numerador la funció derivada de la funció que hi ha al denominador:

$$\int \frac{x^3}{9x^4 + 1} dx = \frac{1}{36} \int \frac{36x^3}{9x^4 + 1} dx = \frac{1}{36} \ln(9x^4 + 1) + k.$$

Així que la funció $g(x)$ serà de la forma $g(x) = \frac{1}{36} \ln(9x^4 + 1) + k$.

Finalment, per a trobar k, apliquem que la funció que busquem ha de passar pel punt $(0, -1)$.

$$g(0) = \frac{1}{36} \ln(9 \cdot 0^4 + 1) + k = \frac{1}{36} \ln(1) + k = 0 + k = k$$

Per tant, tenim que, si $g(0) = -1$, aleshores $k = -1$.

Així, $\boxed{g(x) = \frac{1}{36} \ln(9x^4 + 1) - 1}$.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per l'argument de continuïtat a partir de les funcions que hi intervenen.

0,25 punts per l'equació de continuïtat.

0,25 punts per l'argument de derivabilitat a partir de les funcions que hi intervenen.

0,25 punts per l'equació de derivabilitat.

0,25 punts pels valors de a i de b.

b) 0,25 punts pel plantejament del càlcul de la primitiva.

0,5 punts pel càlcul de la integral indefinida.

0,5 punts pel càlcul de la constant d'integració.

18. PAU 2022 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 6

a)

Considerem els tres punts de la imatge: $A = (2, 0, 2)$, $B = (0, 2, 1)$ i $C = (0, 0, h)$.

$$d(A, C) = \sqrt{2^2 + (2-h)^2} = \sqrt{4 + 4 - 4h + h^2} = \sqrt{h^2 - 4h + 8}$$

$$d(B, C) = \sqrt{2^2 + (1-h)^2} = \sqrt{4 + 1 - 2h + h^2} = \sqrt{h^2 - 2h + 5}$$

Per tant, efectivament, $\boxed{L(h) = \sqrt{h^2 - 4h + 8} + \sqrt{h^2 - 2h + 5}}$.

b)

Per a trobar el valor mínim, derivem la funció $L(h)$ i en trobem els punts singulars:

$$L'(h) = \frac{2h-4}{2\sqrt{h^2-4h+8}} + \frac{2h-2}{2\sqrt{h^2-2h+5}} = \frac{h-2}{\sqrt{h^2-4h+8}} + \frac{h-1}{\sqrt{h^2-2h+5}}.$$

Quan fem $L'(h) = 0$: $\frac{h-2}{\sqrt{h^2-4h+8}} + \frac{h-1}{\sqrt{h^2-2h+5}} = 0$

$\frac{h-2}{\sqrt{h^2-4h+8}} = -\frac{h-1}{\sqrt{h^2-2h+5}} \Rightarrow (h-2)\sqrt{h^2-2h+5} = -(h-1)\sqrt{h^2-4h+8}$

Si elevem els dos termes de la igualtat al quadrat, obtenim:

$$(h-2)^2(h^2-2h+5) = (h-1)^2(h^2-4h+8)$$

D'on:

$$(h^2-4h+4)(h^2-2h+5) = (h^2-2h+1)(h^2-4h+8)$$

$$h^4 - 2h^3 + 5h^2 - 4h^3 + 8h^2 - 20h + 4h^2 - 8h + 20 =$$

$$= h^4 - 4h^3 + 8h^2 - 2h^3 + 8h^2 - 16h + h^2 - 4h + 8$$

Operant, obtenim $8h = 12$ i, per tant, $h = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$.

Per a comprovar que aquest valor correspon al mínim, n'hi ha prou observant el signe de la derivada abans i després d'aquest valor dins del domini del context de la funció. Per exemple, podem verificar que la derivada és negativa abans d'aquest valor, per exemple per a $x = 1$, $(L'(1) = -\frac{1}{\sqrt{5}} < 0)$, i positiva després d'aquest valor, per exemple, per a $x = 2$, $(L'(2) = \frac{1}{\sqrt{5}} > 0)$.

Per tant, la longitud mínima del cable s'aconsegueix quan $\boxed{C = (0,0,\frac{3}{2})}$.

I la longitud mínima serà:

$$\boxed{L\left(\frac{3}{2}\right) =} \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{3}{2}\right) + 8} + \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{3}{2}\right) + 5} = \sqrt{\frac{9}{4} - 6 + 8} + \sqrt{\frac{9}{4} - 3 + 5}$$

$$= \sqrt{\frac{9}{4} + 2} + \sqrt{\frac{9}{4} + 2} = 2\sqrt{\frac{17}{4}} = \boxed{\sqrt{17}\ \text{unitats de longitud}}.$$

a) 0,25 punts per l'expressió d'una de les distàncies.

0,25 punts per l'expressió de l'altra distància.

0,25 punts per l'expressió final $L(h)$.

b) 0,5 punts per la derivada de la funció $L(h)$.

0,5 punts pel càlcul del valor singular i el punt C.

0,25 punts per la classificació del valor singular com a mínim.

0,5 punts pel càlcul de la longitud mínima.

19. PAU 2022 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 6

Resolució:

a)

L'àrea del trapezi és $A = \frac{3x}{2} \cdot h$ i utilitzant que l'àrea fa 30 m^2 obtenim $\boxed{h = \frac{20}{x}}$.

Observem que podem descomposar el trapezi en un rectangle de base x i altura h i un triangle rectangle d'hipotenusa D i catets x i h. Ara només cal aplicar el teorema de Pitàgores a aquest triangle per obtenir $\boxed{D(x) = \sqrt{\frac{400}{x^2} + x^2}}$.

b)

Per minimitzar la funció $D(x)$ derivem obtenint

$$D'(x) = \frac{\frac{-800}{x^3} + 2x}{2 \cdot \sqrt{\frac{400}{x^2} + x^2}} = \frac{\frac{-400}{x^3} + x}{\sqrt{\frac{400}{x^2} + x^2}}$$

Resolem ara l'equació $D'(x) = 0$ o equivalentment $\frac{-400}{x^3} + x = 0$ i obtenim $x^4 = 400$ i, tenint en compte que només podem prendre les solucions positives, l'únic candidat a extrem és $x = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Ara podem observar que en l'interval $(0{,}2\sqrt{5})$ tenim $D'(x) < 0$ i, per tant, D és decreixent i que a l'interval $(2\sqrt{5}, +\infty)$ tenim $D'(x) > 0$ i, per tant, D és creixent, i, per tant, en $x = 2\sqrt{5}$ hi ha un mínim.

Així les dimensions que fan el costat oblic mínim són

$\boxed{x = h = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\ m \ \text{ i } D = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}\ m}$.

Observació: Per al càlcul del punt singular, també es pot procedir a derivar la funció $D^2(x) = \frac{400}{x^2} + x^2$, sempre que s'argumenti que tindrà localitzats els extrems en els mateixos valors de les abscisses.

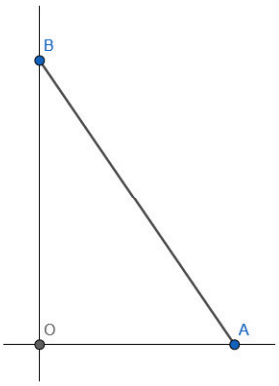
Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per justificar la relació entre l'altura i la base superior del trapezi.
0,25 punts pel plantejament per trobar la segona relació.
0,25 punts per aplicar correctament el teorema de Pitàgores.
0,25 punts per justificar la relació entre el costat D i la base superior del trapezi.

b) 0,5 punts per la derivada de $D(x)$.
0,25 punts per trobar el punt crític.
0,25 punts per justificar que el punt crític correspon a un mínim.
0,5 punts per donar els valors de h, x i D.

20. PAU 2022 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 4

a)



Sabem que $x + y = 10$

Per tant, $y = 10 - x$

$\text{Àrea} = \boxed{A(x) =} \dfrac{x(10-x)}{2} = \boxed{\dfrac{10x - x^2}{2}}$

$A'(x) = \dfrac{10 - 2x}{2} = 5 - x$

$A''(x) = -1$

$A' = 0$ quan $x = 5$. $A''(5) = -1 < 0$. Per tant, l'àrea és màxima quan $\boxed{x = 5}$.

En aquest cas l'àrea màxima és

$\boxed{A(5) = 25/2}$ unitats de superfície.

b)

Sabem que $x + y = 10$

Per tant, $y = 10 - x$

$hipotenusa = \boxed{H(x) =} \sqrt{x^2 + (10-x)^2} = \boxed{\sqrt{2x^2 - 20x + 100}}$

$H'(x) = \frac{4x-20}{2\sqrt{2x^2-20x+100}} = \frac{2x-10}{\sqrt{2x^2-20x+100}}$

$H'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x - 10}{\sqrt{2x^2 - 20x + 100}} = 0 \Leftrightarrow 2x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 5$

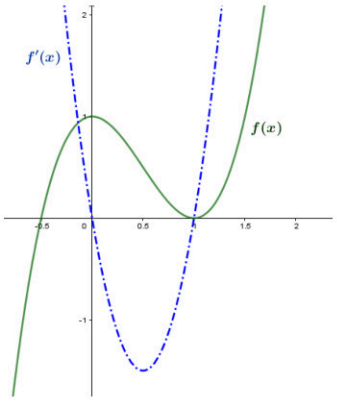
$$H''(x)=\frac{2\sqrt{2x^2-20x+100}-(2x-10)\frac{4x-20}{2\sqrt{2x^2-20x+100}}}{2x^2-20x+100}=\frac{2\left(2x^2-20x+100\right)-(2x-10)^2}{\sqrt{(2x^2-20x+100)^3}}=\frac{100}{\sqrt{(2x^2-20x+100)^3}}$$

$H''(5)>0$ per tant la funció hipotenusa té un mínim quan $x=5$.

El valor mínim de la hipotenusa serà $H(5)=5\sqrt{2}$ unitats de longitud.

Observació: L'estudiant també pot optar, de forma justificada, per fer mínima la funció $f(x)=2x^2-20x+100$, prescindint de l'arrel quadrada, fet que simplifica els càlculs. Això és possible atès que la funció arrel quadrada es monòtona creixent, de manera que no es modifiquen els valors de les abscisses on s'assoleixen els màxims i mínims de la funció.

21. PAU 2021 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 4



- La funció derivada passa pels punts $(0,0)$ i $(1,0)$ perquè són els punts on $f(x)$ presenta els extrems relatius.
- $f(x)$ és creixent quan $x < 0$ i quan $x > 1$ per tant la funció derivada és positiva en aquestes dues semirectes.
- $f(x)$ és decreixent quan $0 < x < 1$ per tant, en aquest interval la derivada és negativa.
- La funció $f(x)$ té un punt d'inflexió en un punt proper a $x = \frac{1}{2}$ que coincidirà amb un mínim en la funció derivada.

b)

Imposem que $g'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$ i que $g''\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

- $g(x) = ax^3 + bx^2 + 1 \rightarrow g'(x) = 3ax^2 + 2bx \rightarrow 3a\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2b\frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \rightarrow 3a + 4b = -6$
- $g''(x) = 6ax + 2b \rightarrow 6a\frac{1}{2} + 2b = 0 \rightarrow 3a + 2b = 0$

D'aquestes dues equacions

$$\begin{cases} 3a + 4b = -6 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases}$$

es dedueix que $a = 2$ i $b = -3$

Pautes de correcció:

a) 0,5 punts per la gràfica de la funció derivada

0,25 punts per observar que als extrems relatius la derivada s'anul·la

0,25 punts per observar el signe de la derivada segons el creixement i el decreixement

0,25 punts per observar que el mínim de la funció derivada coincideix amb el punt d'inflexió

b) 0,25 punts per la primera derivada

0,25 punts per la segona derivada

0,25 punts per la condició en la primera derivada

0,25 punts per la condició en la segona derivada

0,25 punts per trobar els valors de a i de b.

Per trobar els punts crítics, calculem la primera derivada i la igualem a zero:

$f'(x) = \frac{3x^2(x-2)-x^3}{(x-2)^2} = \frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2} = 0 \to x = 0$ o bé $x = 3$

Tenim dos punts crítics $x = 0$ i $x = 3$. Classifiquem-los a partir del signe de la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2} = \begin{cases} \geq 0 & \text{si } x \geq 3 \\ < 0 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

Així per $x < 3$ la funció és decreixent i per $x > 3$ la funció és creixent. Cal tenir en compte que per $x = 2$ la funció no està definida. Així la funció és decreixement en: $(-\infty, 2) \cup (2,3)$ i és creixent en $(3, +\infty)$. Si es considera monotonia estricta caldria excloure també $x = 0$.

Com que en un entorn de $x = 0$ la funció és decreixent i és un punt crític, es tracta d'un punt d'inflexió.

En canvi per $x < 3$ la funció és decreixent i per $x > 3$ la funció és creixent, per tant, en $x = 3$ fa un mínim relatiu.

b)

La funció és continua en l'interval $(-2,1)$ ja que és un quocient de polinomis, que són funcions contínues i el denominador no s'anul·la. Avaluem la funció en els extrems de l'interval:

$f(-2) = \frac{-8}{-4} = 2 > 0$ i $f(1) = \frac{1}{-1} = -1 < 0$

Pel teorema de Bolzano podem afirmar que f té com a mínim un zero en l'interval $(-2,1)$. Com que la funció és estrictament monòtona en aquest interval, només té un zero dins d'aquest interval. De fet, és fàcil veure que $f(0) = 0$.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per la primera derivada

0,25 punts pels punts crítics.

0,5 punts pels intervals de creixement i decreixement.

0,25 punts per justificar el punt d'inflexió

0,25 punts per justificar el mínim relatiu.

b) 0,25 punts pel comprovar les hipòtesis del teorema de Bolzano

0,25 punts per avaluar la funció en els extrems de l'interval

0,25 punts per afirmar que la funció té un zero

0,25 punts per justificar que el zero és únic.

23. PAU 2021 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 1

[1,25 punts]

a)

[1,25 punts]

L'equació de la recta tangent en el punt de la paràbola $\big(a, f(a)\big) = (a, 4 - a^2)$ és:

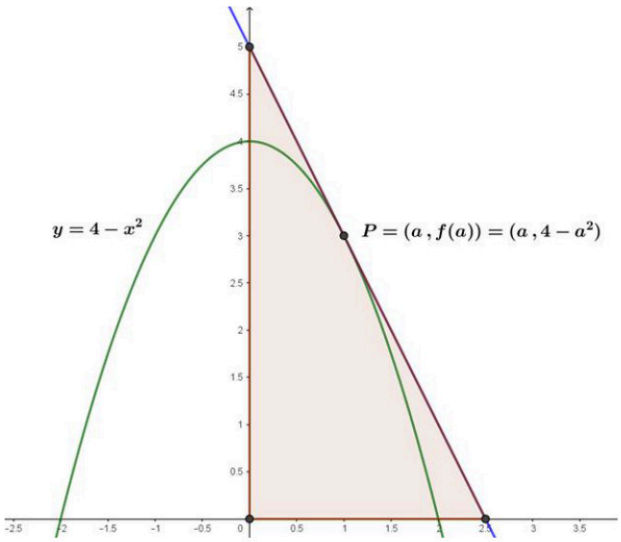
$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

Calculem la derivada i l'avaluem en $x = a$:

$f(x) = 4 - x^2 \rightarrow f'(x) = -2x \rightarrow f'(a) = -2a.$

La recta tangent a la paràbola és:

$$y - (4 - a^2) = -2a \cdot (x - a) \rightarrow\ y = -2ax + 2a^2 + 4 - a^2\ \rightarrow y = -2ax + a^2 + 4$$



Calculem el punt de tall amb l'eix OX $(y = 0)$:

$0 = -2ax + a^2 + 4;\ x = \frac{a^2+4}{2a}$

Tenim el punt $\left(\frac{a^2+4}{2a}, 0\right)$.

El punt de tall amb l'eix OY $(x = 0)$ és:

$$y = a^2 + 4$$

I tenim el punt $(0, a^2 + 4)$.

b)

[1,25 punts]

El triangle té vèrtexs en els punts $(0,0)$, $\left(\frac{a^2+4}{2a}, 0\right)$ i $(0, a^2+4)$, per tant, és un triangle rectangle de base $\frac{a^2+4}{2a}$ i altura a^2+4. La seva àrea és:

$$S(a) = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2+4}{2a}\right)(a^2+4) = \frac{(a^2+4)^2}{4a}$$

Derivem i igualem a zero:

$$S'(a) = \frac{(a^2+4)\cdot(3a^2-4)}{4a^2}, \quad S'(a) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ a = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Rebutgem la solució $a = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ ja que a ha de ser positiu, per tant, el valor buscat és $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$, que serà un mínim ja que:

$$S'(a) = \begin{cases} < 0 \text{ si } 0 < a < \frac{2\sqrt{3}}{3} \rightarrow S \text{ és decreixent per a } a < \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \geq 0 \text{ si } a \geq \frac{2\sqrt{3}}{3} \rightarrow S \text{ és creixent per a } a > \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts pel plantejament, on s'indiqui que la recta tangent té pendent $f'(a)$.

0,5 punts per l'expressió de la recta tangent.

0,25 punts pel punt de tall amb l'eix d'abscisses.

0,25 punts pel punt de tall amb l'eix d'ordenades.

Tot i que cal donar les dues coordenades dels punts de tall, en cas de no donar la coordenada 0, no es penalitza.

b) 0,25 punts per la funció àrea.

0,5 punts per la derivada primera.

0,25 punts pel valor de a on s'assoleix el mínim.

0,25 punts per comprovar que és mínim relatiu.

Es considera correcta si es dona la solució sense racionalitzar.

24. PAU 2021 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 4

[2,5 punts]

a)

aplicant el teorema de Pitàgores $x^2 + y^2 = d^2$, i per tant $y^2 = d^2 - x^2$.

En substituir a la resistència *R* obtenim $\boxed{R = kxy^2 = kx(d^2 - x^2)}$

b)

Per trobar la resistència màxima derivem i igualem a 0:

$$R' = k\big((d^2 - x^2) + x(-2x)\big) = k(d^2 - 3x^2) = 0,$$

Per tant $\boxed{x = \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{d\sqrt{3}}{3}}$, i $\boxed{y = \sqrt{d^2 - x^2} = \frac{d\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{d\sqrt{6}}{3}}$, es tracta d'un màxim atès que $R'' = -6kx$

$$\mathrm{R}''\left(\frac{d\sqrt{3}}{3}\right) = -6k\frac{d\sqrt{3}}{3} < 0.$$

Per trobar la resistència d'aquesta biga cal substituir els valors de x, y:

$$\boxed{R_{max} = k\frac{d\sqrt{3}}{3}\left(\frac{d\sqrt{6}}{3}\right)^2 = kd^3\frac{2\sqrt{3}}{9}}$$

Pautes de correcció:

a)

0,75 punts per l'aplicació del Teorema de Pitàgores.

0,5 punts pel l'expressió final de R.

b)

0,25 punts per la funció derivada.

0,25 punts pel càlcul de l'abscissa del punt singular.

0,25 punts per la justificació de la condició de màxim.

0,25 punts per la segona dimensió i la resistència màxima final.

25. PAU 2021 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 6

[2,5 punts]

a)

Com que té un extrem relatiu en $x = -3$ i en $x = 1$, sabem que $f\,'(-3) = f\,'(1) = 0$.

$f\,'(x) = 6x^2 + 2mx + n$. Aleshores tenim que:

$f\,'(-3) = 54 - 6m + n = 0$

$f\,'(1) = 6 + 2m + n = 0$.

Resolent el sistema, obtenim que $\boxed{m = 6}$ i que $\boxed{n = -18}$.

D'aquesta manera sabem que $f(x) = 2x3 + 6x2 - 18x + p$.

Per a trobar la *p*, utilitzarem que $f(3) = 4$.

Per tant, $f(3) = 54 + 54 - 54 + p = 4$.

Aleshores, $\boxed{p = -50}$.

b)

Calculem $f\,'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2}$ i obtenim que per $x = -3$, $f\,'(-3) = -2/4 = -1/2$ que serà el pendent de la recta tangent.

Ara busquem el punt per on passarà que serà $(-3, f(-3)) = (-3, -2)$.

La recta tangent serà $y + 2 = -1/2\,(x + 3)$. L'equació serà $\boxed{y = -x/2 - 7/2}$

Pautes de correcció:

a)

0,25 punts per la funció derivada.

0,25 punts pel plantejament del sistema.

0,25 punts pel càlcul de *m*.

0,25 punts pel càlcul de *n*.

0,25 punts pel càlcul de *p*.

b)

0,25 punts per la funció derivada.

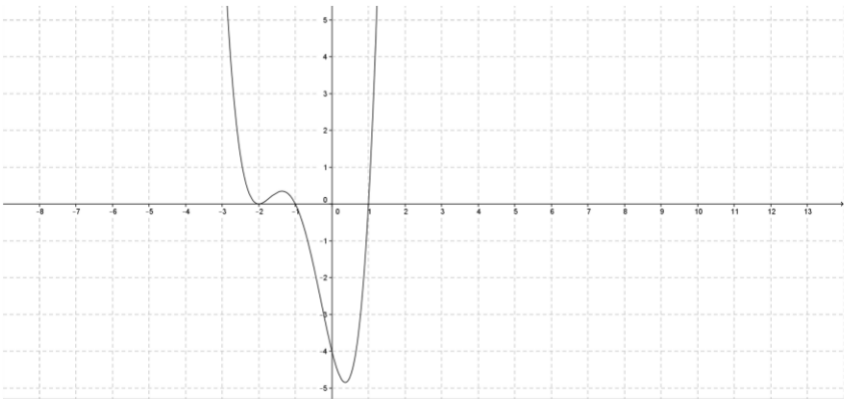
0,25 punts pel pendent de la recta tangent.

0,5 punts per les coordenades del punt de tangència (abscissa i ordenada)

0,25 punts per l'equació de la recta tangent.

26. PAU 2020 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 3

3. Sigui $f(x)$ una funció derivable la gràfica de la qual passa pel punt (0, 1). La gràfica de la seva derivada, $f'(x)$, és la que es mostra en la figura.



a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en el punt de la gràfica d'abscissa $x = 0$.
[1,25 punts]

b) Trobeu les abscisses dels punts singulars de la funció $f(x)$ i classifiqueu-los.
[1,25 punts]

Resolució:

a) L'equació de la recta tangent en $x = 0$ és $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.

Mirant la gràfica de $f'(x)$ podem veure que $f'(0) = -4$ i l'enunciat ens indica que $f(0) = 1$ ja que $f(x)$ passa pel punt $(0,1)$. Per tant, l'equació de la recta tangent a la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 0$ és $y = -4(x - 0) + 1$ o, el que és el mateix, $\boxed{y = -4x + 1}$.

b) Els punts singulars són aquells on s'anul·la la derivada; per tant, només cal veure els punts de tall de $f'(x)$ amb l'eix d'abscisses, és a dir, les x que compleixen que $f'(x) = 0$.

Observant la gràfica de $f'(x)$ observem que $f'(-2) = 0, f'(-1) = 0$ i $f'(1) = 0$. Així tenim que $f(x)$ presenta punts singulars en $\boxed{x = -2, x = -1 \text{ i } x = 1}$.

Ara només cal classificar-los.

Observem que en $x = -2$, la recta tangent a la funció derivada és horitzontal, és a dir, que $f''(-2) = 0$ i, per tant, $x = -2$ és una abscissa candidata a presentar una inflexió. Donat que $f'(x) > 0$ en l' interval $(-\infty, -2)$ i també $(-2, -1)$, això implica que $f(x)$ és creixent en aquests intervals. Per altra banda, abans de -2 la

funció derivada es decreixent, és a dir, amb derivada negativa (o sigui $f''(x) < 0$) i després de -2 la funció derivada és creixent, és a dir, amb derivada positiva (o sigui $f''(x) > 0$). Això indica que en el punt $x = -2$ hi ha efectivament un canvi de concavitat i, per tant, en $x = -2$ la funció $f(x)$ presenta un punt d'inflexió de tangent horitzontal.

Donat que $f'(x) > 0$ en l' interval $(-2, -1)$ i $f'(x) < 0$ a $(-1,1)$, ens indica que $f(x)$ és creixent a l'interval $(-2, -1)$ i és decreixent a $(-1,1)$, motiu pel qual podem concloure que en $x = -1$ la funció $f(x)$ presenta un màxim relatiu.

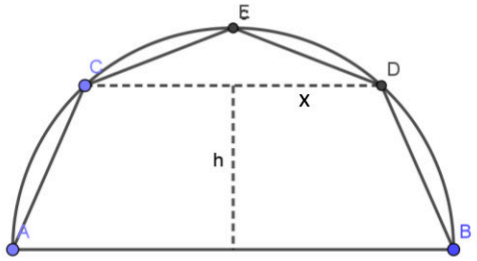
Finalment, en el punt d'abscissa $x = 1$ $f(x)$ presenta un mínim relatiu ja que $f(x)$ és decreixent a l'interval $(-1,1)$, atès que $f'(x) < 0$ en aquest interval, i $f(x)$ és creixent a $(1, +\infty)$ atès que $f'(x) > 0$ en aquest interval

$x = -2$ Punt d'inflexió amb recta tangent horitzontal
$x = -1$ màxim relatiu
$x = 1$ mínim relatiu

a) 0,25 punts per la fórmula de la recta tangent.
   0,25 punts per la identificació del pendent.
   0,25 punts per la identificació de l'ordenada.
   0,25 punts per la substitució en l'expressió de la recta tangent.
   0,25 punts per l'expressió final de la recta tangent.
b) 0,25 punts per la identificació de les tres abscisses.
   0,5 punts per la classificació justificada de la inflexió.
   0,25 punts per la classificació justificada del màxim relatiu.
   0,25 punts per la classificació justificada del mínim relatiu.

27. PAU 2020 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 5

5. Una empresa està treballant en el disseny d'unes càpsules de cafè. L'empresa ha construït la secció transversal de les càpsules inscrivint-la en una semicircumferència de radi 1, traçant una corda CD paral·lela al diàmetre AB i incorporant el punt E en el punt mitjà de l'arc CD. D'aquesta manera queda traçat el pentàgon ACEDB, tal com es mostra en la figura.



