Matemàtiques

Derivades i aplicacions

Exercicis · 118 exercicis

Proves d'accés a la universitat (PAU) de Catalunya. Ordenats del més recent al més antic.
Retalls dels exàmens i pautes oficials (selecat.cat / universitats.gencat.cat).

Exercici 1

[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 1	

Considereu la funció $f(x)=\dfrac{5x}{x^2+1}$.

1.1. Estudieu-ne el domini i els intervals de creixement i decreixement, així com els possibles màxims i mínims locals.

[1 punt]

Puntuació de l'apartat 1.1	

1.2. Calculeu les equacions de totes les asímptotes d'aquesta funció (si en té) i dibuixeu un esbós de la seva gràfica.

[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 1.2	

1.3. Calculeu l'equació de la recta normal (és a dir, la recta perpendicular a la tangent) a la corba $y=f(x)$ en el punt d'abscissa $x=2$.

[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 1.3	

Exercici 4

[2,5 punts en total]

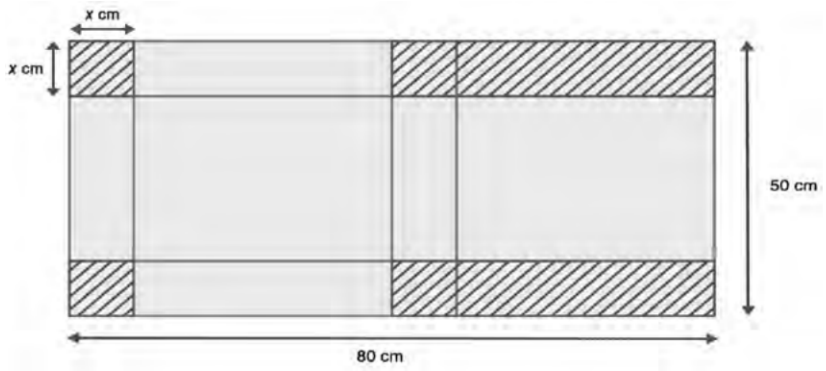
Puntuació total de l'exercici 4	

L'Aina vol construir una capsa de cartró amb forma de prisma rectangular amb tapa, per guardar-hi la tauleta i el carregador.

Trieu UNA de les dues opcions (A o B) i responeu a les qüestions que s'hi plantegen. **Indiqueu a la portada de l'examen l'opció escollida.**

OPCIÓ A

L'Aina construirà la capsa a partir d'un cartró rectangular de 80 cm × 50 cm. A la figura següent es mostra el desplegament de la capsa; les zones ratllades són les parts que l'Aina retallarà i retirarà per tal de poder-la muntar:



4.1. Comproveu que el volum de la capsa resultant és $V(x) = 2x^3 - 130x^2 + 2\,000x$, on x és la longitud del costat del quadrat que cal retallar dels cantons per a poder-la muntar.

[1 punt]

Puntuació de l'apartat 4.1	

4.2. Calculeu les dimensions de la capsa per tal que el seu volum sigui màxim. Quin és aquest volum màxim?

[1,5 punts]

Puntuació de l'apartat 4.2	

Exercici 4

[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 4	

Trieu UNA de les dues opcions (A o B) i responeu a les qüestions que s'hi plantegen. **Indiqueu a la portada de l'examen l'opció escollida.**

OPCIÓ A

L'alcalde d'un poble de Catalunya encarrega a l'arquitecte municipal el disseny d'un parc infantil que es construirà en un terreny públic. Per a complir la normativa vigent, en el parc hi ha d'haver dos espais ben delimitats: un per a una boca de reg —el qual, segons l'arquitecte, ha de tenir forma circular—, i un altre per a una caseta on es guardin les eines de manteniment —el qual ha de tenir forma quadrada. Per motius estètics, l'arquitecte vol delimitar cadascun d'aquests dos espais amb una barana de forja. Sabent que les dues baranes mesuren exactament 10 m de longitud en total, quina mida ha de tenir la barana de cada espai per tal que la suma de les superfícies dels dos espais sigui la més petita possible? Quina és aquesta superfície mínima?