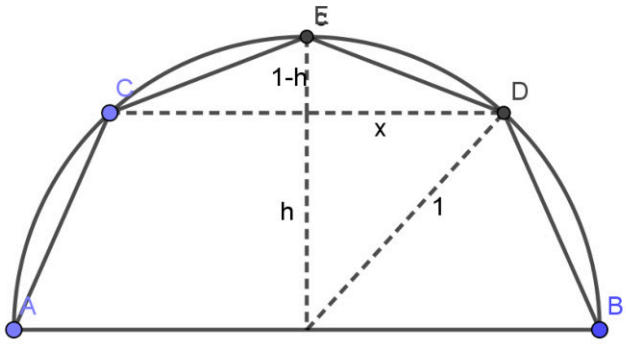
a) Expresseu en funció de x i h l'àrea del pentàgon ACEDB.
[1,25 punts]

b) Quina ha de ser la distància (indicada a la figura per h) a què s'ha de situar la corda CD de AB per tal que l'àrea del pentàgon ACEDB sigui màxima?
[1,25 punts]

Resolució:

a) Si anomenem x a la meitat de la longitud de la corda CD, aleshores tenim que

$$x = \sqrt{1^2 - h^2}$$



L'àrea del pentàgon és l'àrea del trapezi ACDB més l'àrea del triangle CED.

$$\boxed{A(h,x)} = \frac{(2x+2)\cdot h}{2} + \frac{2x\cdot(1-h)}{2} = (x+1)\cdot h + x(1-h) \boxed{= h + x}$$

b) Formuleu l'àrea en termes només h.

Com que $x = \sqrt{1^2 - h^2}$, tenim que $A(h) = h + \sqrt{1-h^2}$.

Ara cal calcular i resoldre $A'(h) = 0$.

$$A'(h) = 1 + \frac{-2h}{2\sqrt{1-h^2}} = 1 - \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} = 0.$$

Tenim que $1 = \frac{h}{\sqrt{1-h^2}}$; $\sqrt{1-h^2} = h$, $h^2 = 1/2$ i per tant $h = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (considerem només la solució positiva pel context del problema).

Mirant el signe de la derivada $A'(h)$ a l'entorn del punt singular $h = \frac{\sqrt{2}}{2}$ podem classificar el punt singular.

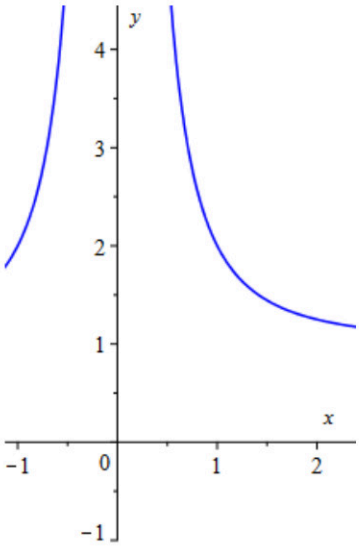
Com que $A'(0{,}5) = 0{,}4226 > 0$ i $A'(0.8) = -0.333 < 0$, la funció àrea creix abans i decreix després del punt singular, és a dir, que hi ha un màxim en $h = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Per tant, la corda s'ha de situar a distància $\frac{\sqrt{2}}{2}$, perquè l'àrea sigui màxima.

a) 0,25 punts per la representació gràfica.
   0,25 punts per la relació entre *x* i *h*.
   0,25 punts per l'expressió de la part trapezoidal.
   0,25 punts per l'expressió de la part triangular.
   0,25 punts per l'expressió final de la funció àrea en dos paràmetres (*x* i *h*).
b) 0,25 punts per l'expressió de la funció àrea a maximitzar, amb un sol paràmetre (*h*).
   0,25 punts per la funció derivada.
   0,25 punts pel punt singular.
   0,5 punts per la comprovació de màxim.

28. PAU 2020 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

1. Tracem la recta tangent a la funció $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$ per un punt $P = (a, f(a))$ del primer quadrant. Aquesta recta juntament amb els eixos de coordenades formen un triangle.



a) Comproveu que l'àrea d'aquest triangle, en funció d'a,ve donada per la funció

$$g(a) = \frac{(a^2+3)^2}{4a}.$$

[1,25 punts]

b) En quin punt *P* l'àrea del triangle és mínima? Calculeu aquest valor mínim.
[1,25 punts]

Resolució:

a) La recta tangent a $y = f(x)$ en el punt d'abscisses $x = a$ és

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Com que $f'(x) = \frac{-2}{x^3}$, l'equació de la recta tangent és

$$y = \frac{-2}{a^3}(x - a) + \frac{1}{a^2} + 1 \to y = \frac{-2}{a^3}x + \frac{a^2+3}{a^2}.$$

Els vèrtexs del triangle seran l'origen de coordenades i els talls de la recta tangent amb els eixos, que són:

Tall amb $x = 0 \to y = \frac{a^2+3}{a^2} \to \left(0, \frac{a^2+3}{a^2}\right)$

Tall amb $y = 0 \to 0 = \frac{-2}{a^3}x + \frac{a^2+3}{a^2} \to x = \frac{a(a^2+3)}{2} \to \left(\frac{a(a^2+3)}{2}, 0\right)$

Així, l'àrea del triangle serà $g(a) = \frac{1}{2}\frac{a^2+3}{a^2}\frac{a(a^2+3)}{2} = \boxed{\frac{(a^2+3)^2}{4a}}$

b) Calculem els punts singulars de la funció $g(a)$ igualant la seva derivada a zero:

$$g'(a) = \frac{2(a^2+3)\cdot 2a\cdot 4a - (a^2+3)^2\cdot 4}{(4a)^2} = \frac{4(a^2+3)(\dots)}{16a^2} = \dots = \frac{3(a^2+3)(a^2-1)}{4a^2} = 0,$$

$a^2 = 1 \to a = \pm 1$ Prenem però només $a = 1$ ja que el punt *P* és al primer quadrant.
Així el punt *P* té coordenades $(1, f(1)) = \boxed{(1,2)}$.

Es comprova que l'àrea és mínima perquè el signe de la funció g' (que és el de la part $(a^2 - 1)$ perquè la resta de termes són positius) canvia en $a = 1$:
a l'esquerra (per exemple, $x = 0{,}9$) és negatiu (i, per tant, la funció *g* és decreixent),
a la dreta (per exemple, $x = 1{,}1$) és positiu, (i, per tant, la funció g és creixent).
El valor de l'àrea mínima és $g(1) = \frac{(1+3)^2}{4} = \boxed{4\ u^2}$

a) 0,25 punts pel plantejament.
0,25 punts per l'expressió de la recta tangent.
0,25 punts pels punts de tall amb l'eix OX.
0,25 punts pels punts de tall amb l'eix OY.
0,25 punts per la funció àrea.

b) 0,5 punts per la derivada primera.
0,25 punts pel valor mínim i el punt P.
0,25 punts per comprovar que és mínim relatiu.
0,25 punts pel valor de l'àrea.

29. PAU 2020 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4

4. Considereu la funció $f(x) = \frac{ax^2+b}{x}$ en què a i b són dos paràmetres reals. Calculeu els valors de a i b de manera que la funció $f(x)$ tingui una asímptota obliqua de pendent 1 i un mínim en el punt de la gràfica amb abscissa $x = 2$
[2,5 punts]

Resolució:

Plantegem el límit per calcular el pendent de l'asímptota obliqua i l'igualem a 1:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+b}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \left(a + \frac{b}{x^2}\right) = \boxed{a = 1}$$

Així, la funció serà $f(x) = \frac{x^2+b}{x}$.

Perquè tingui un mínim en el punt d'abscissa $x = 2$, cal que la derivada s'anul·li en aquest punt:

$$f'(x) = \frac{2x^2-(x^2+b)}{x^2} = \frac{x^2-b}{x^2} \to f'(2) = \frac{4-b}{4} = 0 \to \boxed{b = 4}.$$

Finalment, confirmem que es tracta d'un mínim en $x = 2$ ja que:

$$f'(x) = \frac{x^2-4}{x^2} \begin{cases} > 0 & \text{si } x < -2 \to f \text{ creixent} \\ \leq 0 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \to f \text{ decreixent} \\ > 0 & \text{si } x > 2 \to f \text{ creixent} \end{cases}$$

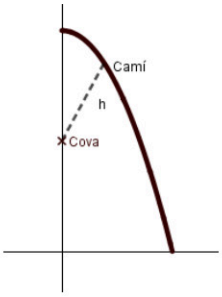
I, per tant, en el punt d'abscissa $x = 2$, la funció passa de decreixent a creixent i, per tant, presenta un mínim.

Pautes de correcció:

0,5 punts pel plantejament de límit per al pendent de l'A.O.
0,5 punts pel càlcul del valor de a.
0,5 punts per la derivada.
0,5 punts pel valor de b.
0,5 punts per justificar que és un mínim.

30. PAU 2020 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 2

2. S'han trobat unes pintures rupestres en una cova situada en una zona molt pedregosa. Hi ha un camí que voreja parcialment la cova format per l'arc de corba $y = 4 - x^2$ d'extrems (0, 4) i (2, 0). La cova està situada en el punt de coordenades (0, 2), tal com es mostra en la figura, i es vol habilitar un accés rectilini des del camí a la cova que sigui el més curt possible.

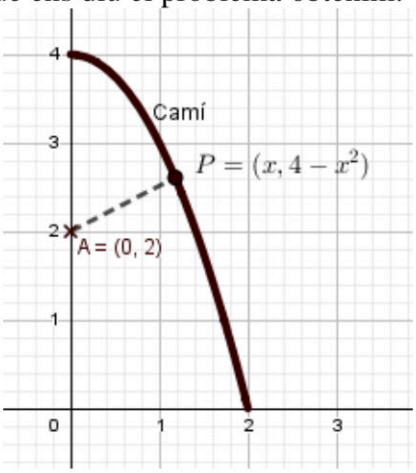


a) Identifiqueu a la gràfica de la figura les coordenades de la cova i del punt del camí des d'on es vol habilitar l'accés. Comproveu que la funció $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$ calcula la distància des de cada punt del camí a la cova.
[1,25 punts]

b) Calculeu les coordenades del punt del camí que queda més a prop de la cova i digueu quina serà la longitud de l'accés *d*.
[1,25 punts]

Resolució:

a) Quan posem la graella de valors que ens diu el problema obtenim:



Els punts del camí tenen coordenades $P = (x, 4 - x^2)$. La distància entre $A = (0, 2)$ i qualsevol punt del camí és:

$$d(A,P) = \sqrt{x^2 + (4 - x^2 - 2)^2}$$
$$= \sqrt{x^2 + (2 - x^2)^2}$$
$$= \boxed{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}}$$

b) Per a resoldre aquest problema d'optimització necessitem saber els candidats a màxim i mínim, que han de ser punts en què s'anul.li la funció derivada.

Calculem f'(x).

$f'(x) = \frac{4x^3 - 6x}{2\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}} = \frac{x(2x^2 - 3)}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}}$ .Igualem la derivada a zero per trobar els possibles extrems de f(x).

$x(2x^2 - 3) = 0 \rightarrow x = 0; x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ del que només agafem les solucions positves.

Esbrinem ara quin són els mínims:

	$\left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$
$f'(x)$	<0	0	>0
$f(x)$	decreixent	mínim	creixent

També es pot raonar que com que $x^4 - 3x^2 + 4$ és sempre positiu els mínims de f(x) estan en els mateixos punts que els mínims de $(f(x))^2 = g(x) = x^4 - 3x^2 + 4$ i per tant:

$$g'(x) = 4x^3 - 6x; g'(x) = 0 \Rightarrow 2x(2x^2 - 3) \Rightarrow x = 0 \; o \; x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

D'aquestes solucions només considerem, pel context del problema, les positives.

Comprovem quins són els màxims i quins els mínims.

$$g''(x) = 12x^2 - 6$$

$g''(0) = -6 < 0 \Rightarrow$ En x=0 hi ha un màxim

$g''\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 12 \cdot \frac{3}{2} - 6 = 12 > 0 \Rightarrow$ En $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ hi ha un mínim.

Per tant el punt del camí que minimitza la distància del camí a la cova és

$$\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \; 4 - \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2\right) = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 4 - \frac{3}{2}\right) = \boxed{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right)}$$

La longitud mínima del camí serà:

$$f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^4 - 3\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + 4} = \sqrt{\frac{9}{4} - 3\frac{3}{2} + 4} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{7}}{2} \; u}$$

a) 0,5 punts per la identificació a la figura.
   0,5 punts per la primera expressió de la distància.
   0,25 punts per l'expressio final de la distància.
b) 0,25 punts per la derivada primera.
   0,25 punts per l'abscissa del punt
   0,25 punts per la comprovació de mínim.
   0,25 punts per les coordenades del punt.
   0,25 punts pel valor mínim de la longitud.

4. Considereu la funció $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica en aquells punts en què la recta tangent és horitzontal.
[1 punt]

b) Calculeu les coordenades del punt de la gràfica de la funció $f(x)$ en què el pendent de la recta tangent és màxim.
[1 punt]

Resolució:

a) Que la recta tangent sigui horitzontal vol dir que té pendent zero. Per tant, ens estan demanant la recta tangent en aquells punts que la derivada sigui 0.

Calculem la funció derivada i la igualem a 0:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

La funció derivada només s'anul.la pel valor $x = 0$. Tenim $f(0) = 1$ i $f'(0) = 0$.

Per tant, l'equació de la recta tangent serà

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) = 0(x-0) + 1 = 1$$

$$\boxed{y = 1.}$$

Comentari: per a l'equació de la recta tangent també es pot fer servir directament, en saber que és horitzontal, l'ordenada del punt de la gràfica.

b) El pendent de la recta tangent és la funció derivada. Per tant, ens estan demanant el màxim de la funció derivada. Els candidats a màxim de la funció derivada són els zeros de la funció derivada de la funció derivada, és a dir, els zeros de la derivada segona $f''(x)$. Calculem $f''(x)$, la igualem a 0 i resolem la igualtat.

$$f''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 - (-2x)\,2(1+x^2)\;\;2x}{(1+x^2)^4} =$$

$$= \frac{-2(1+x^2)^2 + 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{-2(1+x^2)\;\;+8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

Per tant, $f''(x) = 0 \Longrightarrow 6x^2 - 2 = 0 \Longrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Longrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

A partir d'aquests valors singulars, els intervals de creixement i decreixement per a la funció derivada seran

	$(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3})$	$(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$	$(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$
Signe de f''	+	-	+
Creix/Decreix f'	↗	↘	↗

Per tant, el pendent serà màxim en el punt d'abscissa $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ i ordenada

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{1}{1+\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}.$$

És a dir, al punt $\boxed{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{3}{4}\right)}$.

Comentari: per a la determinació del màxim, l'estudiant pot, alternativament, en lloc de fer servir els intervals de creixement i decreixement de f', a partir del signe de f'', estudiar el signe de la següent derivada (f''') en els punts candidats. Als efectes escaients:

$$f'''(x)=\frac{24x\,(1-x^2)}{(1+x^2)^4}.$$

a)
0,25 punts pel càlcul de la derivada.
0,25 punts per la igualació a 0.
0,25 punts pel punt de tangència.
0,25 punts per l'equació de la recta tangent.

b)
0,25 punts per l'argument d'anul·lar la derivada segona (fet o no fet explícitament).
0,25 punts pel càlcul de la derivada segona.
0,25 punts pels punts singulars.
0,25 punts pels intervals i el punt final.

1. Les pàgines d'un llibre han de tenir cada una 600 cm^2 de superfície, amb uns marges al voltant del text de 2 cm a la part inferior, 3 cm a la part superior i 2 cm a cada costat. Calculeu les dimensions de la pàgina que permeten la superfície impresa més gran possible.
[2 punts]

Resolució:

Si anomenem *x* l'amplada i *y* l'alçada de les pàgines, l'enunciat ens diu que la superfície de la pàgina ha de ser de 600 cm^2, és a dir que $xy = 600$.

Per tant, podem expressar l'alçada en funció de l'amplada, $y = \frac{600}{x}$.

L'amplada de l'àrea impresa serà, després de restar els marges laterals, *x*-4.

L'alçada de l'àrea impresa serà, després de restar els marges superior i inferior, *y*-5.

Per tant, la superfície a maximitzar és $S(x, y) = (x - 4)(y - 5)$.

Quan substituïm la *y* a l'expressió de *S* obtenim la superfície només en funció de *x*:

$$S(x) = (x - 4)\left(\frac{600}{x} - 5\right) = 600 - 5x - \frac{2400}{x} + 20 = 620 - 5x - \frac{2400}{x}$$

Per a maximitzar *S* calculem primer les dues primeres derivades.

$$S'(x) = -5 + \frac{2400}{x^2}$$

$$S''(x) = -\frac{4800}{x^3}$$

Els candidats a màxim seran els punts que anul·lin la derivada primera, $S'(x)$. Quan fem $S'(x) = 0$, obtenim $5 = \frac{2400}{x^2}$ i, per tant, $x = +\sqrt{\frac{2400}{5}} = +\sqrt{480} = 4\sqrt{30}$.

(Observem que els valors negatius de *x* no tenen sentit per al problema.)

Per a comprovar que a $x = 4\sqrt{30}$ hi ha efectivament un màxim, substituïm el valor a la derivada segona i tenim $S''\left(4\sqrt{30}\right) < 0$. Per tant, l'amplada que maximitza l'àrea impresa és $\boxed{x = 4\sqrt{30} = 21{,}91\ cm}$.

L'alçada que li correspon serà $\boxed{y = \frac{600}{4\sqrt{30}} = \frac{600 \cdot \sqrt{30}}{4 \cdot 30} = 5\sqrt{30} = 27{,}39\ cm}$.

0,25 punts per la lligadura i l'expressió d'*y* en termes d'*x*.
0,25 punts per l'expressió inicial de la superfície.
0,25 punts per l'expressió de la superfície només en funció d'una variable.
0,25 punts per la derivada primera.
0,25 punts per la derivada segona.
0,25 punts pel valor crític de *x*.
0,25 punts per comprovar que és màxim relatiu
0,25 punts pel valor crític de *y*.

Observació: No cal donar l'expressió decimal de x *i* y *per a tenir l'exercici completament resolt.*

2. Volem construir un marc rectangular de fusta que delimiti una àrea de $2\ m^2$. Sabem que el preu de la fusta és de 7,5 €/m per als costats horitzontals i de 12,5 €/m per als costats verticals. Determineu les dimensions que ha de tenir el rectangle perquè el cost total del marc sigui el mínim possible. Quin és aquest cost mínim?
[2 punts]

Resolució:

Anomenem x a la mesura del costat horitzontal del rectangle i y a la mesura del costat vertical.

Atès que l'àrea del rectangle ha de ser de dos metres quadrats, sabem que $x \cdot y = 2$

La funció que facilita el cost a partir de la mesura dels costats és:

$$\mathrm{C}(x, y) = 7{,}5 \cdot 2x + 12{,}5 \cdot 2y = 15x + 25y$$

Com que $x \cdot y = 2$, sabem que $y = 2/x$ i, per tant, $\mathrm{C}(x) = 15x + 50/x$

Estudiem per a quin valor de $x > 0$ és mínima la funció cost:

$\mathrm{C}'(x) = 15 - 50/x^2$

$$\mathrm{C}'(x) = 0 \ \leftrightarrow 15 - \frac{50}{x^2} = 0 \ \leftrightarrow \ x = \sqrt{\frac{10}{3}} = \frac{\sqrt{30}}{3}$$

$\mathrm{C}''(x) = 100/x^3$

$$\mathrm{C}''\left(x = \frac{\sqrt{30}}{3}\right) > 0 \ \rightarrow \ \text{Mínim relatiu de } \mathrm{C}(x) \ \text{ quan } \ x = \frac{\sqrt{30}}{3} \ \text{ m}$$

$$y = \frac{2}{x} = \frac{2}{\frac{\sqrt{30}}{3}} = \frac{6}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}}{5} \ \text{ m}$$

Les dimensions que hem d'escollir per tal que el marc sigui el més econòmic possible són $x = \frac{\sqrt{30}}{3}$ m pel costat horitzontal i $y = \frac{\sqrt{30}}{5}$ m pel costat vertical del marc.

El cost més econòmic és

$$\mathrm{C}\left(x = \frac{\sqrt{30}}{3}, y = \frac{\sqrt{30}}{5}\right) = 15 \cdot \frac{\sqrt{30}}{3} + 25 \cdot \frac{\sqrt{30}}{5} = \boxed{10\sqrt{30}\ € \ \cong \ 54{,}77\ €}$$

0,25 punts per l'assignació de les variables.
0,25 punts per la igualtat de l'àrea.
0,25 punts per la funció cost.
0,25 punts per la funció derivada primera.
0,25 punts pel valor singular.
0,25 punts per argumentar que es tracta d'un mínim.
0,25 punts per les dimensions finals.
0,25 punts pel cost mínim.

34. PAU 2019 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 6

6. Sabem que una funció $f(x)$ és contínua i derivable a tots els nombres reals, que té com a derivada segona $f''(x) = 6x$ i que la recta tangent en el punt d'abscissa $x = 1$ és horitzontal.
   a) Determineu l'abscissa dels punts d'inflexió de la funció f i els intervals de concavitat i convexitat. Justifiqueu que la funció f té un mínim relatiu en $x = 1$.
   [1 punt]
   b) Sabent, a més, que la recta tangent en el punt d'abscissa $x = 1$ és $y = 5$, calculeu l'expressió de la funció f.
   [1 punt]

Resolució:

a) L'únic candidat a punt d'inflexió és el punt que anul.la la derivada segona, $x = 0$ i per estudiar els intervals de concavitat i convexitat només cal considerar els intervals $(-\infty, 0)$ i $(0, \infty)$.

Com que $f''(x) < 0$ per $x < 0$ i $f''(x) > 0$ per $x > 0$ deduïm que la funció f és convexa ($\cap$) en $(-\infty, 0)$ i còncava ($\cup$) en $(0, \infty)$.

Observació: En cas de conflicte entre la terminologia i el grafisme prevaldrà la resposta gràfica.

Per tant la funció té un únic punt d'inflexió en $x = 0$.

D'altra banda, sabem que $f'(1) = 0$ ja que la recta tangent en $x = 1$ és horitzontal. Com $f''(1) = 6 > 0$ deduïm que es tracta d'un mínim relatiu de la funció.

b) Com $f''(x) = 6x$ tenim que integrant que $f'(x) = 3x^2 + c$, on c és una constant real. Ara bé, sabem que en $x = 1$ la recta tangent és horitzontal, així que $f'(1) = 0$. Substituint a l'expressió anterior obtenim que $c = -3$.

Integrant de nou deduïm que $f(x) = x^3 - 3x + k$, on k és una constant real. Com la recta tangent en $x = 1$ és $y = 5$, cal que $f(1) = 5$.

Això ens permet trobar el valor de la constant k:

$$f(1) = 1 - 3 + k = 5$$

d'on $k = 7$ i la funció buscada és $\boxed{f(x) = x^3 - 3x + 7}$.

a)
0,25 punts per identificar l'abscissa $x = 0$.
0,25 punts pels intervals de convexitat/concavitat
0,25 punts per identificar el punt singular.
0,25 punts per justificar que és mínim relatiu.

b)
0,25 punts per la primera primitiva.
0,25 punts pel càlcul de la primera constant d'integració
0,25 punts per la segona primitiva.
0,25 punts pel càlcul de la segona constant d'integració.

35. PAU 2018 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 1

1. Considereu la funció polinòmica $f(x) = x^3 - ax^2 + bx + c$.
   a) Calculeu els valors dels paràmetres a, b i c, sabent que la funció té un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = 1$ i que la recta tangent a la gràfica de la funció en el punt d'abscissa $x = 0$ és la recta $y = x + 3$.
   [1 punt]
   b) Per als valors $a = 2$, $b = 1$ i $c = 3$, calculeu les abscisses dels extrems relatius de la funció i classifiqueu-los
   [1 punt]

Resolució:

a) A partir de $f'(x) = 3x^2 - 2ax + b$ i de la recta tangent $y = x + 3$, obtenim que $f(0) = 3$ i $m = f'(0) = 1$.
Les condicions per a la funció f en els punts d'abscissa 1 i 0 són:

$$\begin{cases} f'(1) = 3 - 2a + b = 0 \\ f'(0) = b = 1 \\ f(0) = c = 3 \end{cases} \Rightarrow a = 2$$

b) La funció és $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$
Si fem $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 0$, les abscisses dels possibles extrems són $x = 1$ i $x = \frac{1}{3}$.

Amb la segona derivada $f''(x) = 6x - 4$ deduïm:

- $f''(1) = 2 > 0$, per tant, hi ha un mínim relatiu en $x = 1$
- $f''\left(\frac{1}{3}\right) = 2 - 4 < 0$, per tant, hi ha un màxim relatiu en $x = \frac{1}{3}$

a)
0,25 punts per la funció derivada.
0,25 punts per la informació a partir de la recta tangent.
0,25 punts pel plantejament de les condicions.
0,25 punts pel càlcul dels valors dels tres paràmetres.

b)
0,25 punts per la funció i la seva derivada.
0,25 punts pel càlcul dels candidats a extrems relatius.
0,25 punts per la classificació de $x = 1$.
0,25 punts per la classificació de $x = 1/3$.

36. PAU 2018 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3

3. Sigui la funció $f(x) = x^3 - x^2$.

a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica i que és paral·lela a la recta d'equació $x + 3y = 0$.
[1 punt]

b) Calculeu, si n'hi ha, els punts de la gràfica en què la funció presenta un màxim o mínim relatiu o un punt d'inflexió.
[1 punt]

Resolució:

a) El pendent de la recta $x + 3y = 0$, és a dir $y = (-1/3)\,x$, és -1/3. Per a trobar una recta tangent paral·lela, cal trobar els punts en què la derivada de la funció és igual a -1/3.

$f'(x) = 3x^2 - 2x$

$3x^2 - 2x = -\frac{1}{3}$, per tant $9x^2 - 6x + 1 = 0$.

Resolent l'equació de segon grau, obtenim $x = \frac{1}{3}$.

Per a trobar la recta tangent demanada:

$f'\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \frac{1}{9} - 2 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$ (com ja sabíem)

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} - \frac{1}{9} = -\frac{2}{27}$

L'equació de la recta tangent és: $y + \frac{2}{27} = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{3}\right)$ o, desenvolupant,

$\boxed{y = \frac{-x}{3} + \frac{1}{27}}$, o alternativament, $\boxed{9x + 27y = 1}$.

b) Per a calcular els punts de màxim o mínim i les inflexions ens cal tenir les derivades

$f(x) = x^3 - x^2$

$f'(x) = 3x^2 - 2x$

$f''(x) = 6x - 2$

Per a calcular els candidats a màxim o mínim, resolem $f'(x)=0$, i obtenim $x = 0$ i $x = \frac{2}{3}$

Per a classificar aquest els punts singulars, els substituïm a la derivada segona:

$f''(0) = -2 < 0$, per tant, en $x = 0$ la funció té un màxim relatiu, $M = (0,0)$.

$f''\left(\frac{2}{3}\right) = 2 > 0$, per tant, en $x = \frac{2}{3}$ la funció té un mínim relatiu, $m = \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{27}\right)$.

Per a obtenir els candidats a inflexió, resolem $f''(x)=0$, i obtenim $x = \frac{1}{3}$.

Per a decidir si és inflexió, mirem el signe de la derivada segona a l'entorn de l'abscissa $x = \frac{1}{3}$.

$f''(x) = 6x - 2$

$\left(-\infty, \frac{1}{3}\right), \quad f'' < 0$,

$\left(\frac{1}{3}, +\infty, \right), \quad f'' > 0,$

per tant, en $x = \frac{1}{3}$ hi ha un canvi de concavitat i, per tant, en aquest punt tenim l'única inflexió, $I = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{27}\right)$.

Observació: A l'enunciat es demana "els punts de la gràfica", per tant, cal explicitar l'abscissa i l'ordenada dels punts. En el cas de contestar correctament només les abscisses, s'aplicarà **només una vegada** la penalització de 0,25 punts.

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts pel pendent de la recta proposada.
0,25 punts per la derivada primera i el punt en què cal fer la recta tangent.
0,25 punts per la fórmula de la recta tangent (sigui en general o aplicada al cas).
0,25 punts per l'expressió de la recta tangent.

b)
0,25 punts per les derivades.
0,25 punts pel màxim relatiu.
0,25 punts pel mínim relatiu.
0,25 punts per la inflexió.

37. PAU 2018 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 4

4. Sabem que una funció $f(x)$ està definida per a tots els nombres reals i que és derivable dues vegades. Sabem també que té un punt d'inflexió en el punt d'abscissa $x = 2$, que l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en aquest punt és $y = -124x + 249$ i que $f(-3) = -4$.

a) Calculeu $f''(2)$, $f'(2)$ i $f(2)$.

[1 punt]

b) Calculeu $\int_{-3}^{2} f'(x)dx$.

[1 punt]

Resolució:

a) Si la funció f té una inflexió en el punt d'abscissa $x = 2 \Rightarrow \boxed{f''(2) = 0}$.

El pendent de la recta tangent és la derivada, per tant si $y = -124x + 249$ és la recta tangent en $x = 2 \Rightarrow \boxed{f'(2) = -124}$. I la recta tangent coincideix amb la funció en el punt $x = 2 \Rightarrow \boxed{f(2) = -124 \cdot 2 + 249 = 1}$.

b) Apliquem la regla de Barrow tenint en compte que la funció f és una primitiva de la funció f'.

$$\int_{-3}^{2} f'(x)dx = f(x)|_{-3}^{2} = f(2) - f(-3).$$

Per tant $\boxed{\int_{-3}^{2} f'(x)dx = 1 - (-4) = 5}$.

Apartat a)

0,25 punts per $f''(2)$.

0,25 punts per $f'(2)$.

0,5 punts pel $f(2)$.

Apartat b)

0,5 punts pel càlcul de la primitiva i formular la Regla de Barrow

0,25 punts per substituir en la regla de Barrow.

0,25 punts pel càlcul lfinal.

38. PAU 2017 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 4

4. De les funcions $f(x)$, $f'(x)$, $g(x)$ i $g'(x)$, en coneixem els valors següents:

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	2	1
1	0	-6

x	$g(x)$	$g'(x)$
0	1	1
1	3	3

a) De la funció $f(x)$ sabem també que el pendent de la recta tangent a un punt d'abscissa x és $4x^3-9x^2-2x+1$. Trobeu $f(x)$.
[1 punt]

b) Calculeu $(g\circ f)'(1)$.
[1 punt]

Resolució:

a)

De l'enunciat tenim que $4x^3-9x^2-2x+1$ és la funció derivada de $f(x)$. Per tant, $f(x)$ serà una primitiva de $4x^3-9x^2-2x+1$.
Calculem el conjunt de primitives de $4x^3-9x^2-2x+1$:

$$\int(4x^3-9x^2-2x+1)\,dx = x^4-3x^3-x^2+x+C$$

Sabem que $f(0)=2$ (o que $f(1)=0$). Per tant,

$f(0)=C=2$ i la funció buscada és $f(x)=x^4-3x^3-x^2+x+2$

Observació: L'exercici es puntuarà com a correcte tant si es fa servir només un dels dos punts (x=0 o x=1) per a determinar la constant C com si es fan servir els dos (cercant una certa coherència de les dades de l'enunciat).

b)

Aplicant la regla de la cadena per a la derivada d'una composició de funcions tenim:

$$(g\circ f)'(1)=g'(f(1))\cdot f'(1)$$

Per les taules de valors sabem que $f(1)=0$, que $f'(1)=-6$ i que $g'(0)=1$. Llavors,

$$(g\circ f)'(1)=g'(f(1))\cdot f'(1)=g'(0)\cdot f'(1)=1\cdot(-6)=-6.$$

a)
0,25 punts per identificar que ens donen f'.
0,25 punts per l'expressió general de la primitiva.
0,25 punts pel valor de la constant d'integració.
0,25 punts per l'expressió final de $f(x)$.

b)
0,25 punts per la formulació de la regla de la cadena.
0,25 punts per $f'(1)$.
0,25 punts per $g'(0)$.
0,25 punts pel càlcul final.

39. PAU 2017 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3

La resposta depèn del signe de k.

- Si $k < 0$, aleshores $x^2 - k > 0$ per a qualsevol valor de x i, per tant, Dom(f) = R i la funció $f(x) = \frac{1}{x^2-k}$ és contínua perquè no s'anul·la el denominador i no té cap asímptota vertical.
  Com que $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2-k} = 0$, la funció té una asímptota horitzontal en l'eix de les x, y=0.
- Si $k > 0$ aleshores $x^2 - k$ s'anul·la per als valors $\pm\sqrt{k}$ i, per tant, Dom(f) = R-$\{\pm\sqrt{k}\}$ i la funció $f(x) = \frac{1}{x^2-k}$ tindrà dues asímptotes verticals, en $x = +\sqrt{k}$ i en $x = -\sqrt{k}$.
  Com que $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2-k} = 0$, la funció té una asímptota horitzontal en l'eix de les x, y=0.

b) $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-k)^2} = 0$ si $x = 0$, amb independència del valor de k.

$$f''(x) = \frac{(-2)(x^2-k)^2 - (-2x)2(x^2-k)2x}{(x^2-k)^4} = \frac{(-2)(x^2-k) + 8x^2}{(x^2-k)^3} = \frac{6x^2+2k}{(x^2-k)^3}$$

Com que $f''(0) = \frac{-2}{k^2} < 0$,

f, per tant, té un màxim relatiu en el punt $\left(0, \frac{-1}{k}\right)$ i no té mínims relatius.

Observació: En lloc de fer servir el signe de la derivada segona també es pot veure el creixement o decreixement de la funció f a l'entorn de $x = 0$.

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts pel domini i no AV quan $k < 0$
0,25 punts pel domini i AV quan $k > 0$
0,25 punts per la AH quan $k < 0$
0,25 punts per la AH quan $k > 0$

b)
0,25 punts per la derivada primera.
0,25 punts pel punt singular.
0,25 punts per la derivada segona o el raonament equivalent sobre el creixement o decreixement.
0,25 punts per la classificació del punt i la resposta final.

40. PAU 2017 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 6

Pel teorema de Pitàgores sabem que $a^2 = x^2 + h^2$. Com que el volum del con val 120 cm^3, per la fórmula del volum tenim

$$120 = \frac{\pi \cdot x^2 \cdot h}{3}$$

i aïllant, obtenim $x^2 = \frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h}$. Substituint x^2 a l'expressió inicial, s'obté la fórmula buscada.

b) La longitud de l'aresta és una funció positiva i tenim la longitud al quadrat expressada com a funció de h, per tant és suficient amb trobar els mínims de la funció

$$f(h) = \frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h} + h^2$$

quan $h \in (0, \infty)$. Tenim

$$f'(h) = 2h - \frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h^2}$$

per tant, en igualar $F'(h) = 0$, s'obté $2h = \frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h^2}$, $h^3 = \frac{180}{\pi}$ i $\boxed{h = \sqrt[3]{\frac{180}{\pi}} \simeq 3{,}86 \text{ cm}}$.

Es comprova que és un mínim, ja que $f'(x) < 0$ quan $x \in \left(0, \sqrt[3]{\frac{180}{\pi}}\right)$ i $f'(x) > 0$ quan $x \in \left(\sqrt[3]{\frac{180}{\pi}}, \infty\right)$.

Alternativament, es pot treballar amb la funció

$$a(h) = \sqrt{\frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h} + h^2}$$

i s'obté com a derivada

$$a'(h) = \frac{h - \frac{180}{\pi} \cdot \frac{1}{h^2}}{\sqrt{\frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h} + h^2}}$$

El desenvolupament del problema és el mateix a partir d'aquí.

a)
0,25 punts per l'aplicació del teorema de Pitàgores.
0,25 punts per la igualtat derivada del volum.
0,25 punts per aïllar la x.
0,25 punts per la substitució final.

b)
0,25 punts per l'argumentació de la funció a minimitzar.
0,25 punts per la derivada de la funció.
0,25 punts pel punt singular (en forma radical o amb l'expressió decimal).
0,25 punts per la classificació del punt singular (com a la proposta de resolució o a partir del signe de la derivada segona).

41. PAU 2017 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 6

a)

La base del rectangle és 6-*x*.

Per a calcular l'alçada del rectangle calculem primer l'equació de la recta que fa de sostre inclinat. Si pensem l'origen (0,0) en el punt A, la recta és la que passa pels punts (0, 1) i (6, 3). Té per tant pendent (3-1)/(6-0) = 2/6 = 1/3 i serà de la forma *y* = (1/3) *x* + *n* i si ha de passar pel punt (0, 1), *n* ha de valer 1. Així doncs l'alçada és (1/3) *x* +1

Per tant l'àrea del rectangle és $A(x) = (6-x)\cdot\left(\frac{1}{3}x+1\right) = \boxed{-\frac{1}{3}x^2+x+6}$.

Nota: Els càlculs per a l'equació del sostre per a determinar l'alçada de l'armari també es poden resoldre per semblança de triangles. Es puntuarà de forma anàloga.

b) Per a maximitzar la funció $A(x)$ mirem en quin punt s'anul·la la derivada.

$$A'(x) = -\frac{2}{3}x+1$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2}{3}x = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

I com que *A''*(*x*) = -2/3 < 0 en $\boxed{x = 3/2}$ hi ha un màxim relatiu

Per tant les dimensions del rectangle seran $6-\frac{3}{2} = \boxed{\frac{9}{2}}$ de base i $\frac{1}{3}\frac{3}{2}+1 = \boxed{\frac{3}{2}}$ d'alçada.

L'àrea màxima serà $A\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2}\cdot\frac{3}{2} = \boxed{\frac{27}{4}\ u^2}$.

a)
0,25 punts per la base del rectangle.
0,25 punts per l'equació del sostre.
0,25 punts per l'alçada del rectangle.
0,25 punts per l'àrea del rectangle.

b)
0,25 punts per la derivada i el punt singular.
0,25 punts per la comprovació de màxim.
0,25 punts per les dimensions del rectangle.
0,25 punts pel càlcul de l'àrea màxima.

42. PAU 2016 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 3

3. Voleu fer un envàs de gelat amb forma de prisma regular de base quadrada i capacitat de 80 cm^3. Per a la tapa i la superfície lateral feu servir un determinat material que costa 1 €/cm^2, però per a la base heu d'utilitzar un material un 50 % més car.

a) Si denoteu per x la mesura en cm del costat de la base, comproveu que la funció preu de l'envàs és $P(x) = 2{,}5\,x^2 + \frac{320}{x}$.

[1 punt]

b) Calculeu les dimensions d'aquest envàs perquè el preu sigui el menor possible.

[1 punt]

Resolució:

a) Si anomenem x el costat de la base i y l'altura de l'envàs, la funció a optimitzar és: $P(x,y) = 1\cdot\left[x^2 + 4x\cdot y\right] + 1{,}5\cdot x^2$

De la condició $80 = x^2\cdot y \Rightarrow y = \dfrac{80}{x^2}$ i la funció a optimitzar queda

$$P(x) = x^2 + 4x\cdot\frac{80}{x^2} + 1{,}5\cdot x^2 = 2{,}5\cdot x^2 + \frac{320}{x}$$

b) Per tal de minimitzar la funció preu, derivem i igualem a zero per calcular els possibles extrems:

$P'(x) = 5x - \dfrac{320}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 4$, que és on s'assoleix un mínim ja que

$P''(x) = 5 + \dfrac{640}{x^3}$ i s'obté $P''(4) > 0$.

El valor de l'altura del prisma és $y = \dfrac{80}{4^2} = 5$

Per tant les dimensions del prisma buscat són 4 cm de base i 5 cm d'altura.

Apartat a)

0,5 punts per la funció preu en funció de x i y.

0,25 punts per la lligadura a partir del volum.

0,25 punts per la funció preu en funció de x.

Apartat b)

0,25 punts per la funció derivada primera.

0,25 punts pel punt singular.

0,25 punts per la funció derivada segona i classificació del punt singular com a mínim.

0,25 punts per les mides finals del prisma.

43. PAU 2016 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 3

3. Sigui la funció $f(x) = x\,e^{x-1}$.

a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció *f* en el punt d'abscissa $x = 1$.

[1 punt]

b) Determineu en quins intervals la funció *f* és creixent i en quins intervals és decreixent.

[1 punt]

Resolució:

a) En un punt $x = a$, l'equació de la recta tangent a una funció *f* té l'expressió

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

En el nostre cas tenim $f(x) = x\,e^{x-1}$ i $a = 1$

La funció derivada *f'*(*x*) és $f'(x) = 1 \cdot e^{x-1} + x \cdot e^{x-1} = (1 + x)e^{x-1}$.

Tenim doncs: $a = 1$, $f(a) = f(1) = 1\,e^0 = 1$, i $f'(a) = f'(1) = 2\,e^0 = 2$.

Per tant la recta tangent és $\boxed{y} = 2 \cdot (x - 1) + 1\ \boxed{= 2x - 1}$.

b) Com que la funció *f* és derivable en tot el seu domini, la funció creixerà allà on la derivada sigui positiva i decreixerà allà on la derivada sigui negativa.

Tenim que $f'(x) = (1 + x)e^{x-1}$. Mirem si la funció s'anul·la en algun punt.

$f'(x) = 0$ porta a que $1+x = 0$ i per tant $x = -1$.

Si $x < -1 \Rightarrow 1 + x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ i per tant la funció és decreixent.

Si $x > -1 \Rightarrow 1 + x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ i per tant la funció és creixent.

La funció és decreixent en l'interval $(-\infty, -1)$ i és creixent en l'interval $(-1, \infty)$.

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts per la fórmula de la recta tangent.

0,25 punts pels càlculs de *f*(*a*) i *f'*(*a*).

0,25 punts per la substitució

0,25 punts per l'equació final.

Apartat b)

0,25 punts pel plantejament a partir del signe de la funció derivada.

0,25 punts pel punt on s'anul·la la derivada.

0,25 punts per l'interval on la funció és decreixent.

0,25 punts per l'interval on la funció és creixent.

44. PAU 2016 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 3

3. Responeu a les qüestions següents:

a) Calculeu els màxims relatius, mínims relatius i punts d'inflexió de la funció $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$.

[1 punt]

b) Expliqueu raonadament que si $f(x)$ és una funció amb derivada primera contínua en l'interval $[a, b]$ i que satisfà que $f'(a) > 0$ i $f'(b) < 0$, aleshores hi ha, com a mínim, un punt de l'interval (a, b) en què la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en aquest punt és horitzontal.

[1 punt]

Resolució:

a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4 \quad f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 \quad f''(x) = 12x - 18$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = 2$

$f''(1) = -6 < 0 \Rightarrow$ Màxim relatiu en el punt $M = \big(1, f(1)\big) = (1, 1)$

$f''(2) = +6 > 0 \Rightarrow$ Mínim relatiu en el punt $m = \big(2, f(2)\big) = (2, 0)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x - 18 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$

Si $x < \frac{3}{2} \Rightarrow f''(x) < 0$ i, per tant, la funció és còncava.

Si $x > \frac{3}{2} \Rightarrow f''(x) > 0$ i, per tant, la funció és convexa.

Per tant, punt d'inflexió en el punt $\left(\frac{3}{2}, f(\frac{3}{2})\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

b) Si la funció *f* admet derivada primera contínua i $f'(a) > 0$ i $f'(b) < 0$, podem aplicar el teorema de Bolzano a la funció f' en l'interval $[a, b]$ ja que es tracta d'una funció contínua en un interval que experimenta un canvi de signe entre els extrems.
Aleshores el teorema de Bolzano ens assegura que hi ha, com a mínim, un punt en l'interval (a, b) en què la funció (aquí és la f') s'anul·la. I que f' s'anul·li vol dir exactament el que ens demana l'enunciat: que la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ sigui horitzontal.

Apartat a)

0,25 punts per les derivades.

0,25 punts pel punt de màxim relatiu.

0,25 punts pel punt de mínim relatiu.

0,25 punts pel punt d'inflexió.

Apartat b)

0,5 punts pel raonament que la funció derivada fa un canvi de signe en l'interval [a, b]

0,25 punts per aplicar el teorema de Bolzano a la funció derivada.

0,25 punts per identificar que derivada nul·la correspon a recta tangent horitzontal

45. PAU 2016 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 6

6. Sabem que una funció $f(x)$ té per derivada $f'(x)=(x+1)e^x$ i que $f(0)=2$.

c) Trobeu l'equació de la recta tangent a $y=f(x)$ en el punt de la corba amb abscissa $x=0$.

[1 punt]

d) Calculeu l'expressió de $f(x)$.

[1 punt]

Resolució:

a) Només cal aplicar la fórmula de l'equació de la recta tangent en un punt $(a, f(a))$: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

En aquest cas, $a=0$; $f(a)=2$ i $f'(a)=1$ i, per tant, l'equació demanada és:

$y-2=1(x-0)$, o sigui $\boxed{y=x+2}$

b) Calculem la primitiva pel mètode d'integració per parts:

$$f(x)=\int(x+1)e^x dx=uv-\int v\,du=(x+1)e^x-\int e^x dx=$$

$$=(x+1)e^x-e^x=xe^x+e^x-e^x=xe^x+k$$

Com que $f(0)=2$, resulta que $2=f(0)=0e^0+k=k$ i, per tant, $\boxed{f(x)=xe^x+2}$.

Apartat a)

0,5 punts per la formulació de la recta tangent.

0,5 punts per la substitució i càlcul final.

Apartat b)

0,25 punts per la identificació dels termes d'integració per parts.

0,25 punts pel primer pas d'integració per parts.

0,25 punts pel pas final d'integració.

0,25 punts per calcular k i l'expressió final de f.

5. Siguin x i y les mesures dels costats d'un rectangle inscrit en una circumferència de diàmetre 2.

a) Comproveu que la superfície del rectangle, en funció de x, és donada per l'expressió $S(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$.

b) Calculeu els valors de les mesures x i y per als quals la superfície del rectangle és màxima i calculeu el valor d'aquesta superfície màxima.

Resolució:

a) Si dibuixem la diagonal del rectangle (que és el diàmetre de la circumferència), pel Teorema de Pitàgoras tenim la relació $x^2 + y^2 = 2^2$. Per tant, $y = +\sqrt{4 - x^2}$.

Aleshores la superfície $x \cdot y$, en funció només de la variable x la podem escriure

$$S(x) = x \cdot \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4x^2 - x^4}$$

com volíem comprovar.

b) Pel caràcter monòton de la funció arrel quadrada, el valor de x on la superfície sigui màxima és el mateix que aquell per al qual es maximitza el radicant. Per tant, maximitzarem el radicant, $r(x) = 4x^2 - x^4$, que és més senzill.

Els candidats a màxim seran els punts que anul·lin la derivada primera. Fem les derivades i igualem a zero la derivada primera.

$r(x) = 4x^2 - x^4$

$r'(x) = 8x - 4x^3$

$r''(x) = 8 - 12x^2$

De la igualtat $r'(x) = 0$ tenim $4x(2 - x^2) = 0$ d'on obtenim $x = 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$.

Pel context del problema $x = -\sqrt{2}$ no té sentit i pel cas $x = 0$ obtenim $S(0) = 0$ que tampoc no és màxim. Així doncs, l'única solució possible és $x = \sqrt{2}$.

Comprovem que efectivament és un màxim substituint en la derivada segona:

$r''(\sqrt{2}) = 8 - 12(\sqrt{2})^2 = 8 - 24 < 0$ i per tant efectivament en $x = \sqrt{2}$ la superfície és màxima.

El valor de la mesura y serà $y = \sqrt{4 - \sqrt{2}^2} = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2}$.

Observem que es tracta d'un quadrat.

El valor màxim és $S(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ unitats quadrades.

Apartat a)

0,25 punts per l'equació de condició (Teorema de Pitàgoras)

0,25 punts per l'expressió de y en funció de x.

0,25 punts per la fórmula de la superfície en termes de x i y.

0,25 punts per la substitució i càlcul final.

Apartat b)

0,25 punts per les derivades.

0,25 punts pel plantejament d'anul·lar la derivada primera.

0,25 punts per la solució de $S'(x) = 0$ i verificació del màxim.

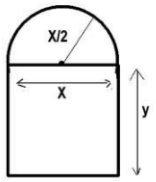
0,25 punts per les dues mesures i la superfície màxima.

---

47. PAU 2015 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 6

6.

La portalada d'una catedral està formada, en la part superior, per un arc de mitja circumferència que recolza sobre dues columnes, com il·lustra la figura adjunta, en què x és el diàmetre de la circumferència, és a dir, la distància entre columnes, i y és l'alçària de cada columna.



a) Comproveu que la funció $f(x,y)=\frac{\pi\, x^2}{8}+x\,y$ determina l'àrea d'aquesta portalada.

[1 punt]

b) Si el perímetre de la portalada fa 20 m, determineu les mides x i y de la portalada que en maximitzen l'àrea.

[1 punt]

Resolució:

a) L'àrea de la portalada serà la suma de l'àrea de la semicircumferència més la del rectangle inferior, és a dir

$$\frac{\pi\,(x/2)^2}{2}+xy=\boxed{\frac{\pi\,x^2}{8}+xy}$$

que és l'expressió proposada.

b) Que el perímetre sigui 20 m ens indica la restricció $\pi\frac{x}{2}+2y+x=20$, és a dir $\frac{\pi+2}{2}x+2y=20$.

D'aquesta condició podem aïllar la y i substituir-la a la funció de l'àrea per a maximitzar-la. Tenim $y=10-\frac{\pi+2}{4}x$ i per tant

$$A(x)=\frac{\pi\,x^2}{8}+x\left(10-\frac{\pi+2}{4}x\right)=$$

$$=\frac{\pi}{8}x^2+10x-\frac{\pi+2}{4}x^2=-\frac{\pi+4}{8}x^2+10x.$$

Per a maximitzar la funció, derivem i igualem la derivada a 0.

$$A'(x)=-\frac{\pi+4}{4}x+10\,.$$

Quan fem $A'(x)=0$, obtenim $\boxed{x=\frac{40}{\pi+4}\ metres}$.

Com que la derivada segona és $A''(x)=-\frac{\pi+4}{4}<0$ independent del valor de l'abscissa del punt, en el nostre valor $x=\frac{40}{\pi+4}$ tindrem un màxim.

Quan $x=\frac{40}{\pi+4}$ el valor de y és $\boxed{y=10-\frac{\pi+2}{4}\frac{40}{\pi+4}=10-10\frac{\pi+2}{\pi+4}=\frac{20}{\pi+4}\ metres}$.

Apartat a)

0,25 punts pel càlcul de l'àrea de la semicircumferència.

0,25 punts pel càlcul de l'àrea del rectangle.

0,5 punts per la justificació de la fórmula.

Apartat b)

0,25 punts per la relació entre *x* i *y* a través del perímetre.

0,25 punts per la funció a maximitzar.

0,25 punts per la funció derivada i obtenció de *x*.

0,25 punts per la comprovació de màxim i obtenció de la *y*.

---

48. PAU 2015 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 2

2. Sigui la funció $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$.

a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x = 1$.

[1 punt]

b) Calculeu les abscisses dels punts de la gràfica en què hi ha un mínim relatiu, un màxim relatiu o una inflexió.

[1 punt]

Resolució:

c) Per al càlcul de la recta tangent necessitem saber el pendent de la recta, que serà la derivada de la funció en el punt $x = 1$ i el valor de la funció en $x = 1$.

$f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4.$

I per tant tenim $f(1) = 1$ i $f'(1) = -1$ i per tant l'equació de la recta serà

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) = (-1)(x - 1) + 1 = -x + 2.$$

d) Els punts candidats a màxim relatiu o mínim relatiu són els zeros de la derivada primera. Els punts candidats a inflexió són els zeros de la derivada segona. Calculem les derivades i les igualem a zero.