Exercici 4

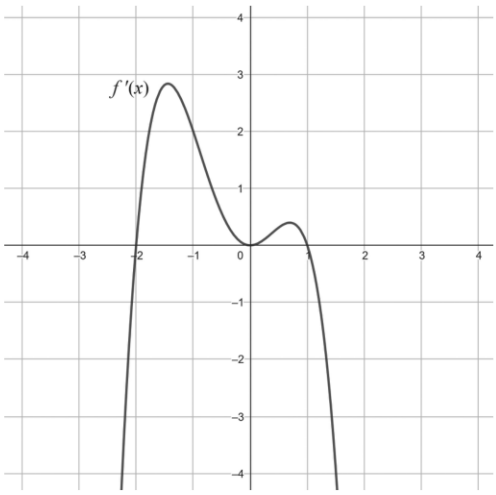
[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 4	

Trieu UNA de les dues opcions (A o B) i responeu a les qüestions que s'hi plantegen. **Indiqueu a la portada de l'examen l'opció escollida.**

OPCIÓ A

D'una funció $f(x)$, sabem que passa pel punt $(-1, -1)$ i que la gràfica de la seva funció derivada és la següent:



4.1. Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en el punt $(-1, -1)$.

[1 punt]

Puntuació de l'apartat 4.1	

4.2. Estudieu si $f(x)$ té punts crítics (punts on $f'(x) = 0$) i, en cas que en tingui, determineu-ne les abscisses i classifiqueu-los segons si són màxims, mínims o punts d'inflexió de $f(x)$.

[1 punt]

Puntuació de l'apartat 4.2	

4.3. Sabent, a més, que $f(0) = -0{,}2$, calculeu l'àrea entre la gràfica de $f'(x)$ i l'eix de les abscisses, des de $x = -1$ fins a $x = 0$.

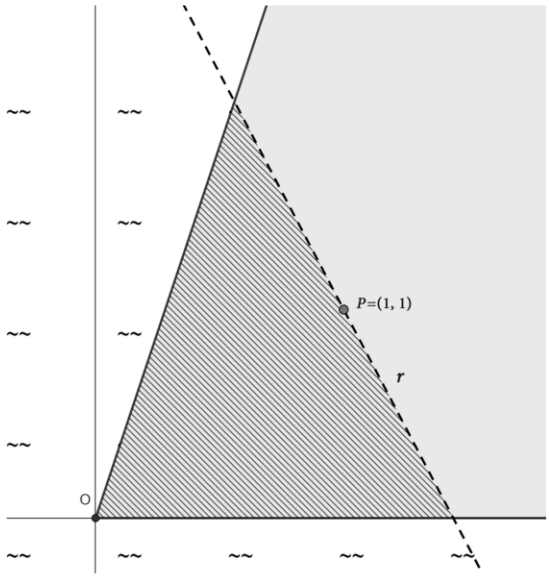
[0,5 punts]

Puntuació de l'apartat 4.3	

5. PAU 2025 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 1

Exercici 1

Una família vol comprar un terreny per a fer-s'hi una casa envoltada de penya-segats amb vistes al mar. En aquella zona de la costa, els penya-segats segueixen les rectes $y = 0$ i $y = 3x$. A més, la família vol que el terreny sigui triangular i que el tercer costat del triangle passi pel punt $P = (1, 1)$, tal com es pot veure en la figura.



a) Plantegeu l'equació de la recta r que defineix el tercer costat del triangle en funció del seu pendent m, i comproveu que l'àrea del terreny ve donada per $A(m) = \frac{3}{2} \cdot \frac{m^2 - 2m + 1}{m^2 - 3m}$.
[1 punt]

b) Calculeu el valor de m que fa que l'àrea d'aquest terreny (i, per tant, el seu preu) sigui mínima. Quin és el valor d'aquesta àrea?
[1,5 punts]

6. PAU 2025 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

Exercici 1

Considereu la funció $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$.

a) Determineu els talls de la corba $y = f(x)$ amb els eixos de coordenades, i les equacions de les seves possibles asímptotes verticals, horitzontals i obliqües.
[1 punt]

b) Calculeu les equacions de les rectes tangents a la corba $y = f(x)$ en els punts $x = 0$ i $x = 2$. Aquestes dues rectes són paral·leles? Justifiqueu la resposta.
[1 punt]

c) Hi ha algun punt on la recta tangent a $f(x)$ tingui pendent 1? En cas afirmatiu, troba-lo.
[0,5 punts]

7. PAU 2024 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 5

5. Per a cada punt (x, y) de la corba $y = e^{-2x}$, amb $x > 0$ i $y > 0$, considereu el rectangle amb vèrtexs als punts $(0, 0)$, $(x, 0)$, $(0, y)$ i (x, y).

a) Comproveu que, d'entre tots aquests rectangles, el que té $x = \frac{1}{2}$ és el d'àrea màxima.