Quan fem $f'(x)=0$ obtenim $x=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{6}=\frac{8\pm\sqrt{16}}{6}=\frac{8\pm4}{6}=\begin{cases}2\\ \frac{2}{3}\end{cases}$.

Per tant tenim dos candidats a màxim o mínim relatius. Per a decidir si són màxim o mínim substituïm a la derivada segona i obtenim:

$f''(2)=6\cdot 2-8=4>0$ i per tant en $x=2$ la funció té un mínim relatiu.
$f''\left(\frac{2}{3}\right)=6\cdot\frac{2}{3}-8=-4<0$ i per tant en $x=\frac{2}{3}$ la funció té un màxim relatiu.

Quan fem $f''(x)=0$ obtenim $x=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$. Per tant tenim un únic punt candidat a inflexió en $x=\frac{4}{3}$. Per decidir si es tracta d'una inflexió substituïm en la derivada següent o comprovem el canvi de signe de la concavitat abans i després del punt.
$f'''\left(\frac{4}{3}\right)=6\neq 0$ i per tant en $x=\frac{4}{3}$ la funció té un punt d'inflexió.

Apartat a)

0,25 punts per la funció derivada

0,25 punts per la derivada en x=1

0,25 punts per la fórmula a aplicar

0,25 punts per l'equació final.

Apartat b)

0,25 punts per la formulació de les derivades.

0,25 punts pel màxim.

0,25 punts pel mínim.

0,25 punts per la inflexió.

49. PAU 2014 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 2

2. Siguin les funcions $f(x) = \frac{e^{ax}+b}{4}$ i $g(x) = +\sqrt{3x+4}$.

a) Determineu el domini i el recorregut de la funció g.

[1 punt]

b) Calculeu per a quins valors de a i de b les gràfiques de les dues funcions són tangents (és a dir, tenen la mateixa recta tangent) en el punt d'abscissa $x = 0$.

[1 punt]

Resolució:

a) $g(x) = +\sqrt{3x+4}$.

Per tal que un punt, x, sigui del domini de la funció g només cal que el radicand sigui positiu. És a dir $\boxed{Dom(g)} = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x+4 \geq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{4}{3}\right\} = \boxed{[-\frac{4}{3}, +\infty)}$.

Una ordenada y serà del recorregut de la funció g, sempre que es pugui obtenir del càlcul de la imatge per g d'una abscissa x, és a dir $y = +\sqrt{3x+4}$. Per tant seran aquells valors positius de y per als quals la igualtat $y = +\sqrt{3x+4}$ té solució per a x. Però operant la igualtat obtenim que per a qualsevol y positiu sempre podem aillar la x com a $x = \frac{y^2-4}{3}$. Per tant, $\boxed{Rec(g) = [0, +\infty)}$.

b) Per tal que les dues funcions siguin tangents en $x = 0$ s'ha de satisfer $f(0) = g(0)$ i $f'(0) = g'(0)$.

Calculem les expressions de les funcions derivades:

$$f'(x) = \frac{1}{4}ae^{ax}$$

$$g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+4}}$$

Per tant $f(0) = g(0) \Rightarrow \frac{1+b}{4} = 2 \Rightarrow \boxed{b = 7}$.

I $f'(0) = g'(0) \Rightarrow \frac{a}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{a = 3}$.

Apartat a)
- 0,5 punts pel domini.
- 0,5 punts pel recorregut.

Apartat b)
- 0,25 punts per la derivada de f.
- 0,25 punts per la derivada de g.
- 0,25 punts per la igualtat d'imatges i càlcul de b.
- 0,25 punts per la igualtat de pendents i càlcul de a

50. PAU 2014 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 4

4. Sabem que una funció f té per derivada la funció

$$f'(x) = (3x-2)^2(x-2).$$

a) Calculeu els valors de x en què la funció f té un màxim relatiu, un mínim relatiu o un punt d'inflexió, i indiqueu en cada cas de què es tracta.

[1 punt]

b) Determineu la funció f sabent que s'anul·la en el punt d'abscissa $x = 2$.

[1 punt]

Resolució:

a) Els punts candidats a ser màxim relatiu o mínim relatiu són els zeros de la funció derivada f'. Si igualem la derivada a zero veiem que s'anul·la en els punts d'abscissa $x = \frac{2}{3}$ i $x = 2$.

Per a classificar els punts candidats farem servir la funció derivada segona.

$$f''(x) = 2 \cdot 3 \cdot (3x-2)(x-2) + (3x-2)^2 = (3x-2)(6x-12+3x-2)$$
$$= (3x-2)(9x-14).$$

Com que $f''(2) = 16 > 0$, per tant en $x = 2$ la funció té un mínim relatiu.

Com que $f''\left(\frac{2}{3}\right) = 0$, no podem concloure que sigui un extrem relatiu.

Els punts candidats a ser inflexió són aquells punts que anul·len la segona derivada.

Quan resolem $f'' = 0$, obtenim $x = \frac{2}{3}$ i $x = \frac{14}{9}$.

En els dos casos es tracta de punts d'inflexió ja que la segona derivada canvia de signe. En efecte, f'' és positiva a l'interval $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$, és negativa a l'interval $\left(\frac{2}{3}, \frac{14}{9}\right)$ i torna a ser positiva a l'interval $\left(\frac{14}{9}, \infty\right)$.

En resum:

En $x = 2$ la funció té un mínim relatiu
En $x = \frac{2}{3}$ i $x = \frac{14}{9}$ la funció té punts d'inflexió.

b) Per a determinar la funció f calculem una primitiva de la funció f':

$$\int (3x-2)^2(x-2)\,dx =$$

$$= \int (9x^3 - 30x^2 + 28x - 8)\,dx = \frac{9}{4}x^4 - 10x^3 + 14x^2 - 8x + C.$$

I podem determinar la constant C sabent que $f(2) = 0$.

És a dir, tenim que $\frac{9}{4}2^4 - 10 \cdot 2^3 + 14 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + C = 0$, d'on $C = 4$.

Aleshores

$$\boxed{f(x) = \frac{9}{4}x^4 - 10x^3 + 14x^2 - 8x + 4}.$$

Apartat a)

0,25 punts per la identificació de candidats a extrem relatiu.
0,25 punts per la derivada segona.
0,25 punts per la classificació dels extrems relatius.
0,25 punts pel punt i classificació de la inflexió.

Apartat b)

0,25 punts pel plantejament a partir del càlcul d'una primitiva.
0,5 punts pel càlcul de la primitiva.
0,25 punts pel càlcul de la constant d'integració.

---

51. PAU 2014 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 3

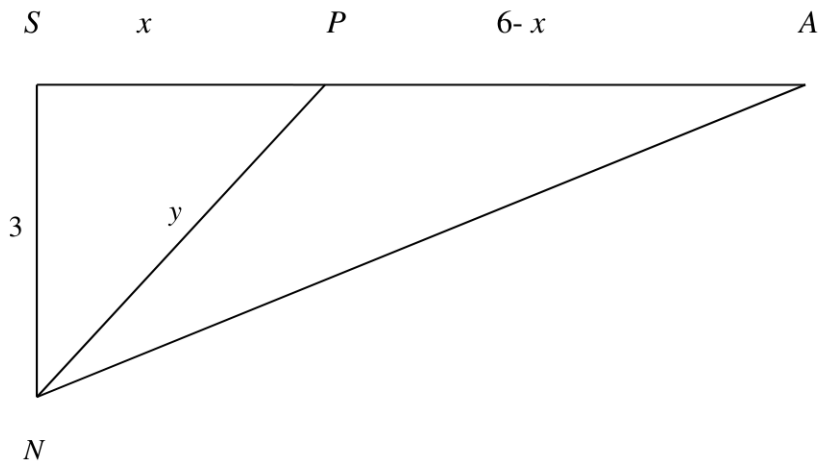
3. Un nedador és al mar en un punt N, situat a 3 km d'una platja recta, i just al davant d'un punt S, situat a la platja arran de l'aigua; i vol anar a un punt A situat també arran de l'aigua i a 6 km del punt S, de manera que el triangle NSA és rectangle en el vèrtex S. El nedador neda a una velocitat constant de 3 km/h i camina a una velocitat constant de 5 km/h.

a) Si P és un punt entre el punt S i el punt A que està a distància x de S, demostreu que el temps, en hores, que necessita el nedador per a nedar del punt N al punt P i caminar des del punt P fins al punt A és determinat per l'expressió $t(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{6-x}{5}$.
[1 punt]

b) Calculeu el valor de x que determina el temps mínim que cal per a anar del punt N al punt A, passant per P. Quin és el valor d'aquest temps mínim?
[1 punt]

Resolució:

a) La situació gràfica és la següent:



Sabem que $\overline{NS} = 3$ km i $\overline{SA} = 6$ km. Anomenem $\overline{NP} = y$.

La funció que calcula el temps que es demana és $t(x) = \frac{y}{3} + \frac{6-x}{5}$.

Per Pitàgoras tenim la relació $y = \sqrt{x^2 + 9}$ i per tant $t(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{6-x}{5}$, com volíem veure.

b) Per a trobar el mínim de la funció t calculem la seva derivada i la igualem a zero.

$$t'(x) = \frac{x}{3\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{5}.$$

Si fem $t'(x) = 0$ obtenim $\frac{x}{3\sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{5}$, i d'aquí $5x = 3\sqrt{x^2+9}$

$$25x^2 = 9x^2 + 81$$

$$16x^2 = 81$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{81}{16}} = \pm 2{,}25$$

Observem que la solució negativa no es situa en el context del problema. Per tant l'únic candidat a extrem de la funció és quan $x = 2{,}25$.

Per a determinar que en $x = 2{,}25$ la funció té un mínim, calculem la derivada segona i obtenim $t''(x) = \frac{3}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}$ i observem que és sempre positiva.

Per tant com que $t''(2{,}25) > 0$ podem assegurar que en $\boxed{x = 2{,}25\ km}$ la funció té un mínim.

El temps mínim serà $\boxed{t(2{,}25) = \frac{\sqrt{2{,}25^2+9}}{3} + \frac{6-2{,}25}{5} = 2\ hores}$

Apartat a)

0,25 punts pel plantejament gràfic del problema.

0,25 punts pel Teorema de Pitàgoras.

0,25 punts pel temps en el primer tram.

0,25 punts pel temps en el segon tram.

Apartat b)

0,25 punts per la derivada primera.

0,25 punts pel punt singular.

0,25 punts per la derivada segona i classificació de mínim. S'admet, amb la totalitat de la puntuació, que l'estudiant ho justifiqui correctament pel context del problema i no utilitzi la derivada segona.

0,25 punts per a la substitució.

52. PAU 2014 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 1

1. Considereu la funció $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$.

- Calculeu les asímptotes verticals, horitzontals i obliqües de la funció f. [1 punt]
- Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en aquells punts en què la recta tangent sigui paral·lela a la recta $y = -5x + 4$. [1 punt]

Resolució:

a) El domini de la funció f, com a quocient de polinomis que és, són tots els nombre reals llevat aquells que anul·lin el denominador, en aquest cas el punt $x = 2$. En aquest punt s'anul·la el denominador i no el numerador i per tant tenim

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x+3}{x-2} = \infty.$$

Per tant la funció f té una única asímptota vertical en $x = 2$.

Per al càlcul de les asímptotes horitzontal hem de calcular

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x+3}{x-2} = 1.$$

Per tant la funció f té una asímptota horitzontal en la recta $y = 1$.

Aleshores en tenir asímptota horitzontal quan $x \longrightarrow \pm\infty$ no té cap asímptota oblícua.

b) La recta $y = -5x + 4$ té pendent -5, per tant se'ns demana calcular la recta tangent en els punts que aquesta tingui pendent, és a dir derivada de *f*, -5.

Si derivem i igualem a -5 obtenim:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-2) - (x+3) \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{-5}{(x-2)^2}$$

Si $\frac{-5}{(x-2)^2} = -5$ aleshores $(x-2)^2 = 1$ i per tant $x - 2 = \pm 1$, és a dir $x = 1$ o $x = 3$.

Per tant tenim dues rectes tangents a calcular, totes dues amb pendent -5.

Quan $\boxed{x = 1}$ tenim $f(1) = -4$ i la recta tangent serà

$$\boxed{y = -5(x-1) + (-4) = -5x + 1}$$

Quan $\boxed{x = 3}$ tenim $f(3) = 6$ i la recta tangent serà

$$\boxed{y = -5(x-3) + 6 = -5x + 21}$$

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,5 punts per l'asímptota vertical.

0,25 punts per l'asímptota hortizontal.

0,25 punts per l'argumentació de l'asímptota oblícua.

Apartat b)

0,25 punts per la funció derivada.

0,25 punts pel càlcul de les abscisses dels punts de tangència.

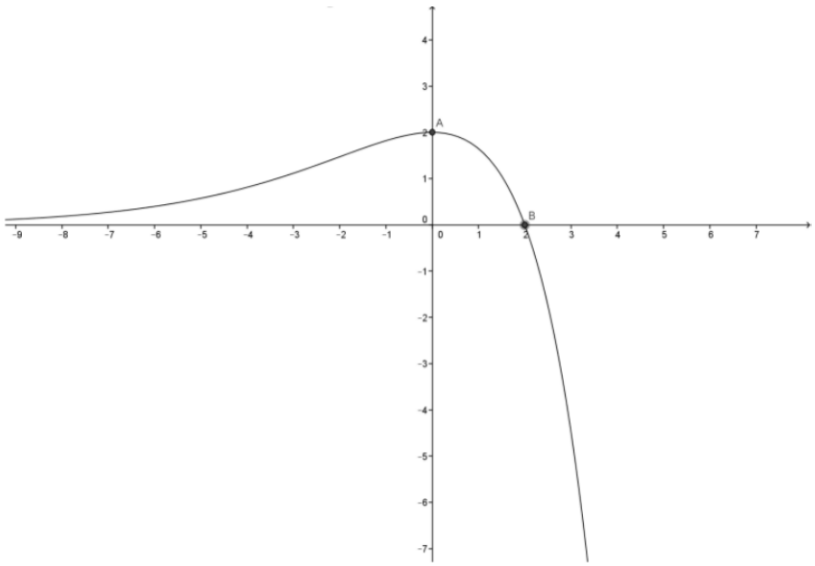
0,25 punts per la primera recta tangent.

0,25 punts per la segona recta tangent.

53. PAU 2014 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 6

6. Responeu a les qüestions següents:

a) La funció $f(x) = (b - x)e^{ax}$, amb a i b constants, té la representació gràfica següent



i sabem que passa pels punts $A = (0,2)$ i $B = (2,0)$, i que en el punt A la recta tangent a la gràfica és horitzontal. Calculeu els valors de a i b.

[1 punt]

b) Calculeu $\int_1^2 x \cdot \ln x \, dx$.

[1 punt]

Resolució:

a) Tenim $f(x) = (b - x)e^{ax}$.

Que la gràfica passi pel punts $A = (0,2)$ vol dir $f(0) = 2$. És a dir $f(0) = b = 2$.

Per tant la funció té l'expressió $f(x) = (2 - x)e^{ax}$.

Anàlogament, si la gràfica passa per $B = (2,0)$, aleshores $f(2) = 0$, independentment del valor del paràmetre a.

Per altra banda, si en el punt A, la recta tangent a la gràfica és horitzonal, aleshores $f'(0) = 0$.

Calculem $f'(x)$.

$$f'(x) = -1 \cdot e^{ax} + (2 - x) \cdot ae^{ax}$$

I substituïm en $x = 0, f'(0) = -1 + 2a = 0$. I per tant $a = {}^1/_2$.

Així doncs la funció és $\boxed{f(x) = (2 - x)e^{x/2}}$.

b) Per a calcular $\int_1^2 x \cdot \ln\, x\ dx$, calcularem primer una primitiva de l'integrand, que serà una integral per parts, i després aplicarem la regla de Barrow.

$$\int x \ln\, x\ dx = \left.\begin{cases} u = \ln x & du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = xdx & v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}\right\} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

Per tant

$$\int_1^2 x \cdot \ln\, x\ dx = \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right)\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 1 - \left(-\frac{1}{4}\right) = \boxed{2\ln 2 - \frac{3}{4}.}$$

Apartat a)

0,25 punts per la primera condició i càlcul de la b.

0,25 punts per la funció derivada.

0,25 punts per la condició de màxim relatiu.

0,25 punts pel càlcul de la a.

Apartat b)

0,25 punts per la identificació dels elements de la integral per parts

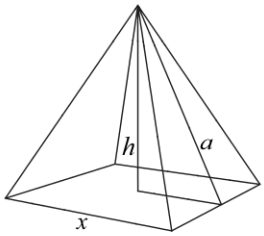
0,25 punts per l'aplicació de la fórmula d'integració per parts.

0,25 punts per la resolució de la següent integral.

0,25 punts per l'aplicació de la regla de Barrow.

54. PAU 2013 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 6

6.-Volem construir una tenda en forma de piràmide regular de base quadrada. Disposem de $300\,m^2$ ***de tela per a la fabricació de les quatre cares de la tenda (se suposa que en l'elaboració de les cares no es perd gens de tela). Designem*** x ***la longitud d'un costat de la base de la tenda.***



(a) ***Sabent que el volum d'una piràmide és igual a un terç del producte de l'àrea de la base per l'altura, comproveu que, en aquest cas,***

$$V(x) = \frac{x\sqrt{9 \cdot 10^4 - x^4}}{6}\,.$$

(b) ***Determineu el valor de*** x ***perquè el volum sigui el més gran possible (no cal que comproveu que el valor obtingut correspon realment a un màxim).***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Anomenem a a l'altura d'una de les cares de la tenda, tal com està indicat al dibuix. Llavors, la superfície total de les quatre cares de la tenda és $S(x) = 4\left(\dfrac{ax}{2}\right) = 2ax$. Com que aquesta superfície és de $300\,m^2$, tenim que $2ax = 300$, és a dir, $a = \dfrac{150}{x}$.

Per altra banda, d'acord amb el teorema de Pitàgores, $a^2 = h^2 + (x/2)^2$. Per tant,

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{150}{x}\right)^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{9 \cdot 10^4 - x^4}}{2x}\,.$$

Amb això,

$$V(x) = \frac{1}{3}x^2 h = \frac{x\sqrt{9 \cdot 10^4 - x^4}}{6}\,.$$

(b) Per a determinar el valor de x que fa màxim el volum, hem de derivar la funció volum i determinar els punts on la derivada s'anul·li.

$$V'(x) = \frac{1}{6}\left[\sqrt{9 \cdot 10^4 - x^4} + \frac{x}{2\sqrt{9 \cdot 10^4 - x^4}}\left(-4x^3\right)\right] = \frac{3 \cdot 10^4 - x^4}{2\sqrt{9 \cdot 10^4 - x^4}}\,.$$

Aquesta derivada val zero quan $x = \sqrt[4]{3 \cdot 10^4} = 10\sqrt[4]{3} \simeq 13,1607$.

També es pot treballar amb la funció $f(x) = x^2(9 \cdot 10^4 - x^4)$, resultat d'haver descartat els factors constants i haver elevat al quadrat la funció volum. Amb ella,

$$f'(x) = 18 \cdot 10^4 x - 6x^5\,; \quad f'(x) = 0 \Longrightarrow x = 0 \;\text{ o }\; x = 10\sqrt[4]{3}\,.$$

La primera d'aquestes solucions és absurda (si $x = 0$ no hi ha tenda) i la segona és la resposta correcta.

Pautes de Correcció

Apartat a

0,25 punts per la relació $2ax = 300$.

0,25 punts per la relació entre h, a i x.

0,25 punts per trobar el valor de h en funció de x.

0,25 punts per l'expressió definitiva de la funció volum.

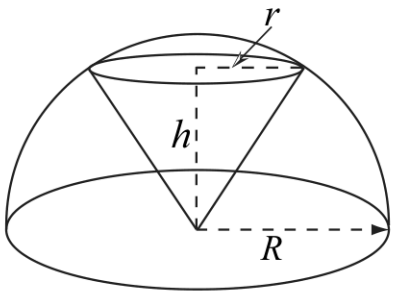
Apartat b

0,5 punts pel càlcul de la derivada, tant si treballen amb $V(x)$ o amb la funció "quadrat", $f(x)$.

0,5 punts per trobar el valor de x.

55. PAU 2013 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 5

5.- En una semiesfera de radi R inscrivim un con situant el seu vèrtex al centre de la semiesfera, tal com es veu en el dibuix.



(a) ***Sabent que el volum d'un con és igual a l'àrea de la seva base multiplicada per la seva altura i dividida per tres, comproveu que, en aquest cas, podem expressar el volum com*** $V = \dfrac{\pi \cdot h}{3}\left(R^2 - h^2\right)$.

(b) ***Trobeu les dimensions d'aquest con (radi de la base i altura) perquè el seu volum sigui màxim, comprovant que es tracta realment d'un màxim.***

[0,5 punts per l'apartat a; 1,5 punts per l'apartat b]

Solució

(a) D'acord amb el que se'ns recorda a l'enunciat, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Al dibuix hi podem trobar un triangle rectangle de catets h i r i hipotenusa R. Llavors,

$$h^2 + r^2 = R^2 \Longrightarrow r^2 = R^2 - h^2 \Longrightarrow V(h) = \frac{1}{3}\pi(R^2 - h^2)h\,,$$

tal com volíem.

(b) Busquem la derivada de la funció volum respecte de la variable h,

$$V(h) = \frac{\pi}{3}\left(R^2 h - h^3\right) \Longrightarrow V'(h) = \frac{\pi}{3}\left(R^2 - 3h^2\right).$$

L'equació $V'(h) = 0$ ens porta a què $h = \pm\dfrac{R}{\sqrt{3}} = \pm\dfrac{R\sqrt{3}}{3}$. No considerem la solució negativa perquè dins del problema no té cap significat.

Amb això, $r = \sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{R^2 - \dfrac{R^2}{3}} = R\sqrt{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{R\sqrt{6}}{3}$.

Per comprovar que és realment un màxim, calculem la derivada segona de la funció volum, $V''(h) = -2\pi h$, i analitzem el seu signe en el valor trobar per a l'altura. Com que $V''\left(\dfrac{R\sqrt{3}}{3}\right) < 0$, es tracta d'un màxim.

La comprovació que és un màxim es pot realitzar també estudiant el signe de la primera derivada abans i després del valor trobat per a h (abans ha de ser positiva i després negativa).

56. PAU 2013 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 6

6.- Sigui $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$***. Sabem que la gràfica d'aquesta funció és tangent a la recta*** $r : y = x + 3$ ***en el punt d'abscissa*** $x = -1$ ***i que en el punt d'abscissa*** $x = 1$ ***la recta tangent és paral·lela a la recta*** r***.***

Calculeu el valor dels paràmetres a***,*** b ***i*** c***.***

[2 punts]

Solució

Una recta és tangent a una corba en un punt si recta i corba tenen el mateix valor i la mateixa derivada en el punt. Per tant,

$$f(-1) = 2 \quad \text{i} \quad f'(-1) = 1\,.$$

El que en $x = 1$ la tangent sigui paral·lela a la recta que ens han donat (és a dir, que aquesta nova tangent tingui el mateix pendent que $y = x + 3$) ens permet assegurar que $f'(1) = 1$.

Com que $f'(x) = 3x^2 + 2a + b$, tenim que

$$f(-1) = 2 \Longrightarrow -1 + a - b + c = 2\,; \quad f'(-1) = 1 \Longrightarrow 3 - 2a + b = 1\,; \quad f'(1) = 1 \Longrightarrow 3 + 2a + b = 1\,.$$

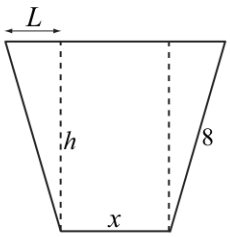
El sistema d'equacions lineals

$$\left.\begin{array}{rrrrl} a & - b & + c & = & 3 \\ -2a & + b & & = & -2 \\ 2a & + b & & = & -2 \end{array}\right\}$$

té per solució $a = 0$, $b = -2$, $c = 1$.

57. PAU 2013 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 4

4.- Es vol construir un canal que tingui com a secció un trapezi isòsceles de manera que l'amplada superior del canal sigui el doble de l'amplada inferior i que els costats no paral·lels siguin de 8 metres. Sota hi teniu un esquema de la secció del canal.



(a) ***Trobeu el valor del segment assenyalat com a L en el dibuix, en funció de la variable x (amplada inferior del canal).***

(b) ***Sabem que l'àrea d'un trapezi és igual a la seva altura multiplicada per la semisuma de les seves bases. Comproveu que, en aquest cas, l'àrea de la secció ve donada per***

$$A(x) = \frac{3x\sqrt{256 - x^2}}{4}\,.$$

(c) ***Calculeu el valor de x perquè l'àrea de la secció del canal sigui màxima (no cal que comproveu que és realment un màxim).***

[0,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b; 1 punt per l'apartat c]

Solució

(a) Siguin $b_1 = x$ i $b_2 = 2x$ les dues bases del trapezi. Es compleix que $L + b_1 + L = b_2$. Per tant, $L = x/2$.

(b) L'altura del trapezi, d'acord amb el teorema de Pitàgores, compleix que $h^2 + L^2 = 8^2$. D'aquí se'n dedueix que

$$h(x) = \frac{\sqrt{256 - x^2}}{2}\,.$$

Llavors, l'àrea és

$$A(x) = \frac{b_1 + b_2}{2}\,h = \frac{3x}{2}\cdot\frac{\sqrt{256 - x^2}}{2} = \frac{3x\sqrt{256 - x^2}}{4}\,,$$

tal com volíem.