Quin és el valor d'aquesta àrea?

[1,5 punts]

b) Calculeu l'equació de la recta tangent a la funció $y = e^{-2x}$ en el punt d'abscissa $x = 0$, i el seu punt de tall amb l'eix de les abscisses.

[1 punt]

8. PAU 2024 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

1. Considereu la funció $f(x) = 2\frac{\ln x}{x}$, definida per a $x > 0$.

a) Estudieu-ne els màxims i els mínims, i les zones de creixement i de decreixement.

[1 punt]

b) Aquesta funció té asímptotes? Feu un esbós de la seva gràfica.

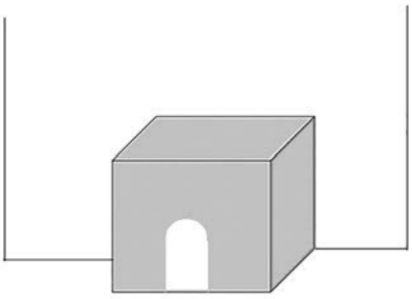
[1 punt]

c) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de $y = f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 1$.

[0,5 punts]

9. PAU 2024 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 5

5. Volem construir un petit cobert de fusta de $6\,m^3$ de volum, en forma de prisma rectangular, adossat a la paret lateral d'una casa, per a guardar-hi llenya. Només cal construir, per tant, el sostre i tres parets (la paret del fons del cobert és la de la casa a la qual està adossat). A més, volem que el cobert mesuri el triple d'amplària que de fondària. Cada metre quadrat de paret té un cost de construcció de 30 € i el sostre costa 50 € per metre quadrat. Un cop construït el cobert, afegir-hi una porta té un cost fix de 35 €.



a) Comproveu que el cost de construcció del cobert ve donat per la funció $C(x) = \frac{300}{x} + 150x^2 + 35$, on x és la fondària del cobert en metres.

[1,25 punts]

***b*)** Calculeu quines han de ser les dimensions del cobert per tal que el cost de construcció sigui mínim i justifiqueu la resposta. Quin és aquest cost?
[1,25 punts]

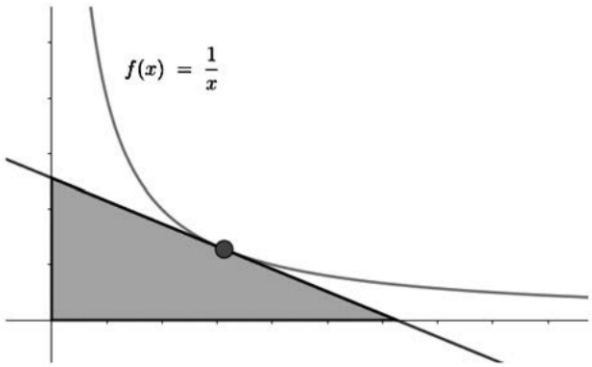
10. PAU 2023 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 2

2. Sigui la funció $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

***a*)** Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x=2$.
[0,75 punts]

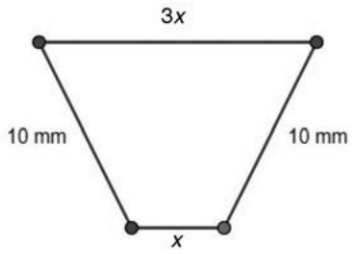
***b*)** Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x=k$, en què k és un nombre real positiu.
[0,75 punts]

***c*)** Comproveu que, tal com es pot veure en la figura de sota, la recta de l'apartat b determina un triangle d'àrea constant amb els semieixos positius de coordenades. Calculeu aquesta àrea.
[1 punt]



11. PAU 2023 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 6

6. Volem construir una peça metàl·lica que tingui per secció un trapezi isòsceles amb la base superior tres vegades més llarga que la base inferior. Els altres costats del trapezi fan 10 mm, tal com podeu observar en la figura següent:



***a*)** Expresseu l'altura del trapezi en funció de la longitud x de la base inferior.
[0,5 punts]

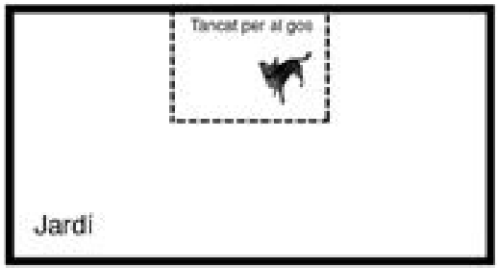
***b*)** Calculeu la longitud de la base inferior del trapezi de manera que l'àrea de la peça sigui màxima i trobeu el valor d'aquesta àrea màxima.
[2 punts]

12. PAU 2023 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

1. Calculeu els coeficients a, b, c i d de la funció $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ si sabem que l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'inflexió $(1, 0)$ és $y = -3x + 3$ i que la funció té un extrem relatiu en el punt de la gràfica d'abscissa $x = 0$.
[2,5 punts]

13. PAU 2023 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 5

5. La Núria té un jardí rectangular i vol fer-hi un tancat (rectangular o quadrat) de 8 m^2 per al seu gos. Ha pensat de posar el tancat tocant al mur del jardí, tal com es mostra a la figura de la dreta, per estalviar-se així un dels quatre costats.



El preu de la tanca que vol fer servir és de 2,5 €/m.

***a*)** Quines dimensions ha de tenir el tancat perquè el cost sigui mínim? Quin és aquest cost mínim?
[1,75 punts]

***b*)** Si manteniu la forma rectangular o quadrada del tancat i feu que un dels vèrtexs del jardí coincideixi amb un vèrtex del tancat, quants euros us podeu estalviar? Raoneu com posaríeu el tancat i justifiqueu amb càlculs matemàtics les dimensions de la vostra proposta.
[0,75 punts]

14. PAU 2023 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 4

4. En una carretera principal hi trobem el poble A. A 12 km del poble A, hi ha un encreuament O amb una carretera secundària que talla perpendicularment la carretera principal. A 9 km de l'encreuament, a la carretera secundària, hi trobem el poble B. Es vol construir una torre de comunicacions T en un punt de la carretera principal situat entre el poble A i l'encreuament O. Aquesta torre ha d'estar connectada amb cadascun dels dos pobles en línia recta per cable. Sabem que instal·lar el cable entre la torre T i el poble B té un preu de 250 €/km i, en canvi, instal·lar el cable entre la torre T i el poble A té un preu de 125 €/km. Determineu a quina distància de l'encreuament O a la carretera principal cal situar la torre T perquè el preu del cablejat sigui mínim i quin serà el valor d'aquest preu mínim.
[2,5 punts]

15. PAU 2023 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 6

6. Sigui la funció $f(x)=\dfrac{ax^2+x+b}{x^2+1}$.

a) Calculeu els valors dels paràmetres a i b si sabem que la gràfica de la funció f té un extrem relatiu en $x=-1$ i passa pel punt $P=\left(-2,\dfrac{13}{5}\right)$.
[1,25 punts]

b) Per al cas $a=b$, calculeu i classifiqueu els extrems relatius de la funció.
[1,25 punts]

16. PAU 2022 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 2

2. Considereu la funció $f(x)=\dfrac{9}{x^2+x-2}$.

a) Determineu el domini, les possibles asímptotes, els extrems relatius i els intervals de creixement i decreixement de la funció.
[1,25 punts]

b) Calculeu l'equació general de la recta tangent a la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x=4$. Representeu en un mateix gràfic la funció $f(x)$ i la recta tangent.
[1,25 punts]

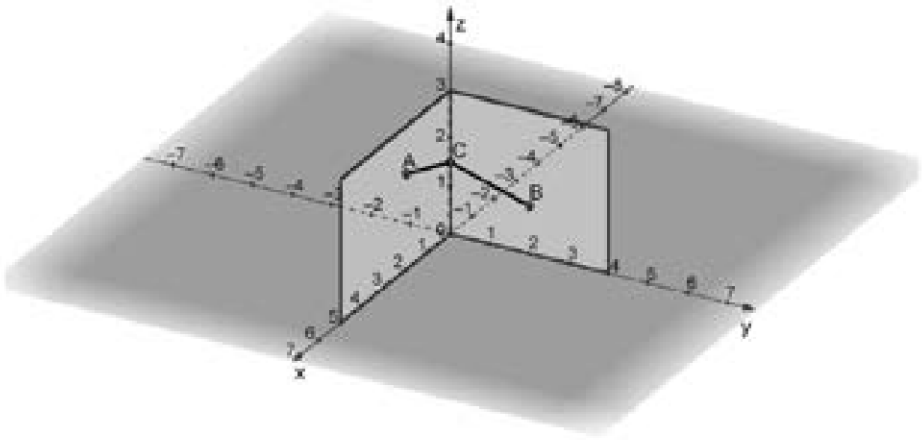
17. PAU 2022 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 4