(c) La derivada de la funció $A(x)$ és

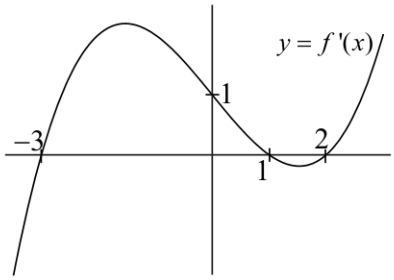
$$A'(x) = \frac{3}{4}\left[\sqrt{256 - x^2} + \frac{x}{2\sqrt{256 - x^2}}\,(-2x)\right] = \frac{3(256 - 2x^2)}{4\sqrt{256 - x^2}}\,.$$

Llavors, $A'(x) = 0$ implica que $x = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$.

També és possible treballar amb la funció $f(x) = x^2(256 - x^2)$, resultat d'haver elevat la funció àrea al quadrat i haver eliminar els factors constants.

58. PAU 2013 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 6

6.- La funció $f(x)$ ***és derivable i passa per l'origen de coordenades. La gràfica de la seva funció derivada és la que veieu aquí dibuixada, essent*** $f'(x)$ ***creixent als intervals*** $(-\infty, -3]$ ***i*** $[2, +\infty)$**.**



(*a*) ***Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció*** $f(x)$ ***en el punt d'abscissa*** $x = 0$ **.**

(*b*) ***Indiqueu les abscisses dels extrems relatius de la funció*** $f(x)$**, classificant aquests extrems.**

[1 punt per cada apartat]

Solució

(*a*) L'equació de la recta tangent a la gràfica de $y = f(x)$ en el punt d'abscissa a és $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. De l'enunciat, sabem que $f(0) = 0$ ("passa per l'origen de coordenades") i de la gràfica en deduïm que $f'(0) = 1$. Llavors, l'equació de la recta buscada és $y = 0 + 1(x - 0)$; és a dir, $y = x$.

(*b*) Com que la funció $f(x)$ és derivable, els punts candidats a ser els seus extrems relatius tindran la derivada igual a zero. D'acord amb el gràfic, les abscisses d'aquests punts són $x_1 = -3$, $x_2 = 1$ i $x_3 = 2$.

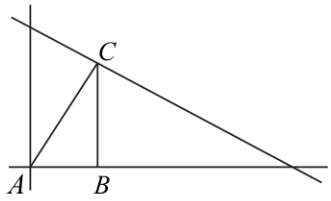
• En $x_1 = -3$ hi tenim un mínim, ja que en ell la funció derivada passa de ser negativa a ser positiva (és a dir, la funció $f(x)$ passa de ser decreixent a ser creixent).

• En $x_2 = 1$ hi ha un màxim. En efecte, la derivada passa de ser positiva (funció creixent) a ser negativa (funció decreixent).

• En $x_3 = 2$ torna a haver un mínim, per la mateixa raó que en x_1.

59. PAU 2013 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 6

6.- Un triangle rectangle situat en el primer quadrant té el vèrtex A en l'origen de coordenades, el vèrtex $B = (x, 0)$ en el semieix positiu d'abscisses i el vèrtex C pertany a la recta $x + 2y = 8$. L'angle recte és el que correspon al vèrtex B.



(a) ***Comproveu que l'àrea del triangle es pot expressar com*** $A(x) = 2x - \dfrac{x^2}{4}$ ***.***

(b) ***Trobeu els vèrtexs*** B ***i*** C ***perquè l'àrea del triangle sigui màxima i comproveu que es tracta realment d'un màxim.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Sigui $B = (x, 0)$. Llavors el punt C és $C = (x, f(x)) = \left(x, \dfrac{8-x}{2}\right)$. Com que el triangle és rectangle, podem agafar com a base el costat $\overline{AB}$ i com a altura el costat $\overline{BC}$ (els catets del triangle). Llavors,

$$A(x) = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{x \cdot \dfrac{8-x}{2}}{2} = \frac{8x - x^2}{4} = 2x - \frac{x^2}{4}\,.$$

(b) Per trobar els extrems d'aquesta funció, trobarem els punts on la seva derivada és nul·la.

$$A'(x) = 2 - \frac{x}{2}\,; \qquad A'(x) = 0 \iff x = 4\,.$$

Llavors, els vèrtexs del triangle són $B = (4, 0)$ i $C = (4, 2)$.

Comprovem ara que és un màxim. Calculem la segona derivada de la funció àrea, $A''(x) = -\dfrac{1}{2} < 0$. Com que aquest valor és negatiu, es tracta d'un màxim.

Una altra manera de decidir que és un màxim consisteix en estudiar el signe de $A'(x)$ abans del valor $x = 4$ (signe positiu) i després d'aquest valor (signe negatiu).

També es pot raonar que la funció $A(x)$ és una paràbola amb el coeficient de x^2 negatiu i que, per tant, el seu vèrtex (l'extrem relatiu) correspon a un màxim.

60. PAU 2012 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 4

4.- Una fàbrica produeix diàriament x tones d'un producte A i $(40-5x)/(10-x)$ tones d'un producte B. La quantitat màxima de producte A que es pot produir és 8 tones. El preu de venda del producte A és 100€ per tona i el del producte B és 250€ per tona.

(a) ***Construïu la funció de la variable x que ens proporciona els ingressos diaris, suposant que es ven tota la producció.***

(b) ***Calculeu quantes tones de cada producte s'han de produir diàriament per a obtenir el màxim d'ingressos, i comproveu que és realment un màxim relatiu.***

[0,5 punts per l'apartat a; 1,5 punts per l'apartat b]

Solució

(a) D'acord amb l'enunciat, la funció que ens dóna els guanys diaris és

$$f(x) = 100x + 250\,\frac{40-5x}{10-x}\,.$$

(b) Per tal de localitzar el màxim benefici cal derivar la funció anterior i igualar la derivada a zero.

$$f(x) = 100x + 250\,\frac{40-5x}{10-x} \Longrightarrow f'(x) = \frac{100x^2 - 2000x + 7500}{(10-x)^2}\,.$$

Llavors,

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 100x^2 - 2000x + 7500 = 0 \Longrightarrow x^2 - 20x + 75 = 0 \Longrightarrow x = 5\,,\ x = 15\,.$$

61. PAU 2012 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 6

6.- Donades la recta $y = ax + 1$ i la paràbola $y = 3x - x^2$,

(a) ***Calculeu els valors del paràmetre a perquè siguin tangents.***

(b) ***Calculeu els punts de tangència.***

[1,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b]

Solució

(a) Posem $y_1 = ax + 1$ i $y_2 = 3x - x^2$.

Solució 1

Perquè siguin tangents en un punt d'abscissa x, cal que $y_1(x) = y_2(x)$ i $y_1'(x) = y_2'(x)$. És a dir,

$$ax + 1 = 3x - x^2\,; \qquad a = 3 - 2x\,.$$

Substituint el valor de a, donat a la segona equació, dins la primera equació, ens queda que $x = \pm 1$. Per $x = 1$ el valor de a és $a = 1$ i per $x = -1$ ens queda $a = 5$.

Solucio2

Es pot imposar que la recta i la paràbola es "tallin" en un sol punt doble. Perquè això sigui així, l'equació $ax + 1 = 3x - x^2$ ha de tenir una sola solució; és a dir, el seu discriminant ha de ser nul. L'equació és $x^2 + (a-3)x + 1 = 0$ i el discriminant $\Delta = (a-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1$. Llavors,

$$(a-3)^2 - 4 = 0 \iff a^2 - 6a + 5 = 0 \iff a = 1 \text{ o } a = 5\,.$$

(b) D'acord amb els valors de la variable x trobats a l'apartat anterior (solució 1) o els que es podem trobar donant a a els valors 1 i 5 (solució 2), tenim

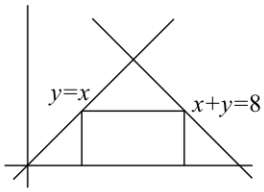
- Per a $a = 1$ (corresponent a $x = 1$), el punt de tangència és $P_1 = (1, 2)$.
- Quan $a = 5$ (que correspon a $x = -1$), el punt de tangència és $P_2 = (-1, -4)$.

62. PAU 2012 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4

4.- Un rectangle està inscrit en el triangle que té els costats en les rectes d'equacions

$$y = 3x\,, \quad x + y = 6\,, \quad y = 0\,,$$

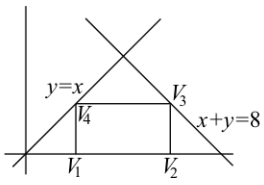
i té un costat sobre la recta $y = 0$ ***. Trobeu-ne els vèrtexs perquè la superfície sigui màxima.***



[2 punts]

Solució 1

Siguin $V_1 = (a, 0)$ i $V_2 = (b, 0)$ els vèrtexs del rectangle que es troben a l'eix OX (la recta $y = 0$), amb $a < b$. Llavors, el vèrtex que es troba a la recta $y = x$, és de la forma $V_4 = (a, a)$; l'altre vèrtex, el que es troba a la recta $x + y = 8$, és de la forma $V_3 = (b, 8-b)$. Com que els vèrtexs V_3 i V_4 han d'estar a la mateixa altura, cal que $a = 8 - b$.



La longitud de la base del rectangle és $b - a$ i la seva altura és $a = 8 - b$. En conseqüència la seva superfície és

$$S = (b-a) \cdot a = (b - 8 + b) \cdot (8 - b) = -2b^2 + 24b - 64\,.$$

Per trobar el màxim, derivem la funció superfície i igualem la derivada a zero.

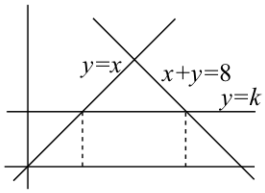
$$S'(b) = 24 - 4b\,; \quad 24 - 4b = 0 \Longrightarrow b = 6 \Longrightarrow a = 2\,.$$

Podem comprovar que el valor $b = 6$ correspon a un màxim utilitzant la segona derivada ($S''(b) = -24 < 0$), o bé argumentant que la funció superfície té per gràfica una paràbola amb coeficient de x^2 negatiu. També es pot fer comprovant el signe de la funció derivada abans (surt positiu) i després (és

Els quatre vèrtex són $V_1 = (2,0)$, $V_2 = (6,0)$, $V_3 = (6,2)$, $V_4 = (2,2)$.

Solució 2

Sigui $y = k$ la recta on està el costat del rectangle paral·lel al que es troba a l'eix OX.



Els vèrtexs sobre la recta $y = k$ són (k,k) i $(8-k,k)$. Les seves projeccions ortogonals sobre l'eix OX, que són els altres dos vèrtexs, donen $(k,0)$ i $(8-k,0)$. La base del rectangle és $(8-k)-k = 8-2k$ i la seva altura és, evidentment, k. Llavors, la funció que ens dóna l'àrea del rectangle és

$$f(k) = (8-2k)k = 8k - 2k^2\,.$$

La seva derivada és $f'(k) = 8 - 4k$. Quan la igualem a zero, s'obté $k = 2$. Els quatre vèrtexs són els trobats a la solució 1. La comprovació de què es tracta realment d'un màxim es realitza de la mateixa forma que en la solució anterior.

63. PAU 2012 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 2

2.- Donades la recta $y = 3x + b$ ***i la paràbola*** $y = x^2$***,***

(a) ***Calculeu l'abscissa del punt on la recta tangent a la paràbola és paral·lela a la recta***

(b) ***Trobeu el valor del paràmetre*** b ***perquè la recta sigui tangent a la paràbola.***

[1 punt per apartat]

Solució

Posarem $y_1(x) = 3x + b$ i $y_2(x) = x^2$.

(a) Una condició necessària i suficient perquè dues rectes siguin paral·leles és que els seus pendents siguin iguals. Com que el pendent de la recta és $m_r = y_1'(x) = 3$ (també es pot trobar directament com a coeficient de la variable x, ja que es dóna l'equació explícita de la recta) i la derivada de la paràbola és $y_2'(x) = 2x$, la recta donada i la recta tangent són paral·leles en el punt on $3 = 2x$, és a dir, en el punt on l'abscissa valgui $x = 3/2$.

(b) L'únic punt on la recta i la paràbola podem ser tangents és el punt d'abscissa $x = 3/2$. Ho seran si i sol si $y_1(3/2) = y_2(3/2)$, que succeeix quan $b = -9/4$.

64. PAU 2012 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 5

5.- Un triangle equilàter de vèrtexs A, B i C té els costats de $8\,cm$. Situem un punt P sobre una de les altures del triangle a una distància x de la base corresponent.

(a) Calculeu l'altura del triangle de vèrtexs A, B i C.

(b) Indiqueu la distància del punt P a cada un dels vèrtexs (en funció de x).

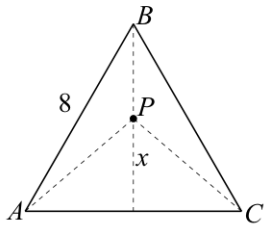
(c) Determineu el valor de x perquè la suma dels quadrats de les distàncies del punt P a cadascun dels tres vèrtexs sigui mínima.

[0,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b; 1 punt per l'apartat c]

Solució

(a) Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle resultant d'agafar la meitat del triangle equilàter, tindrem que

$$h = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}\,.$$



També podem treballar amb trigonometria,

$$\sin 60^o = \frac{h}{8} \iff h = 8\sin 60^o = 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\,.$$

(b) Les distàncies demanades són

$$d(P,A) = d(P,C) = \sqrt{4^2 + x^2} = \sqrt{16 + x^2}\,; \quad d(P,B) = h - x = 4\sqrt{3} - x\,.$$

(c) La funció que es vol fer mínima és $f(x) = (d(P,A))^2 + (d(P,B))^2 + (d(P,C))^2$, és a dir,

$$f(x) = 2(16 + x^2) + (4\sqrt{3} - x)^2 = 3x^2 - 8\sqrt{3}x + 80\,.$$

Per tal de trobar el mínim d'aquesta funció, cal igualar la seva deriva a zero. Com que $f'(x) = 6x - 8\sqrt{3}$, l'equació $f'(x) = 0$ proporciona $x = \dfrac{8\sqrt{3}}{6} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Per ser $f''(x) = 6 > 0$, podem assegurar que es tracta realment d'un mínim, tal com es volia.

65. PAU 2011 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 3

3.- Donada la funció $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$***:***

(a) Determineu la relació que han de complir els paràmetres a***,*** b ***i*** c ***perquè*** $f(x)$ ***tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa*** $x = -1$ ***.***

(b) Calculeu el valor del paràmetre a ***perquè hi hagi un punt d'inflexió de la funció*** $f(x)$ ***en el punt d'abscissa*** $x = 0$ ***.***

(c) Determineu la relació entre els paràmetres a***,*** b ***i*** c ***sabent que la gràfica de*** $f(x)$ ***talla l'eix*** OX ***en el punt d'abscissa*** $x = -2$***.***

(d) Calculeu el valor dels paràmetres a***,*** b ***i*** c ***perquè es compleixin les tres propietats anteriors alhora.***

[0,5 punts per cada apartat]

Solució

(a) Perquè hi pugui haver un extrem relatiu de la funció en $x = -1$, cal que $f'(-1) = 0$. Com que $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$, la relació buscada és $3 - 2a + b = 0$.

(b) En un punt d'inflexió la segona derivada ha de ser zero. Tenim que $f''(x) = 6x + 2a$; per tant, $f''(0) = 2a = 0$. Llavors, $a = 0$.

(c) És clar que la condició és $f(-2) = -8 + 4a - 2b + c = 0$.

(d) Cal resoldre el sistema $3 - 2a + b = 0$, $a = 0$, $-8 + 4a - 2b + c = 0$. La solució és $a = 0$, $b = -3$ i $c = 2$.

$$\begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \end{pmatrix}$$

66. PAU 2011 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 6

6.- Sigui $f(a) = \int_0^{1/a} (a^2 + x^2)dx$ ***per*** $a > 0$ ***.***

(a) Comproveu que $f(a) = \dfrac{1}{3a^3} + a$ ***.***

(b) Calculeu el valor del paràmetre a ***perquè la funció*** $f(a)$ ***tingui un mínim relatiu.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) $f(a) = \displaystyle\int_0^{1/a} (a^2 + x^2)dx = \left[a^2x + \frac{x^3}{3}\right]_0^{1/a} = a^2 \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{3a^3} = a + \frac{1}{3a^3}$.

(b) Perquè la funció $f(a)$ tingui un mínim, és necessari que $f'(a) = 0$. Així,

$$f'(a) = 1 - \frac{1}{a^4} = 0 \Longrightarrow a^4 = 1 \Longrightarrow a = \pm 1\,.$$

La condició $a > 0$ fa que ens quedem solament amb $a = 1$.

La derivada segona de la funció és $f''(a) = 4/a^5$. Llavors, $f''(1) > 0$, la qual cosa indica que per a $a = 1$ hi ha un mínim.

67. PAU 2011 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 6

6.- Sigui $f(x) = x^2 e^{-ax}$ ***, quan*** $a \neq 0$ ***.***

(a) Calculeu el valor de a ***perquè aquesta funció tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa*** $x = 2$ ***.***

(b) Quan $a = 2$***, classifiqueu-ne els extrems relatius.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) La condició necessària perquè una funció tingui un extrem relatiu en un punt és que la primera derivada en ell valgui zero. Busquem la primera derivada de la funció $f(x)$.

$$Df(x) = 2xe^{-ax} + x^2(-ae^{-ax}) = e^{-ax}(2x - ax^2)\,.$$

Llavors, $Df(x) = 0$ si i sol si $x = 0$ o $x = 2/a$ ja que la funció exponencial és sempre diferent de zero. Si volem que la funció tingui un extrem relatiu en $x = 2$, cal que $a = 1$.

NOTA: De fet és necessari encara comprovar que $D^2 f(2) \neq 0$. Com que $D^2 f(x) = e^{-ax}(2 - 4ax + a^2x^2)$, és clar que per $a = 1$ el valor de $D^2 f(2)$ no és zero.

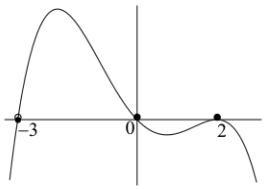
(b) Podem aprofitar la feina feta a l'apartat anterior: quan $a = 2$, tenim que la funció pot tenir extrems en $x = 0$ i en $x = 2/2 = 1$.

D'altra banda, quan $a = 2$, $D^2 f(x) = e^{-2x}(2 - 8x + 4x^2)$. Com que $D^2 f(0) = 2 > 0$, en el punt d'abscissa $x = 0$ hi ha un mínim; així mateix la desigualtat $D^2 f(1) = -2e^{-2} < 0$ ens diu que en el punt d'abscissa $x = 1$ hi ha un màxim.

Igual que a la qüestió 3, la classificació dels extrems es pot realitzar estudiant el signe de la derivada abans i després dels punts trobats.

68. PAU 2011 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 3

3.- La gràfica corresponent a la derivada d'una funció $f(x)$ és la següent:



(a) Expliqueu raonadament quins valors de x corresponen a màxims o a mínims relatius de $f(x)$.

(b) Determineu els intervals de creixement i decreixement de la funció $f(x)$.

[1,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b]

Solució

(a) Perquè la funció $f(x)$ tingui un extrem relatiu en un punt, és necessari que la seva derivada valgui zero en aquest punt. D'acord amb la gràfica, això passa per $x = -3$, $x = 0$ i $x = 2$.

Abans del punt $x = -3$, la funció derivada és negativa i després és positiva; això vol dir que en aquest punt hi tenim un mínim relatiu.

Amb un raonament paral·lel podem comprovar que en $x = 0$ la funció $f(x)$ té un màxim relatiu i en el punt $x = 2$ no hi ha ni màxim ni mínim (la derivada és negativa als dos costats); de fet, en aquest punt hi ha un punt d'inflexió.

(b) D'acord amb els signes de la derivada,

- La funció $f(x)$ és creixent a l'interval $(-3, 0)$.
- La funció $f(x)$ és decreixent a $(-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$.

69. PAU 2011 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 6

6.- Dins d'un triangle rectangle, de catets 3 i 4 cm, hi ha un rectangle. Dos costats del rectangle estan situats en els catets del triangle i un dels vèrtex del rectangle és a la hipotenusa del triangle.

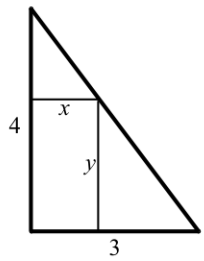
(a) Feu un esbós de la situació descrita.

(b) Si x és la longitud del costat del rectangle que està situat en el catet petit i y és l'altre costat del rectangle, comproveu que es compleix que $4x + 3y = 12$.

(c) Determineu les dimensions del rectangle perquè la seva àrea sigui màxima.

[2 punts]

(a) La gràfica de la situació és



(b) Per semblança de triangles, $\dfrac{4}{3} = \dfrac{4-y}{x}$. És a dir, $4x+3y = 12$. Hi ha altres relacions de semblança que ens porten a la mateixa relació; per exemple, $\dfrac{4}{3} = \dfrac{y}{3-x}$.

També es pot arribar a la relació entre x i y utilitzant geometria en el pla. En efecte, podem considerar com a eixos de coordenades les rectes que contenen els catets. Llavors, la recta que conté la hipotenusa passa pels punts $(3,0)$ i $(0,4)$; per tant, la seva equació és

$$\frac{x-3}{0-3} = \frac{y-0}{4-0}, \quad \text{és a dir,} \quad 4x+3y = 12\,.$$

Com que el punt (x,y) pertany a aquesta recta, ha de complir la seva equació.

(c) De la relació trobada a l'apartat anterior se'n dedueix, per exemple, que $y = \dfrac{12-4x}{3}$. Llavors, l'àrea del rectangle és

$$A = x \cdot y = x \cdot \frac{12-4x}{3} = \frac{12x-4x^2}{3}\,.$$

Per tenir un valor màxim, cal que la primera derivada sigui nul·la.

$$A' = \frac{12-8x}{3}\,; \quad A' = 0 \iff 12-8x = 0 \iff x = \frac{3}{2}\,.$$

Llavors, $y = \dfrac{12-4(3/2)}{3} = 2$. Les dimensions del rectangle buscat són $3/2$ de base i 2 d'altura.

70. PAU 2010 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 3

3.- Considereu tots els prismes rectes de base quadrada amb un volum V fixat. Anomeneu x el costat de la base del prisma i y a la seva altura. Es demana:

(a) ***Trobeu l'expressió del volum i de l'àrea total del prisma en funció de les variables x i y.***

(b) ***Comproveu que el que té àrea total mínima és en realitat un cub.***

[0,5 punts per l'apartat a; 1,5 punts per l'apartat b]

Solució

Amb les notacions de l'enunciat,

$$V = x^2 y \ ; \quad A = 2x^2 + 4xy \ .$$

Aïllant el valor de la variable y de l'expressió del volum, $y = V/x^2$. Substituint aquest valor a l'expressió que ens dóna l'àrea obtenim

$$A = 2x^2 + 4x\frac{V}{x^2} = 2x^2 + \frac{4V}{x} \ .$$

Per trobar el valor mínim de l'àrea, derivem aquesta expressió respecte de x i la igualem a zero.

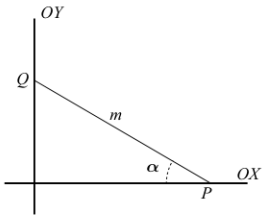
D'aquí $y = \dfrac{V}{x^2} = \dfrac{V}{\sqrt[3]{V^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{V^3}{V^2}} = \sqrt[3]{V}$. En definitiva, $y = x$ i el prisma és un cub.

Per comprovar que es tracta realment d'un mínim, cal trobar la segona derivada de la funció àrea i veure quin signe té per al valor $x = \sqrt[3]{V}$:

$$A'' = 4 + \frac{8V}{x^3} \Longrightarrow A''(\sqrt[3]{V}) > 0 \ .$$

71. PAU 2010 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3

3.- Un segment de longitud fixada m recolza sobre els eixos de coordenades. Calculeu el valor de l'angle α que forma el segment amb l'eix OX perquè el triangle rectangle determinat pel segment amb els eixos i del qual m és la hipotenusa tingui àrea màxima. Comproveu que es tracta realment d'un màxim.



[2 punts]

Solució 1

Siguin $P=(x,0)$ i $Q=(0,y)$ els punts on el segment toca als eixos de coordenades. Llavors, és evident que $x^2+y^2=m^2$ i que $A=\dfrac{x\cdot y}{2}$. De la primera igualtat, $y=\sqrt{m^2-x^2}$. Substituint aquest valor a la fórmula que ens dóna l'àrea, ens queda $A=\dfrac{x\cdot\sqrt{m^2-x^2}}{2}$. Ara cal trobar el valor de la derivada, o bé de la funció $A(x)$ o bé de la funció $B(x)=[A(x)]^2$, la qual permet simplificar el càlcul de la derivada, sense canviar el resultat.

$$A'(x)=\frac{\sqrt{m^2-x^2}}{2}-\frac{x^2}{2\sqrt{m^2-x^2}}=\frac{m^2-2x^2}{2\sqrt{m^2-x^2}}\ ;\quad B'(x)=\frac{2x(m^2-x^2)-2x^3}{4}=\frac{x(m^2-2x^2)}{2}\ .$$

$A'(x)=0$ té com a solució $x=\pm\dfrac{m}{\sqrt{2}}$ i $B'(x)=0$ admet a més a a més, la solució $x=0$. Tant la solució nul·la com la negativa no tenen sentit en aquest exercici. Per tant, ha de ser $x=\dfrac{m}{\sqrt{2}}$. Llavors,

$$y=\sqrt{m^2-x^2}=\sqrt{m^2-\frac{m^2}{2}}=\sqrt{\frac{m^2}{2}}=\frac{m}{\sqrt{2}}\ .$$

Així, el triangle amb àrea màxima és isòsceles ($x=y$). O sigui, $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ $(=45^o)$.

Ara cal comprovar que es tracta realment d'un màxim. Per fer-ho calcularem la derivada segona de $A(x)$ o de $B(x)$, segons quina funció s'hagi utilitzat.

$$A''(x)=\frac{2x^3-3m^2x}{2(m^2-x^2)^{3/2}}\quad\text{d'on}\quad A''(m/\sqrt{2})=-2<0\ ;$$

$$B''(x)=\frac{m^2-6x^2}{2}\quad\text{i, per tant,}\quad B''(m/\sqrt{2})=-m^2<0\ .$$

D'una manera o de l'altra, la derivada segona negativa indica que es tracta d'un màxim.

Aquesta solució utilitza trigonometria, que no entra específicament al temari de les proves d'accés, però que l'alumne ha cursat al seu primer curs de batxillerat. Sigui P el punt on el segment toca a l'eix OX i Q el punt on el segment toca a l'eix OY. És clar que $P = (m \cdot \cos\alpha,\, 0)$ i que $Q = (0\,, m \cdot \sin\alpha)$. Llavors, l'àrea del triangle rectangle format pels eixos i el segment és

$$A = \frac{(m \cdot \cos\alpha) \cdot (m \cdot \sin\alpha)}{2} = \frac{m^2}{2} \cdot (\sin\alpha \cdot \cos\alpha).$$

Per trobar el seu valor màxim, busquem la derivada de A respecte de α, la igualem a zero i busquem les solucions de l'equació resultant, tenint en compte que ha de ser un angle del primer quadrant.

$$A' = \frac{m^2}{2} \cdot (\cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\alpha) = \frac{m^2}{2} \cdot (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \frac{m^2}{2} \cdot \cos(2\alpha)\ .$$

Llavors,

$$A' = 0 \iff \cos(2\alpha) = 0 \iff 2\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi\ (= 90^o + 180^o k) \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\ (= 45^o + 90^o k).$$

Com que α ha de ser del primer quadrant, la resposta és solament $\alpha = \dfrac{\pi}{4}\ (= 45^o)$.

Per comprovar que es tracta d'un màxim, busquem la derivada segona de l'àrea i l'avaluem en el punt trobat,

$$A'' = \frac{m^2}{2}(-\sin(2\alpha) \cdot 2) \Longrightarrow A''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -m^2 \cdot \sin\frac{\pi}{2} = -m^2 < 0\ .$$

En efecte, es tracta d'un màxim.

72. PAU 2010 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 3

3.- Sigui $P(x) = ax^2 + bx + c$ ***un polinomi qualsevol de segon grau.***

(a) ***Trobeu la relació existent entre els paràmetres*** a, b ***i*** c ***sabent que es compleix que*** $P(1) = 0$ ***i*** $P(2) = 0$.

(b) ***Quan es compleix la condició anterior, indiqueu quins valors pot tenir*** $P'(3/2)$.

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Com que $P(1) = a + b + c$ i $P(2) = 4a + 2b + c$, tenim el següent sistema,

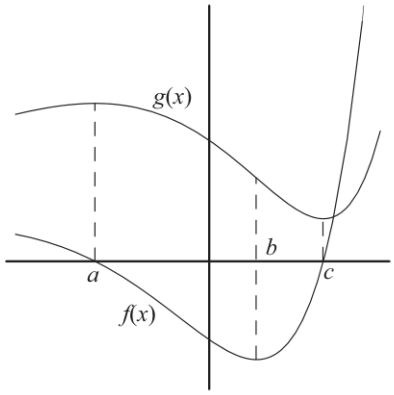
$$\left.\begin{array}{c} a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{array}\right\} \iff b = -3a\ , \quad c = 2a\ .$$

Aquestes són les relacions que s'han de verificar: $b = -3a$, $c = 2a$.

(b) La derivada del polinomi $P(x) = ax^2 - 3ax + 2a$ és $P'(x) = 2ax - 3a$. Per tant, $P'(3/2) = 0$ per tot valor del paràmetre a.

73. PAU 2010 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 5

5.- En la figura següent es representen dues funcions. L'una és la derivada de l'altra. Decidiu si la funció $f(x)$ ***és la derivada de la funció*** $g(x)$ ***o és a l'inrevés, estudiant què***



Solució

En $x = a$, la funció $g(x)$ té un màxim relatiu (per tant $g'(a) = 0$) i la funció $f(x)$ val zero ($f(a) = 0$).

En $x = b$ la funció $g(x)$ té un punt d'inflexió; per tant, la seva segona derivada en aquest punt val zero ($g''(b) = 0$). La funció $f(x)$ té un mínim relatiu en aquest mateix punt ($f'(b) = 0$).

Finalment, en $x = c$ la funció $g(x)$ té un mínim relatiu (un altre cop $g'(c) = 0$) i $f(c) = 0$.

Tot això ens permet assegurar que la funció $f(x)$ és la derivada de la funció $g(x)$.

74. PAU 2009 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 3

3.- Sigui $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 1$***. Donades les rectes*** $r_1 : y = x + 2$ ***i*** $r_2 : y = 7x - 2$***:***

a) ***Expliqueu, raonadament, si alguna de les dues rectes donades pot ser tangent a la corba*** $f(x)$ ***en algun punt.***

b) ***En cas què alguna d'elles ho sigui, trobeu el punt de tangència.***

[1 punt per cada apartat]

a) Una recta i una corba són tangents en un punt si les dues passen pel punt i tenen el mateix pendent en ell. El pendent de la corba en un punt és el valor de la derivada de la funció en el punt. Calculem aquesta derivada: $f'(x) = 6x^2 - 2x + 3$.

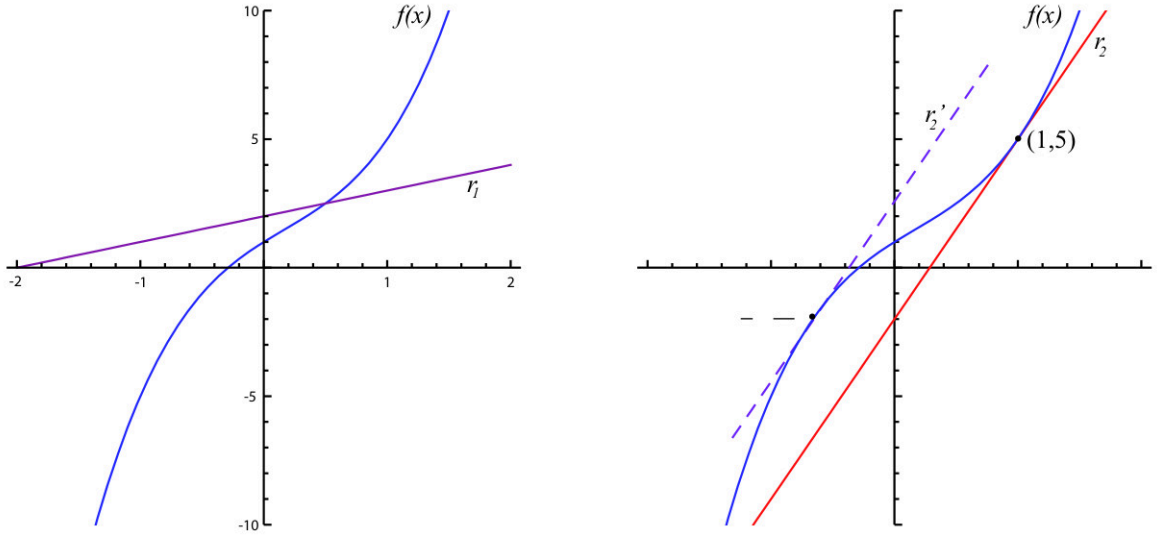
La recta r_1 pot ser tangent a la corba si i sol si existeix algun valor de x per al qual $f'(x) = 1$ (que és el valor del pendent de r_1). Com que l'equació $6x^2 - 2x + 3 = 1$ no té solucions (reals), la recta r_1 no pot ser tangent a la gràfica de $f(x)$.

Paral·lelament, la recta r_2 pot ser tangent a la corba si i sol si l'equació $6x^2 - 2x + 3 = 7$ té alguna solució. Com és fàcil veure, aquesta equació admet com a solucions $x = 1$ i $x = -2/3$. Per tant, la recta r_2 pot ser tangent a la gràfica de $f(x)$.

b) Per $x = 1$, la funció val $f(1) = 2 - 1 + 3 + 1 = 5$ i la recta r_1, $y = 7 - 2 = 5$; o sigui, tant la corba com la recta passen pel punt $(1, 5)$. Aquest és el punt de tangència.

Per $x = -2/3$ tenim que $f(-2/3) = -55/27$ i $y(-2/3) = -20/3$, la qual cosa indica que la recta i la corba, en aquest cas, no són tangents.

Les següents gràfiques il·lustren la situació de la funció i de les rectes donades.



En la de l'esquerra tenim la posició de la funció $f(x)$ i r_1, veient-se clarament que no poden ser tangents. En la de la dreta, la recta r_2 és tangent a la gràfica de $f(x)$ en el punt $(1, 5)$; la recta r_2' és paral·lela a r_2 (és a dir, té el mateix pendent) passant pel punt $(-2/3, -55/27)$, però, evidentment, no és r_2.

75. PAU 2009 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 5

PROBLEMES

5.- Sigui $f(x) = a + \dfrac{4}{x} + \dfrac{b}{x^2}$.

a) ***Calculeu els valors de*** a ***i*** b***, sabent que la recta*** $2x + 3y = 14$ ***és tangent a la gràfica de la funció*** $f(x)$ ***en el punt d'abscissa*** $x = 3$.

Per la resta d'apartats, considereu que $a = -3$ ***i que*** $b = 4$.

b) ***Trobeu els intervals de creixement i de decreixement de la funció*** $f(x)$. ***Trobeu i classifiqueu els extrems relatius que té la funció.***

c) ***Calculeu els punts de tall de la funció*** $f(x)$ ***amb l'eix*** OX.

d) ***Trobeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció*** $f(x)$, ***l'eix*** OX ***i les rectes*** $x = 1$ ***i*** $x = 3$.

[1 punt per l'apartat a; 1 punt per l'apartat b; 0,5 punts per l'apartat c; 1,5 punts per l'apartat d]

Solució

a) Perquè la recta $y = \dfrac{14 - 2x}{3}$ sigui tangent a $f(x)$ en el punt $x = 3$ cal que $f(3) = y(3)$ i que $f'(3) = y'(3)$. Tenint en compte que $f'(x) = -\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{2b}{x^3}$, ens queda el sistema d'equacions

$$a + \frac{4}{3} + \frac{b}{9} = \frac{8}{3} \quad \text{i} \quad -\frac{4}{9} - \frac{2b}{27} = -\frac{2}{3}\ ,$$

que té per solució $a = 1$ i $b = 3$.

b) La funció, quan $a = -3$ i $b = 4$, és $f(x) = -3 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{4}{x^2}$ i la seva derivada és $f'(x) = -\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{8}{x^3}$. Els possibles extrems relatius han de complir $f'(x) = 0$; de fet, aquesta equació solament té la solució $x = -2$. Cal tenir en compte, a més a més, que el punt $x = 0$ no és del domini de la funció. Així, per estudiar els intervals on la funció creix o decreix, haurem d'assenyalar sobre la recta real els punts $x = -2$ i $x = 0$,

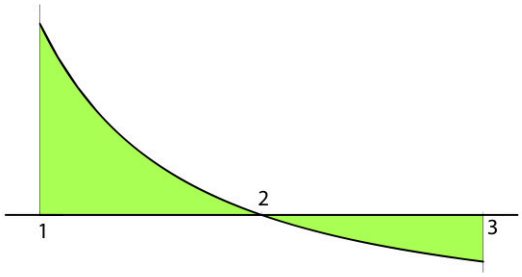
Com que $f'(-3) < 0$, $f'(-1) > 0$ i $f'(1) < 0$, podem assegurar que

- la funció $f(x)$ és creixent a $(-2, 0)$;
- la funció $f(x)$ és decreixent a $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$;
- la funció té un mínim relatiu en $x = -2$; és el punt $(-2, -4)$.

Cal notar que la funció no té extrem relatiu en $x = 0$ perquè aquest punt no és del domini.

c) Les abscisses dels punts de tall d'aquesta funció amb l'eix OX són les solucions de l'equació $f(x) = 0$ (és a dir, $-3 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{4}{x^2} = 0$). Aquestes solucions són $x = -2/3$ i $x = 2$.

d) Com que el punt de tall amb l'eix OX $x = 2$ està dins de l'interval d'integració, tal com es pot veure a la figura següent,



l'àrea demanada s'ha de calcular en dos trossos,

$$A = \int_1^2 \left(-3 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\right) dx + \int_2^3 \left(3 - \frac{4}{x} - \frac{4}{x^2}\right) dx = \left[-3x + 4\ln|x| - \frac{4}{x}\right]_1^2 + \left[3x - 4\ln|x| + \frac{4}{x}\right]_2^3$$
$$= \frac{4}{3} + 4\ln\frac{4}{3} \simeq 2,4841 \ .$$

76. PAU 2008 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 1

QÜESTIONS

1.- Considereu la funció $f(x) = ax^2 + x + b$ ***(*** $a, b \in R$ ***). Trobeu els valors de*** a ***i*** b ***que fan que la recta*** $y = 2x + 1$ ***sigui tangent a la gràfica de*** f ***quan*** $x = 1$***.***

PUNTUACIÓ: 2 punts.

Solució:

Si la recta donada és tangent a la gràfica de la funció f, es pot assegurar que $f(1) = y(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$. A més a més, $f'(1) = 2$. Utilitzant aquestes dues igualtats, i observant que $f'(x) = 2ax + 1$, s'arriba al sistema

$$\begin{cases} a + b + 1 = 3 \\ 2a + 1 = 2 \end{cases}$$

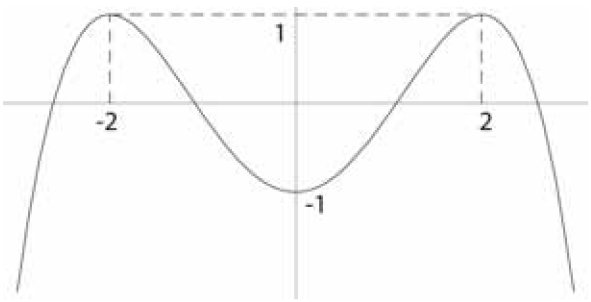
que té per solució $a = \dfrac{1}{2}$ i $b = \dfrac{3}{2}$.

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \end{array}\right.$$

77. PAU 2008 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 5

PROBLEMES

5.- Considereu una funció tal que la seva representació gràfica a l'interval $(-3,3)$ ***és***



a) ***Esbrineu les abscisses dels seus punts extrems (màxims i mínims) relatius.***

b) ***Estudieu el creixement i decreixement de la funció a l'interval*** $(-3,3)$***.***

c) ***Feu un esbós de la gràfica de la derivada d'aquesta funció.***

d) Sabent que la funció és de la forma $f(x)=ax^4+bx^2+c$, trobeu de quina funció es tracta.

PUNTUACIÓ:
Apartat a) 0.5 punts; apartat b) 0.5 punts; apartat c) 1 punt; apartat d) 2 punts.

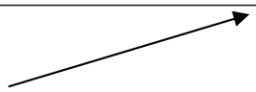
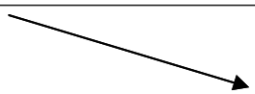
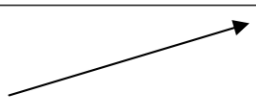
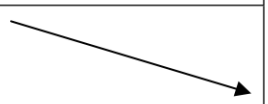
Solució:

a) És fàcil observar que els màxims relatius es troben quan $x=-2$ i $x=2$. El mínim relatiu té abscissa $x=0$.

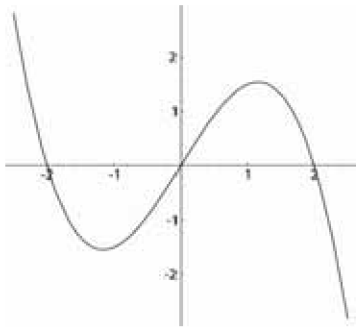
b) D'acord amb la gràfica, la funció és

- creixent a $(-3,-2)\cup(0,2)$.
- decreixent a $(-2,0)\cup(2,3)$.

Gràficament,

(-3,-2)	(-2,0)	(0,2)	(2,3)
			

c) La gràfica de la derivada és



d) Sabem que $f(-2)=1$, $f(2)=1$, $f'(-2)=0$, $f'(2)=0$, $f'(0)=0$ i $f(0)=-1$. És a dir, tenim el sistema lineal

$$\left.\begin{aligned} 16a+4b+c&=1\\ 16a+4b+c&=1\\ -32a-4b&=0\\ 32a+4b&=0\\ c&=-1\end{aligned}\right\}$$ que té per solucions $a=-1/8$, $b=1$ i $c=-1$.

O sigui, que la funció és $f(x)=-x^4/8+x^2-1$.

78. PAU 2008 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 1

QÜESTIONS

1.- Trobeu els valors dels paràmetres a ***i*** b ***per tal que la funció següent sigui contínua i derivable en*** $x=2$***.***

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+2x+3 & \text{si} \quad x<2 \\ x^3+bx+5 & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$$

PUNTUACIÓ: 2 punts.

Solució:

Per a què la funció sigui contínua en el punt $x=2$, cal que els límits laterals existeixin, coincideixin i siguin iguals al valor de la funció en el punt.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(ax^2+2x+3)=4a+7;$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x^3+bx+5)=13+2b.$$
$$f(2)=13+2b$$

Així, ens queda que la funció és contínua en $x=2$ si i sol si $4a+7=13+2b$.

Per estudiar la derivabilitat, busquem les derivades laterals en el punt 2,

$$f'_-(x)=2ax+2\Rightarrow f'_-(2)=4a+2\ ; \quad f'_+(x)=3x^2+b\Rightarrow f'_+(2)=12+b\ .$$

La funció és derivable en el punt $x=2$, si i sol si $4a+2=12+b$. Arribem així al sistema

$$\begin{cases} 4a-2b=6 \\ 4a-b=10 \end{cases}$$

que té per solució $a=\dfrac{7}{2},\ b=4$.

79. PAU 2008 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 3

3.- Digueu per quin valor de x ***la recta tangent a la corba*** $y=\ln(x^2+1)$ ***és paral·lela a la recta*** $y=x$***. Escriviu l'equació d'aquesta tangent.***

PUNTUACIÓ: 2 punts.

Solució:

El pendent de la recta tangent ha de valer 1. Per tant, cal igualar la derivada de la funció $f(x)=\ln(x^2+1)$ a aquest valor.

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}=1\Leftrightarrow 2x=x^2+1\Leftrightarrow x=1\,.$$

L'equació de la recta tangent és $y=x-1+\ln(2)$.

80. PAU 2008 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 6

6.- De tots els triangles rectangles d'hipotenusa 10 cm, trobeu la longitud dels catets d'aquell que té perímetre màxim. Feu la comprovació de què la solució trobada correspon realment al perímetre màxim.

PUNTUACIÓ: 2.5 punts pel càlcul dels catets; 1.5 punts per la comprovació.

Solució:

Siguin x i y els catets del triangle. Llavors sabem, d'acord amb el teorema de Pitàgores, que $x^2 + y^2 = 10^2$, la qual cosa ens permet aïllar, per exemple, el valor de la variable y en funció de la x: $y = \sqrt{100 - x^2}$.

El perímetre del triangle és $P = 10 + x + y = 10 + x + \sqrt{100 - x^2}$.

Per trobar el màxim d'aquest valor, calculem la derivada del perímetre respecte de x.

$P'(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{100 - x^2}}$. Igualem aquesta expressió a zero i esbrinem el valor de la variable x,

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{\sqrt{100 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{100 - x^2} \Leftrightarrow 2x^2 = 100 \Leftrightarrow x = \pm 5\sqrt{2}\ .$$

El valor negatiu no té cap sentit en aquest problema (encara més: es pot observar que el valor negatiu NO ÉS solució de l'equació $P'(x) = 0$). Així, ens quedarem amb $x = 5\sqrt{2}$. Llavors, $y = \sqrt{100 - (5\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{2}$.

Per fer la comprovació demanada, podem buscar el signe de la derivada segona de la funció $P(x)$ en el punt $x = 5\sqrt{2}$,

$$P''(x) = \frac{-100}{(100 - x^2)^{3/2}} \Rightarrow P''(5\sqrt{2}) = \frac{-100}{(100 - 50)^{3/2}} < 0\,.$$

Que la segona derivada sigui negativa ens diu que el punt $(5\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$ correspon a un màxim.

La comprovació també es pot fer analitzant el signe de la primera deriva de la funció perímetre, tenint en compte que el domini de la funció $P'(x)$ és $(-10, 10)$.

$(-10, 5\sqrt{2})$	$(5\sqrt{2}, 10)$
$P'(x) > 0$	$P'(x) < 0$
La funció creix	La funció decreix

81. PAU 2007 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 6

6.- Donades les funcions $f(x) = x^2 - ax - 4$ i $g(x) = \frac{x^2}{2} + b$,

a) Calculeu *a* i *b* de manera que les gràfiques de *f(x)* i de *g(x)* siguin tangents en el punt d'abscissa $x = 3$, és a dir, que tinguin la mateixa recta tangent en aquest punt.
b) Trobeu l'equació de la recta tangent esmentada a l'apartat anterior.
c) Pel valor de *a* obtingut al primer apartat, calculeu el valor de l'àrea de la regió limitada per l'eix d'abscisses *OX* i la funció *f(x)*.

a) Les gràfiques d'ambdues funcions seran tangents en el punt d'abscissa $x = 3$ quan en aquest punt coincideixin les funcions i les derivades, és a dir,

$$f(3) = g(3), \quad f'(3) = g'(3).$$

Llavors,

$$\begin{cases} 9 - 3a - 4 = \frac{9}{2} + b \\ 6 - a = 3 \end{cases} \rightarrow \quad a = 3, \quad b = -\frac{17}{2}.$$

b) L'equació de la recta tangent demanada es pot construir a partir de qualsevol de les dues funcions, per exemple a partir de *f(x)*.

Com que $f(3) = -4$, $f'(3) = 3$, l'equació és $y + 4 = 3(x - 3)$.

c) Per calcular l'àrea demanada, primer cal trobar els punts de tall amb l'eix i esbrinar si la funció queda per sobre o per sota del mateix.

$$f(x) = 0 \rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow \quad x = -1, \; x = 4 .$$

En un punt intermedi, per exemple quan $x = 0$, la funció és negativa i, per tant, en l'interval d'integració queda per sota de l'eix. També s'admet una representació gràfica o, també, com que la corba $y = f(x)$ és una paràbola amb les branques orientades amunt, necessàriament ha de tancar la regió per sota de l'eix.

$$\text{Àrea} = -\int_{-1}^{4} (x^2 - 3x - 4)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x \right]_{-1}^{4} = \frac{125}{6} u^2$$

PUNTUACIÓ:

Apartat a)

0.5 punts per plantejar la igualtat de la funció i de la derivada quan $x = 3$.

0.5 pel càlcul de *a* i 0.5 pel càlcul de *b*.

Apartat b) 1 punt.

Apartat c)

0.5 punts pel planteig de la integral (punts de tall, orientació i expressió de la integral que s'ha de calcular).

0.5 punts pel càlcul correcte de la primitiva.

0.5 punts per l'aplicació correcta de la regla de Barrow.

82. PAU 2007 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

QÜESTIONS

1.- En quin punt la recta tangent a la funció $f(x) = x \cdot e^x$ és paral·lela a l'eix d'abscisses? Escriviu l'equació de la recta tangent en aquest punt.

La recta tangent serà horitzontal quan la derivada valgui zero. Per tant

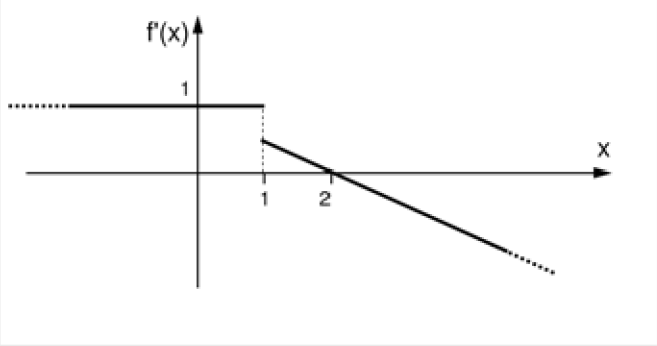
$$f'(x) = e^x + xe^x = 0 \to e^x(x+1) = 0 \to x = -1.$$

Llavors, quan $x = -1$ la tangent és horitzontal i donat que $f(-1) = -e^{-1}$, el punt de tangència és $(-1, -e^{-1})$ i la recta tangent demanada té per equació $y = -e^{-1}$, o bé $y = -\frac{1}{e}$.

PUNTUACIÓ:
1 punt per trobar correctament el valor de *x*.
1 punt per obtenir l'equació de la tangent.

83. PAU 2007 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 2

2.- La funció derivada $f'(x)$ de certa funció contínua $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ és una funció a trossos formada per les semirectes del dibuix.



a) Digueu si és derivable en tots els punts de $\mathbb{R}$ i per què.

b) Estudieu el creixement i el decreixement de *f(x)*.

c) Trobeu si *f(x)* té algun extrem relatiu i, si és així, per a quin valor de *x* i de quin tipus.

d) Sabent que $f(0)=1$, calculeu el valor de $f(1)$.

Justifiqueu totes les respostes.

a) La funció deixa de ser derivable quan $x=1$ ja que la derivada no està definida en aquest punt. Per tant, és derivable per a tots els reals excepte $x=1$.

b) La funció creix pels valors de *x* amb derivada positiva, és a dir, quan $x\in(-\infty,2)$. Decreix on la derivada és negativa, per tant, quan $x\in(2,+\infty)$.

c) Per a $x=2$ la derivada val zero i la funció passa de créixer a decréixer; és a dir, per a aquest valor de *x* la funció té un màxim relatiu.

d) L'àrea sota la funció derivada des de $x=0$ fins a $x=1$ val 1 per tant

$$\int_0^1 f'(x)dx = f(1)-f(0)=1\to f(1)=1+f(0)=2.$$

També es pot avaluar $f(1)$ obtenint prèviament la funció primitiva per $x<2$.

$f(x)=\int f'(x)dx=\int dx=x+C$, i com $f(0)=1\to C=1$ i $f(1)=2$.

PUNTUACIÓ:
0.5 punts cada apartat.
Les respostes han de ser, sobretot, justificades. No compteu cap resultat que no estigui justificat.

84. PAU 2007 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 3

3.- Calculeu els valors del paràmetre a, $a \neq 0$, que fan que les tangents a la corba d'equació $y = ax^4 + 2ax^3 - ax + 1512$ en els punts d'inflexió siguin perpendiculars.

Primerament es calculen les derivades primera i segona de la funció $f(x) = ax^4 + 2ax^3 - ax + 1512$ que defineix la corba donada.

$$f'(x) = 4ax^3 + 6ax^2 - a, \quad f''(x) = 12ax^2 + 12ax.$$

La condició de punt d'inflexió és que la derivada segona s'anul·li,

$$12ax^2 + 12ax = 0 \rightarrow 12ax(x+1) = 0,$$

que proporciona les solucions $x = 0$ i $x = -1$. En tots dos casos es pot comprovar que la derivada tercera no és nul·la i, per tant, corresponen a abscisses de punts d'inflexió.

Els pendents de les rectes tangents en els punts d'inflexió valen

$$f'(0) = -a \text{ i } f'(-1) = a.$$

Si les rectes han de ser perpendiculars s'ha de verificar que el producte dels seus pendents valgui -1, és a dir

$$-a \cdot a = -1 \rightarrow a = \pm 1.$$

PUNTUACIÓ:
0.5 pel càlcul correcte de les dues derivades.
0.5 per l'obtenció de les abscisses dels punts d'inflexió. Si no comproven que les derivades terceres són diferents de zero no penalitzeu.
0.5 per obtenir correctament els pendents de les tangents.
0.5 per aplicar correctament alguna condició de perpendicularitat.
Pot passar que alguns estudiants obtinguin les equacions completes de les tangents, en aquest cas, si ho fan malament no penalitzeu. Comproveu només que els pendents són els que toquen.

85. PAU 2007 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 5

PROBLEMES

5.- Un magatzem té forma de prisma recte de base quadrada i volum 768 m^3. Se sap que la pèrdua de calor a través de les parets laterals val 100 unitats per m^2, mentre que a través del sostre és de 300 unitats per m^2. La pèrdua pel sòl és molt petita i es pot considerar nul·la. Calculeu les dimensions del magatzem per a què la pèrdua de calor total sigui mínima.

Anomenem *x* al costat de la base i *y* a l'altura del magatzem. Llavors:

- Pèrdues pels laterals: $400xy$.
- Pèrdues pel sostre: $300x^2$.
- Pèrdues totals: $400xy + 300x^2$.

Tenint en compte el valor del volum, $y = \frac{768}{x^2}$, i això permet expressar les pèrdues com una funció de *x*.

$$P(x) = \frac{307200}{x} + 300x^2.$$

Derivant, igualant a zero i resolent s'obté

$$P'(x) = 0 \;\rightarrow\; -\frac{307200}{x^2} + 600x = 0 \;\rightarrow\; x^3 = 512 \;\Rightarrow\; x = 8.$$

Finalment, es comprova que es tracta d'un mínim

$$P''(x) = \frac{2 \cdot 307200}{x^3} + 600 \;\rightarrow P''(8) > 0.$$

Per tot això, la solució és: $x = 8m$, $y = 12m$.

1 punt per plantejar el problema.
1 punt per expressar les pèrdues com a funció d'una única variable.
1 punt per resoldre DERIVADA=0.
0.5 punts per comprovar que es tracta d'un mínim.
0.5 punts per obtenir el valor de *y*.

86. PAU 2006 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 1

QÜESTIONS

1. Sigui $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funció definida per $f(x)=e^x(ax+b)$, on a i b són nombres reals.
   a) Calculeu els valors d'a i b per tal que la funció tingui un extrem relatiu en el punt $(3,e^3)$.
   b) Per als valors d'a i b obtinguts, digueu quin tipus d'extrem té la funció en el punt esmentat.

a) Si en el punt $(3,e^3)$ hi ha un extrem relatiu, sabem dues coses: $f(3)=e^3$ i $f'(3)=0$. La derivada de la funció és $f'(x)=e^x(ax+b+a)$; llavors, ens queda

$$\begin{cases} f(3)=e^3 \\ f'(3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^3(3a+b)=e^3 \\ e^3(4a+b)=0 \end{cases}$$

Com que $e^3\neq 0$, el sistema a resoldre és

$$\begin{cases} 3a+b=1 \\ 4a+b=0 \end{cases}$$

que té com a solució $a=-1$ i $b=4$.

b) La derivada segona és $f''(x)=e^x(2-x)$. Trobem el seu signe quan s'avalua en $x=3$: $f''(3)=-e^3<0$. Per tant, en $x=3$ hi ha un màxim.

0.5 punts per dir que cal fer $f(3)=0$ i $f'(3)=0$ i calcular correctament la derivada.
0.5 punts pel plantejament i resolució del sistema
1 punt per l'apartat b)

87. PAU 2006 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 5

PROBLEMES

5. Considereu la paràbola d'equació $y = x^2 + 2x - 3$.

   a) Calculeu les equacions de les rectes tangents a la paràbola en els punts d'abscissa $x = -1$ i $x = 1$.

   b) Calculant el mínim de la funció $y = x^2 + 2x - 3$, trobeu el vèrtex de la paràbola.

   c) Trobeu les interseccions de la paràbola amb els eixos i feu una representació gràfica de la paràbola i de les tangents obtingudes al primer apartat.

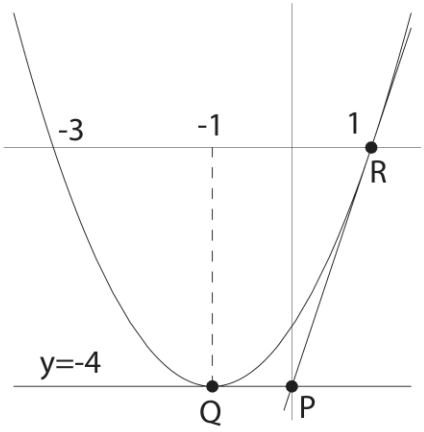
   d) Calculeu l'àrea compresa entre la paràbola i les rectes tangents.

a) Les rectes tangents buscades són de la forma $y - f(a) = f'(a)\cdot(x - a)$, essent $f(x) = x^2 + 2x - 3$. Com que $f'(x) = 2x + 2$,

- per a $x = -1$, la recta tangent és $y - f(-1) = f'(-1)\cdot(x + 1)$, és a dir, $y = -4$.
- per a $x = 1$, queda $y - f(1) = f'(1)\cdot(x - 1)$, d'on $y = 4x - 4$.

b) El mínim de la paràbola ha de complir $f'(x) = 0$. Per tant, $x = -1$. El vèrtex és $V = (-1, -4)$.

c) $x^2 + 2x - 3 = 0$ té com a solucions $x = 1$ i $x = -3$. Els punts de tall amb l'eix d'abscisses són (1, 0) i (-3, 0); quan $x = 0$, el valor de la funció és -3; per tant, el punt de tall amb l'eix d'ordenades és (0, -3). La representació gràfica demanada és



d) Cal trobar els punts de tall entre les corbes (o rectes) que limiten el recinte del qual busquem l'àrea: les dues tangents i la paràbola. Ens queda,

$$\begin{cases} y = 4x - 4 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow P = (0, -4), \quad \begin{cases} y = x^2 + 2x - 3 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow Q = (-1, -4),$$

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 3 \\ y = 4x - 4 \end{cases} \Rightarrow R = (1, 0).$$

Llavors, $A=\int_{-1}^{0}[(x^2+2x-3)-(-4)]dx+\int_{0}^{1}[(x^2+2x-3)-(4x-4)]dx=\frac{2}{3}u.s.$.

Apartat a): 0.5 punts per cada tangent.
Apartat b): 0.5 punts pel càlcul de la derivada i trobar el valor $x=-1$; 0.5 punts pel càlcul del vèrtex.
Apartat c): 0.5 punts pels punts de tall; 0.5 punts per la gràfica.
Apartat d) 0.5 punts pel plantejament; 0.5 punts pel resultat final.

$$\left\lceil px+7y+8z=1370\right.$$

88. PAU 2006 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 6

6. Considereu la funció $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+7$.

   a) Calculeu c sabent que la seva recta tangent en el punt d'abscissa $x=0$ és horitzontal.

   b) Per al valor de c trobat a l'apartat anterior, calculeu a i b sabent que aquesta funció té un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x=-2$ i que talla a l'eix OX quan $x=1$.

   c) Per als valors obtinguts als altres apartats, calculeu els intervals on la funció creix i decreix, els seus extrems relatius i feu una representació gràfica aproximada.

a) La condició equival a demanar $f'(0)=0$. Com que $f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$, llavors $c=0$.

b) La condició d'extrem relatiu a $x=-2$ és $f'(-2)=0$, és a dir, $-32+12a-4b=0$.

La de tall a l'eix OX quan $x=1$ correspon a $f(1)=0$ i, per tant, $1+a+b+7=0$.

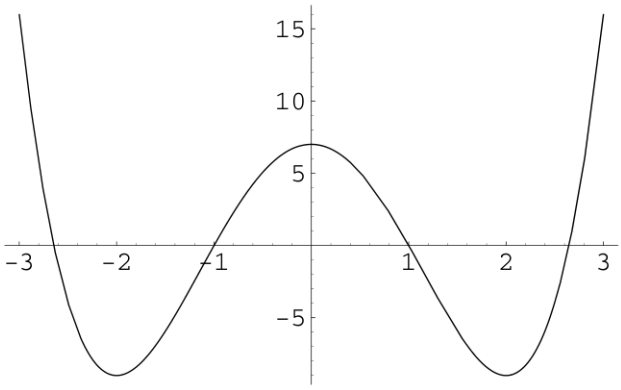
Per tot això, cal resoldre $\left.\begin{matrix}3a-b=8\\a+b=-8\end{matrix}\right\}$ que té per solució $a=0,\ b=-8$.

c) Els càlculs anteriors condueixen a $f(x)=x^4-8x^2+7$, que té per derivada $f'(x)=4x^3-16x$. Per trobar els extrems relatius es resol $f'(x)=0$ que té per solucions $x=0,\ x=-2,\ x=2$. La derivada és positiva a $(-2,0)\cup(2,\infty)$ i la funció creix en aquesta regió. La funció decreix en els intervals en què la derivada és negativa, és a dir, dins $(-\infty,-2)\cup(0,2)$.

Considerant els signes de la derivada, es pot afirmar que a $x=-2$ i a $x=2$ hi ha mínims relatius, mentre que a $x=0$ es troba un màxim.

Màxim relatiu: $(0,7)$. Mínims relatius: $(-2,-9)$, $(2,-9)$.

La gràfica és



1 punt per l'apartat a).
1 punt per l'apartat b).
0.5 punts pels intervals de creixement i decreixement.
0.5 punts pels extrems relatius.
1 punt per la gràfica.

89. PAU 2006 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 1

QÜESTIONS

1. Considereu la funció definida per $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$. Calculeu quant val el pendent de la recta tangent a la seva gràfica pel punt d'abscissa $x=0$. Trobeu si hi ha altres punts en els que el pendent de la tangent sigui igual a l'obtingut.

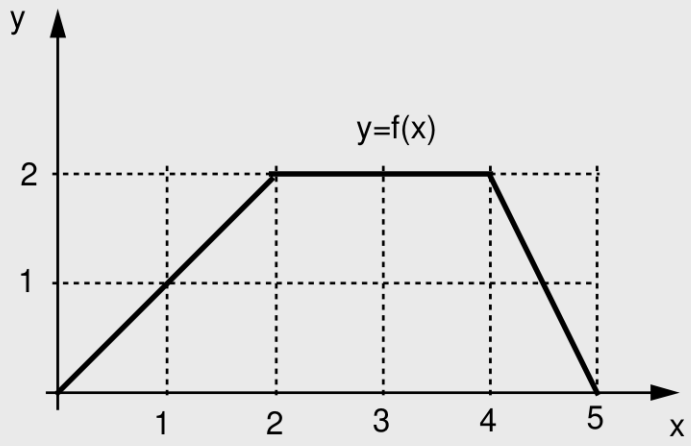
En primer lloc es calcula la derivada de la funció, $f'(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$. Ara només resta calcular $f'(0)$, que proporciona un pendent igual a -1.

Per veure si hi ha altres punts, cal resoldre $\dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}=-1$ que, operant, es transforma en l'equació de segon grau $2x^2+4x=0$. Les solucions són $x=-2$ i $x=0$. Aquest últim és el punt estudiat a la primera part de la qüestió.

0.5 punts pel càlcul de la derivada.
0.5 punts pel càlcul del pendent
1 punt per la segona part de la qüestió.

90. PAU 2006 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 2

2. Considereu la funció $y = f(x)$ definida per $x \in [0,5]$ que apareix dibuixada a la figura adjunta.



a) Quina és l'expressió de la seva funció derivada quan existeix.

b) Calculeu $\int_0^3 f(x)dx$.

a) La funció de la gràfica està constituïda per segments de recta que, d'esquerra a dreta, tenen pendent igual a 1, 0 i -2. Per tant, la funció derivada és

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in (0,2) \\ 0 & si\ x \in (2,4) \\ -2 & si\ x \in (4,5) \end{cases}.$$

b) La integral demanada no és més que l'àrea del trapezi que limita a l'esquerra amb $x = 0$ i a la dreta amb $x = 3$.

$$\int_0^3 f(x)dx = \frac{3+1}{2} \cdot 2 = 4.$$

1 punt per cada apartat. Si al segon apartat l'estudiant busca les equacions de les rectes que formen la funció i calcula la integral, s'ha de donar per correcte, evidentment.

91. PAU 2005 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 5

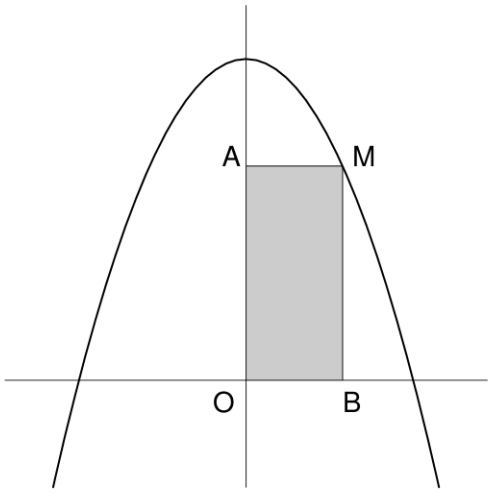
PROBLEMES

5. Considereu la funció $f(x)=3-x^2$ i un punt, M, de la seva gràfica situat al primer quadrant ($x\geq 0,\ y\geq 0$). Si pel punt M tracem paral·leles als eixos de coordenades, la seva intersecció amb OX i OY determinen dos punts, A i B respectivament. Es demana:

a) feu un gràfic dels elements del problema;
b) trobeu les coordenades del punt M que fa que el rectangle $OAMB$ tingui àrea màxima.

SOLUCIÓ

a) **[1 punt]**



b) **[3 punts]** Sigui $M=\left(a,3-a^2\right)$, amb $a\geq 0$. L'àrea del rectangle $OAMB$ és $S=a\cdot\left(3-a^2\right)=3a-a^3$. Per trobar-ne el mínim, resolem $S'=0$, és a dir, $3-3a^2=0$. Tenim que $a=\pm 1$. Ens quedem només amb la solució positiva, $a=1$. Estem en un mínim perquè $S''(1)=-6>0$. Així, el punt M demanat és $\left(1,2\right)$.

Puntueu amb 1 punt el trobar correctament la funció àrea. Puntueu amb 2 punts el trobar el mínim i la comprovació de mínim. Penalitzeu amb 0,5 punts els que oblidin donar com a resposta les coordenades de M.

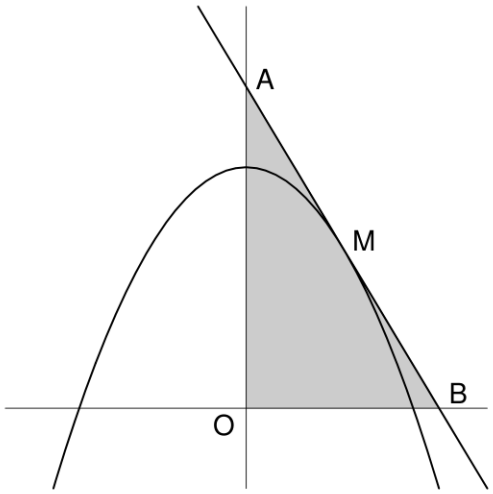
92. PAU 2005 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 5

PROBLEMES

5. La recta tangent a la paràbola $y = 3 - x^2$ en un punt M situat dins del primer quadrant ($x > 0, y > 0$), talla l'eix OX en el punt B i l'eix OY en el punt A. Es demana:
   a) feu un gràfic dels elements del problema;
   b) trobeu les coordenades del punt M que fan que el triangle OAB tingui àrea mínima.

SOLUCIÓ

a) [1 punt]



b) **[3 punts]** Les coordenades del punt M seran $M = \left(a, 3 - a^2\right)$, amb $a > 0$. Com que la derivada de la funció en el punt d'abscissa a és $y'(a) = -2a$, l'equació de la recta tangent per el punt M serà $y - \left(3 - a^2\right) = -2a\left(x - a\right)$, que arreglada queda com $2ax + y - 3 - a^2 = 0$. Els punts d'intersecció amb els eixos seran: $B = \left(\dfrac{3 + a^2}{2a}, 0\right)$ i $A = \left(0, 3 + a^2\right)$. El triangle OAB és rectangle i la seva àrea és:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left(3 + a^2\right) \cdot \frac{3 + a^2}{2a} = \frac{\left(3 + a^2\right)^2}{4a}$$

S és funció de a. Per trobar-ne el mínim, calculem $S'(a) = \dfrac{\left(3 + a^2\right)\left(3a^2 - 3\right)}{4a^2}$. Els zeros de la derivada són $a = \pm 1$. Descartem el valor negatiu i examinem el signe de S' per valors lleugerament inferiors i lleugerament superiors a 1:

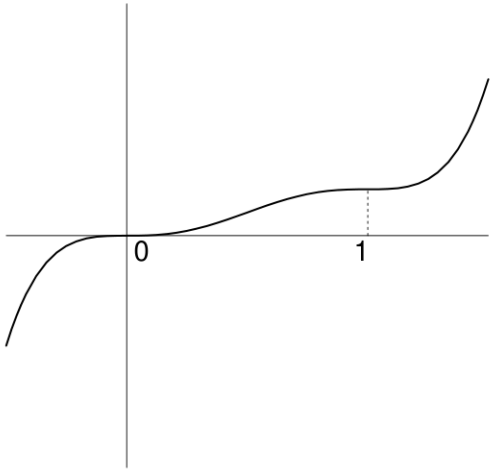
$S'(1-\varepsilon)<0$ i $S'(1+\varepsilon)>0$, per tant estem davant d'un mínim. Com que $S''=\dfrac{3(3+a^2)}{2a^3}$, també es pot comprovar que $S''(1)>0$. Les coordenades del punt M que ens demanen, són $M=(1,2)$.

Puntueu 1 punt per trobar la recta tangent correctament. 1 punt més per plantejar correctament la funció àrea i trobar el valor de a i un últim punt per classificar correctament el mínim i donar la solució demanada. Penalitzeu amb 0,5 el fet d'oblidar calcular les coordenades de M.

93. PAU 2005 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 3

3. Trobeu els màxims i mínims relatius de la funció $f(x)=6x^5-15x^4+10x^3$.

SOLUCIÓ [2 punts]



Resolem $f'(x)=0$:

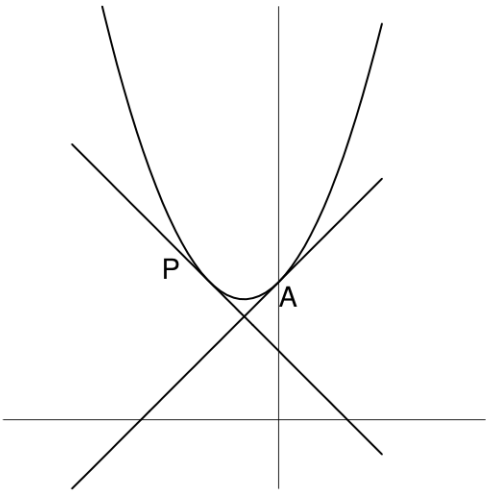
$$30x^4-60x^3+30x^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad 30x^2\left(x^2-2x+1\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 30x^2(x-1)^2=0.$$

Les arrels són $x=0; x=1$, cada una doble. Per classificar màxims i mínims, podem fer servir els signes de f' al voltant de cada un dels punts candidats a màxim o mínim. En aquest cas, com que $f'(x)=30x^2(x-1)^2\geq 0$ per a tot x, la funció és sempre creixent i, per tant, no hi ha ni màxims ni mínims. El criteri de la derivada segona també es pot fer servir: $f''(x)=120x^3-180x^2+60x=60x(2x^2-3x+1)$. Tenim que $f''(0)=0$ i $f''(1)=0$. Per tant, hem de calcular la derivada tercera, $f'''(x)=360x^2-360x+60=60\left(6x^2-6x+1\right)$. Tenim $f'''(0)\neq 0$ i $f'''(1)\neq 0$, en conseqüència, tant a $x=0$ com a $x=1$ no hi ha màxims i mínims sinó que hi ha punts d'inflexió.

94. PAU 2005 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 4

4. Sigui la paràbola $y = 2x^2 + x + 1$ i sigui A el punt de la paràbola d'abscissa 0. Es demana:
a) equació de la recta tangent a la paràbola en el punt A;
b) en quin punt de la paràbola la recta tangent és perpendicular a la recta que heu trobat en l'apartat anterior?

SOLUCIÓ

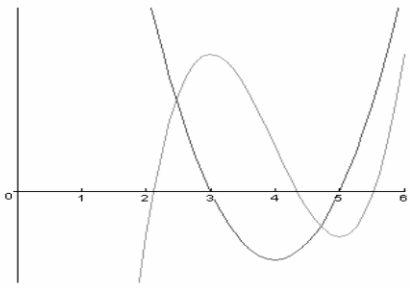


a) **[1 punt]** El punt A té coordenades $(0,1)$. El pendent de la recta tangent serà $y'(0) = 1$. La recta tangent és $y - 1 = x$.

b) **[1 punt]** La recta tangent en un punt qualsevol $(a, 2a^2 + a + 1)$ té pendent $y'(a) = 4a + 1$. Per tal que aquesta recta sigui perpendicular a la de l'apartat a) que té pendent 1, s'ha de complir que $1 \cdot (4a + 1) = -1 \Leftrightarrow \quad a = -\frac{1}{2}$. El punt demanant, P, té coordenades $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.

95. PAU 2004 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 2

2. La gràfica següent correspon a una funció $f:[2,6] \to R$ derivable i amb derivada contínua. Feu un esbós de la gràfica de $f':(2,6) \to R$ tot justificant-ne el perquè.



SOLUCIÓ.

[2 punts] La gràfica d'una funció més o menys en forma de paràbola en forma de $\cup$, que sigui decreixent a $[-\infty, 4]$ i creixent a $[4, +\infty]$; que s'anul·li a 3 i a 5 i que tingui un mínim a 4.

Puntueu 1 punt per la forma parabòlica correcta i l'explicació del creixement-decreixement; 0,5 punts pels zeros a x = 3 i a x = 5 i 0,5 punts pel mínim a x = 4.

96. PAU 2004 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 5

5. Considereu la funció polinòmica de tercer grau, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $(a \neq 0)$. Es demana:
a) trobeu els valors de a, b, c i d que fan que $f(x)$ talli l'eix OX en els punts $x = 0$ i $x = 1$ i que tingui un mínim relatiu en el punt $x = 0$;
b) feu un esbós de la gràfica de la funció que heu trobat, tot acabant de calcular els elements necessaris per dibuixar-la.

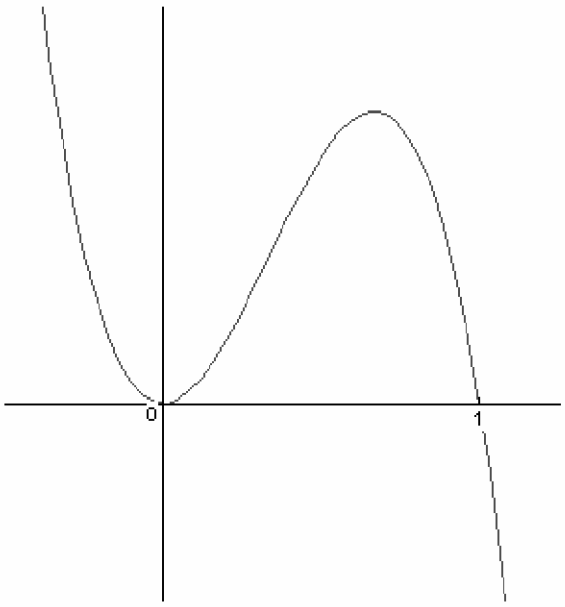
SOLUCIÓ.

a) **[2punts]** Imposant les condicions de l'enunciat,

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a + b + c + d = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = a \\ b = -a \\ c = 0 \\ d = 0. \end{cases}$$

Així la funció és $f(x) = ax^3 - ax^2$. Derivant, $f''(0) = -2a \neq 0$ i com que sabem que a *x*=0 hi ha un mínim, $f''(0) > 0 \Rightarrow a < 0.$

b) **[2 punts]**



La funció queda com $y = ax^3 - ax^2$, la gràfica de la qual és a la figura.
Talls amb eixos a (0,0) i $(1,0)$; tenim un mínim relatiu a (0,0); a $\left(\frac{1}{3}, \frac{-2a}{27}\right)$ hi trobem un punt d'inflexió i a $\left(\frac{2}{3}, \frac{-4a}{27}\right)$ un màxim relatiu.

Puntueu 1 punt per la forma correcta passant per (0,0) i (1,0); 0,5 punts pel màxim i 0,5 punts pel punt d'inflexió. Si algun estudiant dibuixa la gràfica correctament per un valor concret de a, se li dóna per bo.

97. PAU 2004 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 6

6. Donats la funció $f(x)=\sqrt{x}$ i el punt *A*(2,0) situat sobre l'eix de les abscisses, es demana:
a) trobeu la funció que expressa la distància del punt *A* a un punt qualsevol de la gràfica de la funció;
b) trobeu les coordenades del punt de la gràfica de $f(x)$ més proper a *A*.

SOLUCIÓ.

a) **[1 punt]** Un punt qualsevol de la gràfica de la funció és $\left(x,\sqrt{x}\right)$. La distància a *A* és:

$$d(x)=\sqrt{(x-2)^2+x}=\sqrt{x^2-3x+4}\,.$$

b) **[3 punts]** El punt que ens demanen ha de fer mínima la funció *d(x)*:

$$d'(x)=\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+4}}=0\Rightarrow 2x-3=0\quad\Rightarrow x=\frac{3}{2}.$$

[També es pot calcular el punt on s'assoleix el mínim de la funció $d^2(x)$.]

En aquest punt hi ha un mínim de *d(x)* atès que per $x<\frac{3}{2},\ d'(x)<0$ i per $x>\frac{3}{2},\ d'(x)>0$. El criteri de la segona derivada porta a la mateixa conclusió:

$$d''(x)=\frac{7}{4\left(x^2-3x+4\right)^{3/2}};\quad d''\left(\frac{3}{2}\right)>0\,.$$

Per tant el punt demanat és $\left(\frac{3}{2},\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

Puntueu 2 punts per trobar correctament el valor x=3/2 i 1 punt per la comprovació de mínim.

98. PAU 2004 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 1

QÜESTIONS

1. Considereu la funció $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$. Es demana:
a) calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 3$;
b) existeix alguna altra recta tangent a la gràfica de $f(x)$ que sigui paral·lela a la que heu trobat? Raoneu la resposta i, en cas afirmatiu, trobeu-ne l'equació.

SOLUCIÓ.

a) **[1 punt]** El punt de tangència és $(3, f(3)) = (3,8)$. El pendent de la recta tangent és $f'(3)$. Com que $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$, $f'(3) = 11$.
L'equació de la tangent és

$$y - 8 = 11 \cdot (x - 3).$$

Arreglada queda com

$$11x - y - 25 = 0.$$

Accepteu com a correcta l'equació sense arreglar.

b) **[1 punt]** En cas d'existir, ha de ser tangent en un punt on $f'(x) = 11$. Resolem l'equació $3x^2 - 6x + 2 = 11$ i obtenim $x = 3$ (que ja teníem) i $x = -1$. Per tant, la recta tangent en el punt $(-1, f(-1)) = (-1,-4)$ és paral·lela a l'anterior. La seva equació és

$$y + 4 = 11 \cdot (x + 1)$$

que, un cop arreglada, queda com

$$11x - y + 7 = 0.$$

Accepteu com a correcta l'equació sense arreglar. Puntueu 0,25 punts si reconeixen que la nova tangent ha de tenir pendent 11.

99. PAU 2004 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 3

3. Considereu la funció $f(x) = 1 + \frac{a}{x} + \frac{6}{x^2}$ on a és un paràmetre.
a) Calculeu el valor del paràmetre a sabent que $f(x)$ té un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = 3$.
b) Aquest extrem relatiu, es tracta d'un màxim o d'un mínim? Raoneu la resposta.

SOLUCIÓ.

a) **[1,5 punts]** Hem de tenir $f'(3) = 0$. Ara, $f'(x) = -\frac{a}{x^2} - \frac{12}{x^3}$. O sigui que $f'(3) = \frac{-3a - 12}{27}$. Igualant a 0, tenim $a = -4$.

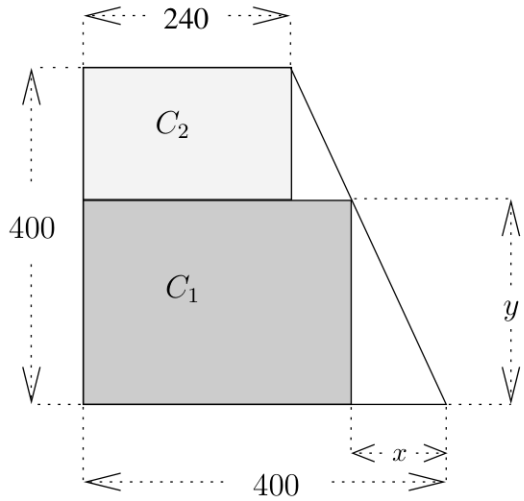
Puntueu 0,5 punts si fan bé la derivada.

b) **[0,5 punts]** Per veure el caràcter de l'extrem, calculem la derivada segona, $f''(x) = -\frac{8}{x^3} + \frac{36}{x^4}$. $f''(3) = \frac{4}{27} > 0$ per tant l'extrem és un mínim relatiu.

100. PAU 2003 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 1 (Problemes)

Problemes

1. *Un camp té forma de trapezi rectangle, de bases 240 m i 400 m i el costat perpendicular a les bases també de 400 m. Es vol partir tal com indica la figura per fer dos camps rectangulars C_1 i C_2. Anomenem x i y els catets d'un dels triangles rectangles que es formen.*



a) *Comproveu que* $y = \frac{5}{2}x$.

b) *Utilitzant la igualtat anterior, escriviu la suma de les àrees dels dos camps en funció de* x.

c) *El camp C_1 es vol sembrar amb blat de moro i el camp C_2 amb blat. Amb el blat de moro s'obté un benefici de 0,12 € per m^2 i amb el blat un benefici de 0,10 € per m^2. Determineu les mides de cada un dels camps per tal d'obtenir el benefici màxim.*

---

a) S'ha de tenir en compte que es compleix

$$\frac{y}{x} = \frac{400}{400 - 240} = \frac{5}{2}$$

b) La superfície del camp C_1 serà

$$(400 - x) \times y = (400 - x) \times \frac{5}{2} \times x$$

mentre que la del camp C_2 serà

$$240 \times (400 - y) = 240 \times (400 - \frac{5}{2}x)$$

La suma de les dues superfícies, en funció de x, resultarà

$$(400 - x) \times \frac{5}{2} \times x + 240 \times (400 - \frac{5}{2}x) = 96000 + 400x - \frac{5}{2}x^2$$

c) El benefici $B(x)$ que s'obté en funció de x ve donat per

$$B(x) = 0,12 \times \frac{5}{2} \times x \times (400 - x) + 0,1 \times 240 \times (400 - \frac{5}{2}x) = 9600 + 60x - 0,3x^2$$

(per a x entre 0 i $160 = 400 - 240$).

Aquesta funció té derivada $B'(x) = 60 - 0,6x$ que s'anul·la únicament per a $x = 100$ i per a aquest valor s'obté el benefici màxim. En aquesta situació les dimensions del camp C_1 són 300×250 metres i les del camp C_2 són 240×150 metres.

Compteu un punt (1) pels apartats a) i b) i dos punts (2) per l'apartat c). Intenteu puntuar els tres apartats independentment i per errors en els càlculs no treieu més d'un punt (1) del total dels quatre.

---

101. PAU 2003 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 2 (Qüestions)

2. *Calculeu el punt de la corba $y = 2 + x - x^2$ on la tangent és paral·lela a la recta $y = x$.*

La recta $y = x$ té pendent 1. Per tant el que es busca és el punt on la derivada de $f(x) = 2 + x - x^2$ val 1. Com que $f'(x) = 1 - 2x$ això es produeix per a $x = 0$ i el punt corresponent és el $(0, 2)$.

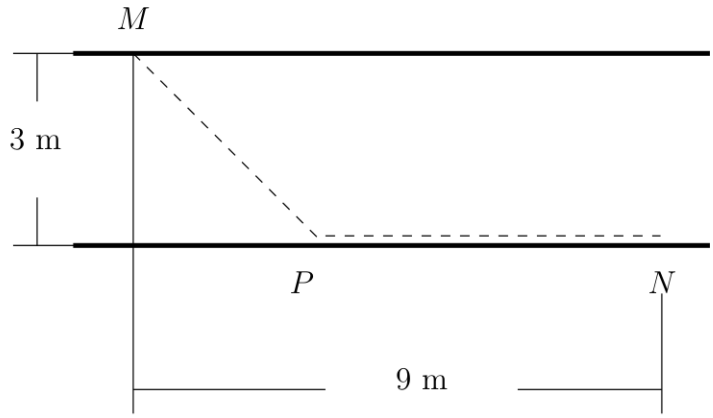
Es difícil que en aquest exercici es produeixin errors de càlcul i és d'esperar que l'alumne ho faci bé si té els conceptes clars. En general, poseu zero (0) o dos punts (2), si ho creieu necessari matitzeu aquestes notes segons el vostri criteri.

---

102. PAU 2003 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 1 (Problemes)

Problemes

1. *Volem unir el punt M en un cantó d'un carrer de 3 m d'amplada amb el punt N situat a l'altre cantó de carrer, i 9 m més avall, mitjançant dos cables rectes, un des de M fins a un punt P de l'altre cantó del carrer i un altre des de P fins a N seguint en el mateix cantó de carrer segons l'esquema següent*



El cost de la instal·lació del cable MP és de 12 € per metre i del cable PN de 6 € per metre.

Quin punt P haurem d'escollir de manera que la connexió de M amb N sigui el més econòmica possible? Quin serà aquest cost mínim?

Si x és la distància entre el punt O just davant de M fins al punt P, la distància entre M i P serà

$$MP = \sqrt{9 + x^2}$$

mentre que la distància de P a N és

$$PN = (9 - x)$$

Aleshores, el cost $C(x)$ de la instal·lació resulta

$$C(x) = 12\sqrt{9 + x^2} + 6(9 - x)$$

La derivada d'aquest funció es pot escriure com

$$C'(x) = \frac{12x}{\sqrt{9 + x^2}} - 6$$

Que val 0 només quan $x = \sqrt{3}$. Això diu que el punt P ha de ser el que està a $\sqrt{3}$ metres de O.

El cost corresponent serà $C(\sqrt{3}) \sim 85.17691454$ €

Compteu fins a dos punts (2) per l'expressió de la funció que expressa el cost i el càlcul de la seva derivada. Compteu fins a dos punts més (2) per la determinació del mínim, del punt P i l'avaluació del cost mínim. Encara que l'expressió de la funció que determina el cost no sigui correcta, valoreu el coneixement de les tècniques per a determinar el extrems locals d'una funció que l'alumne demostri. Per errors púrament de càlcul no treieu més d'un punt (1) del total de quatre.

103. PAU 2003 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 1 (Qüestions)

Qüestions

1. *Calculeu les equacions de les dues rectes del pla que passen pel punt $P = (1, -1)$ i que són tangents a la corba d'equació $y = (x-1)^2$.*

Els punts del gràfic de $y = (x-1)^2$ són de la forma $Q = (x, (x-1)^2)$. El pendent de la recta tangent en cada un d'aquests punts val $y'(x) = 2(x-1)$. El pendent de la recta que uneix P amb un d'aquests punts Q serà $m(x) = \dfrac{(x-1)^2+1}{x-1}$. Si es vol que una de les rectes PQ sigui tangent al gràfic de $y = (x-1)^2$ s'ha de complir l'equació

$$2(x-1) = \frac{(x-1)^2+1}{x-1}$$

que té com a úniques solucions: a) $x = 0$ i b) $x = 2$. En el cas a) el pendent de la recta ha de ser $y'(0) = -2$ i en el cas b) és $y'(2) = 2$. Les rectes corresponents, que passen per P i tenen pendents 2 i -2, tindran com a equacions

$$(y+1) = -2(x-1) \qquad (y+1) = 2(x-1)$$

Compteu fins a un punt i mig (1.5) pel plantejament correcte de l'exercici i deixeu el mig punt restant (0.5) pels càlculs finals.

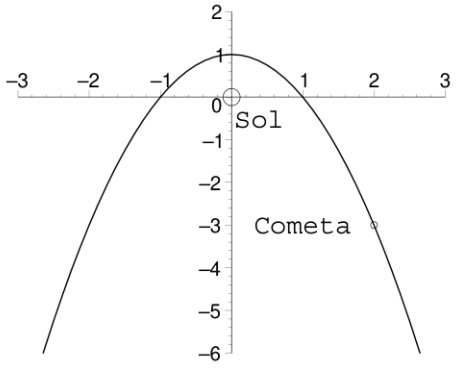
104. PAU 2003 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 1 (Qüestions)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

105. PAU 2002 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 1 (Problemes)

Problemes

1. *Suposem que el Sol es troba a l'origen d'un sistema de coordenades i que un cometa segueix una trajectòria donada per la paràbola $y = 1 - x^2$, tal i com es veu a la figura següent:*



a) *Quin és el punt en què el cometa es troba més proper al Sol?*

b) *Quant val en aquest cas la distància del Sol al cometa?*

c) *Hi ha algun punt en què el cometa es trobi a la màxima distància del Sol?*

d) *Hi ha algun punt en què la distància entre el Sol i el cometa sigui un màxim local o relatiu?*

Nota: *Teniu present que la distància entre dos punts és màxima o mínima quan el quadrat de la distància és màxim o mínim.*

La distància al quadrat d'un punt $(x, 1-x^2)$ de la paràbola a l'origen és

$$d(x) = x^2 + (1-x^2)^2 = x^4 - x^2 + 1$$

La derivada de $d(x)$ és $d'(x) = 4x^3 - 2x$ que s'anul·la en $x = 0$, $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ i $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ de tal forma que en $x = 0$ la funció d té un màxim local i en els punts $x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ mínims locals. Aleshores:

a) Els punts en que el cometa es troba més proper al Sol són $(\pm\sqrt{2}/2, 1/2)$.

b) En aquests punts la distància és $\sqrt{d(\pm\sqrt{2}/2)} = \sqrt{3}/2$.

c) No hi ha cap punt concret que sigui el més allunyat del Sol ja que $\lim_{x\to\infty} d(x) = \infty$.

d) Amb els càlculs anteriors es veu que en $x = 0$ la funció $d(x)$ té un màxim local.

Compteu un punt per cada apartat. En l'apartat c) mireu si es demostra que es té clar que la distància del cometa al Sol creix, independentment de la justificació rigorosa que s'en doni. En qualsevol cas valoreu el coneixement dels mètodes per a trobar extrems relatius i resteu com a màxim un punt per errors de càlcul.

106. PAU 2002 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 2 (Qüestions)

2. *Se sap que la derivada d'una funció $f(x)$ és*

$$f'(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x + 1}$$

Calculeu les abscisses dels punts on la funció $f(x)$ té els seus extrems relatius, especificant per a cada un dels valors que obtingueu si es tracta d'un màxim o d'un mínim relatiu.

Els punts on f' s'anul·la són les solucions de $x^2+x-6 = 0$, és a dir $x = 2$ i $x = -3$. Tenint en compte que -1 no és del domini de f', f' té el signe constant en els intervals $(-\infty, -3)$, $(-3, -1)$, $(-1, 2)$ i $(2, \infty)$. Aquest signe és, respectivament, $-$, $+$, $-$ i $+$. Per tant f té mínims locals en els punts d'abscissa $x = -3$ i $x = 2$.

Resteu com a màxim mig punt si hi ha errors de càlcul. Valoreu sempre el coneixement que es demostri del mètode per a calcular els extrems locals.

107. PAU 2002 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 2 (Qüestions)

2. *Sabent que la funció $y = (x + a)(x^2 \quad 4)$, on a és un nombre real, té un màxim i un mínim relatius, i que el màxim relatiu s'assoleix en el punt $x = \quad \dfrac{1}{3}$, trobeu l'abscissa del mínim relatiu.*

La derivada de y és $y' = 3x^2 + 2ax \quad 4$. Com que $\quad 1/3$ és una solució de l'equació $y' = 0$ l'altra solució ha de ser $\alpha = 4$. És a dir, l'abscissa del mínim relatiu és $x = 4$.

Valoreu el coneixement que es demostri del mètode per a calcular extrems relatius. Traieu com a màxim mig punt per errors en els càlculs.

108. PAU 2002 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 3 (Qüestions)

3. *Sigui* $f(x) = \dfrac{mx \quad 2}{x \quad 1}$, *on* m *és un paràmetre.*

a) *Determineu per a cada valor del paràmetre* m *el valor del límit* $\lim_{x\to 1} f(x)$ *(si existeix).*

b) *Per a quins valors de* m *la derivada* $f'(x)$ *de la funció* $f(x)$ *és positiva per a tot* x*?*

---

a) Excepte quan $m = 2$ es compleix $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$ i quan $m = 2$ el resultat que tenim és $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$.

b) La derivada de $f(x)$ és

$$f'(x) = \frac{m+2}{(x \quad 1)^2}$$

que és positiva quan $m < 2$.

Compteu un punt per cada apartat. En l'apartat a) valoreu sobretot si es té en compte el cas $m = 2$. Per errors en els càlculs no traieu més de mig punt.

109. PAU 2002 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 1 (Problemes)

Problemes

1. *S'ha de construir un gran dipòsit cilíndric de* 81π m^3 *de volum. La superfície lateral ha de ser construïda amb un material que costa 30 euros el* m^2 *i les dues bases amb un material que costa 45 euros el* m^2*.*

a) *Determineu la relació que hi haurà entre el radi* r *de les bases circulars i l'altura* h *del cilindre, i doneu el cost* $C(r)$ *del material necessari per a construir aquest dipòsit en funció de* r*.*

b) *Quines dimensions (radi i altura) ha de tenir el dipòsit per tal que el cost del material necessari per construir-lo sigui el mínim possible?*

c) *Quin serà, en aquest cas, el cost del material?*

Denotem per r el radi i per h l'altura del cilindre.

a) La superfície lateral és $2\times\pi\times r\times h$ m^2 i el cost de la construcció serà $2\times\pi\times r\times h\times 30 = 60\times\pi\times r\times h$ euros. La superfície de les dues bases és $2\times\pi\times r^2\times h$ m^2 i el cost del material per a la construcció serà $2\times\pi\times r^2\times 45 = 90\times\pi\times r^2$ euros. El cost total dels materials serà $60\pi rh + 90\pi r^2$. Com que el volum del cilindre és $\pi r^2 h = 81\pi$, es compleix $h = \dfrac{81}{r^2}$ i el cost dels materials serà, en funció de r,

$$C(r) = \frac{4860\pi}{r} + 90\pi r^2$$

b) La derivada de $C(r)$ és $C'(r) = -\dfrac{4860\pi}{r^2} + 180\pi r$ que és 0 quan $r = 3$ i per aquest valor s'obté el mínim cost. En aquest cas $h = \dfrac{81}{9} = 9$.

c) Per a $r = 3$ tenim $C(3) = \dfrac{4860\pi}{3} + 810\pi \simeq 7634,07$ euros.

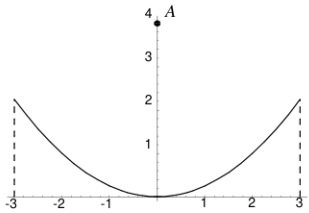
Compteu dos punt per l'apartat a) i un punt per cada un dels altres dos apartats. Intenteu puntuar els apartats b) i c) encara que la funció que expressa el cost no sigui correcta, valorant en l'apartat b) els coneixements que es demostrin de les tècniques per a calcular extrems locals. Per errors en els càlculs no resteu més de mig punt.

---

110. PAU 2001 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 1 (Problemes)

Problemes

1. *La riba d'un tram de riu descriu la corba* $y = \frac{1}{4}x^2$, *per a* x *entre* -3 *i* 3, *i en el punt* $A = (0, 4)$ *hi ha un poble, tal com es pot veure en l'esquema següent:*



a) Expresseu la distància des d'un punt qualsevol d'aquesta vora del riu fins al poble, en funció de l'abscissa x.

b) Quin és el punt de la vora d'aquest tram de riu que és més lluny del poble?

c) Hi ha algun punt de la vora del riu a una distància del poble inferior a 2?

---

a) La distància del punt A a un punt de la gràfica, de la forma $(x, x^2/4)$, és

$$f(x) = \sqrt{x^2 + (4 - \frac{1}{4}x^2)^2} = \sqrt{\frac{1}{16}x^4 - x^2 + 16}$$

b) La derivada de $f(x)$ és

$$f'(x) = \frac{1}{8\sqrt{x^2 + (4 - \frac{1}{4}x^2)^2}} \dot{x}(x^2 - 8)$$

que s'anul·la per a $x = -2\sqrt{2}$, $x = 0$ i $x = +2\sqrt{2}$ (tots aquests valors de x estan entre -3 i 3). De fet, hi ha mínim locals de $f(x)$ en $x = \pm 2\sqrt{2}$ i un màxim local en $x = 0$.

El valor de $f(x)$ en els punts $x = \pm 2\sqrt{2}$ és aproximadament $3,4641$, en $x = 0$ és 4 i en els extrems del tram que es considera ($x = \pm 3$) val aproximadament $3,4731$. Per tant, la distància màxima és per l'origen de coordenades.

c) Tal i com s'ha calculat en l'apartat anterior, la distància mínima d'un punt de la vora del riu al poble és aproximadament $3,46$. Per tant, no hi pot haver cap punt a una distància que sigui igual a 2.

Compteu un punt per la correcta expressió de la distància $f(x)$ en funció de x (apartat a)), 2 punts per la determinació dels extrems locals de $f(x)$ i la determinació del punt on hi ha la distància màxima (apartat b)) i l'altre punt per l'apartat c). Procureu puntuar els tres apartats per separat i no traieu més de un punt del total de 4 per errors de càlcul. Respecte els possibles errors de càlcul, cal tenir en compte, sobretot, la petita diferència que hi ha entre el valor de la distància en els punts de mínim local i el valor que té en els extrems (-3 i 3) ja que eventualment

(segons com s'arrodoneixin els càlculs) pot no estar clar on hi ha el valor mínim absolut. En tot cas, fixeu-vos que aquest valor mínim sempre hauria de sortir més gran que 2.

111. PAU 2001 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 3 (Qüestions)

3. *Considereu la funció definida per*

$$f(x) = \begin{cases} e^{a\,x}, & si\ x \leq 0 \\ 2x+1, & si\ x > 0 \end{cases}$$

on a és un nombre real.

a) *Calculeu $\lim_{x\to 0} f(x)$ i comproveu que $f(x)$ és contínua en $x = 0$.*

b) *Per a quin valor del paràmetre a la funció $f(x)$ és derivable en $x = 0$?*

---

a) Com que $f(0) = 1$ i $\lim_{x\to 0} e^{ax} = \lim_{x\to 0}(2x+1) = 1$ (independentment del valor que tingui a), la funció $f(x)$ és contínua.

b) Com que la derivada de e^{ax} és $a\,e^{ax}$, que en $x = 0$ val a, i la derivada de $2x+1$ és constant i igual a 2, la funció $f(x)$ és derivable només quan $a = 2$.

Compteu un punt per cada apartat. Teniu en compte que pot haver alumnes que no coneguin el llenguatge de límit per la dreta i límit per l'esquerra i que, per tant, no es pot esperar que la qüestió es resolgui utilitzant aquest llenguatge. El que si han de saber tractar és el que passa quan es defineix una funció *enganxant-ne* dues.

112. PAU 2001 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 1 (Qüestions)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

113. PAU 2001 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 2 (Qüestions)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

114. PAU 2000 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 1 (Problemes)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

115. PAU 2000 · Setembre · Sèrie 6 · Exercici 2 (Qüestions)

2. $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}$, $f'(x) = -x\mathrm{e}^{-x}$, $f''(x) = (x-1)\mathrm{e}^{-x}$. La segona derivada s'anul·la per a $x = 1$. L'equació de la recta tangent serà $y - f(1) = f'(1)(x-1)$, que s'escriu $y - (2/\mathrm{e}) = -(1/\mathrm{e})(x-1)$. Això dóna $y = (3-x)/\mathrm{e}$, que es pot escriure $\mathrm{e}y + x = 3$.

Dels dos punts que val la qüestió, compteu-ne ja 1 per trobar correctament el valor de x que anul·la la segona derivada.

116. PAU 2000 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1 (Problemes)

Problemes

1. (a) Considerant triangles semblants s'obté, per exemple,

$$\frac{x}{60} = \frac{45-y}{45} \quad (\text{o } \frac{y}{60-x} = \frac{45-y}{x}),$$

que equivalen a $y = 45 - (3/4)x$.

(b) El valor de l'àrea edificable xy és $V_1(x) = 25.000x(45-(3/4)x) = 25.000(45x-(3/4)x^2)$. El valor de l'àrea no edificable $60 \times 45/2 - xy = 1.350 - xy$ és $V_2(x) = 5.000(1.350 - 45x + (3/4)x^2)$. El valor total és la suma:

$$V(x) = V_1(x) + V_2(x) = 6{,}750.000 + 900.000\,x - 15.000\,x^2.$$

(c) $V'(x) = 900.000 - 30.000\,x$. $V'(x) = 0$ si i només si $x = 30$, punt on V té un màxim, doncs és creixent ($V' > 0$) si $x < 30$ i decreixent si $x > 30$. Les dimensions per a aquest valor màxim són $x = 30$ m i $y = 45 - 22,5 = 22,5$ m.

(d) El valor màxim és, en pessetes,

$$V(30) = 20{,}250.000.$$

Compteu un punt pels dos primers apartats, un punt i mig pel tercer (quan es fa el càlcul de la derivada i es determina el punt crític) i mig per l'últim (en el que només s'ha de calcular el valor de la funció en el punt crític que s'ha trobat).



117. PAU 2000 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1 (Qüestions)

Qüestions

1. Es compleix $f'(x) = 3ax^2+4x$. Els pendents de les tangents en els punts d'abscisses ± 1 són $m_1 = f'(1) = 3a + 4$ i $m_2 = f'(-1) = 3a - 4$.

La condició de perpendicularitat és $m_1 \cdot m_2 = -1$, que equival a $a = \pm\sqrt{5/3}$. Aquestes són les solucions.

Compteu un punt per la determinació dels pendents de les rectes tangents i un altre punt per plantejar i resoldre la condició de perpendicularitat.

118. PAU 2000 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 2 (Qüestions)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.