4. ***a)*** Considereu la funció $f(x)=\begin{cases}\ln(x), & \text{si } x\in(0,\,e)\\ ax+b, & \text{si } x\in[e,\,4)\end{cases}$, on a i b són nombres reals. Trobeu el valor de a i de b per tal que la funció sigui contínua i derivable a l'interval $(0, 4)$.
[1,25 punts]

b) Calculeu la funció $g(x)$ que satisfà $g'(x)=\dfrac{x^3}{9x^4+1}$ i que passa pel punt $(0, -1)$.
[1,25 punts]

18. PAU 2022 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 6

6. La imatge següent mostra dues parets perpendiculars d'una sala representades en uns eixos de coordenades, de manera que una paret és al pla $y = 0$ i l'altra és al pla $x = 0$.



En el punt $A = (2, 0, 2)$ hi volem penjar un altaveu que ha d'estar connectat a un equip de so, el qual està situat a l'altra paret, en el punt $B = (0, 2, 1)$. La connexió entre A i B la farem mitjançant un cable que passi pel punt $C = (0, 0, h)$, situat a la recta vertical d'intersecció de les dues parets. Com que la qualitat del so depèn, entre altres factors, de la longitud del cable que uneix els dos aparells, volem fer una instal·lació amb el mínim de cable possible.

a) Comproveu que la longitud total del cable necessari, en funció de l'altura h per on ha de passar el cable a l'eix vertical OZ, ve donada per l'expressió $L(h) = \sqrt{h^2 - 4h + 8} + \sqrt{h^2 - 2h + 5}$.

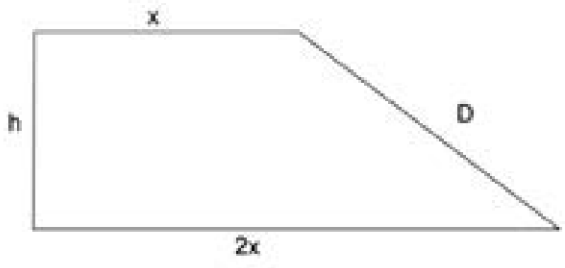
[0,75 punts]

b) Calculeu les coordenades del punt C per on ha de passar el cable per tal que la longitud del cable sigui mínima. Calculeu aquesta longitud mínima del cable.

[1,75 punts]

19. PAU 2022 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 6

6. Al pati d'una escola es vol crear una àrea de joc de 30 m^2 per als més petits en forma de trapezi rectangular, de manera que la base més gran mesuri el doble que la base més petita, tal com mostra la figura, i que el costat oblic respecte a les bases (D) sigui tan curt com sigui possible.



a) Justifiqueu que se satisfan les relacions següents: $h = \dfrac{20}{x}$ i $D(x) = \sqrt{\dfrac{400}{x^2} + x^2}$.

[1 punt]

b) Trobeu les dimensions del trapezi per a les quals la longitud del costat D és mínima.

[1,5 punts]

20. PAU 2022 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 4

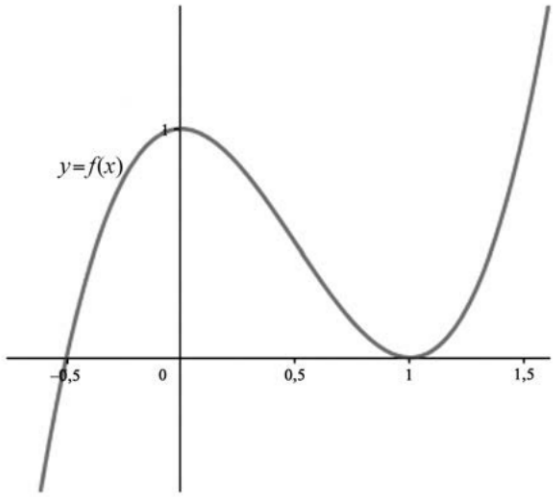
4. A $\mathbb{R}^2$, considereu els triangles rectangles que tenen els vèrtexs en els punts $O = (0, 0)$, $A = (x, 0)$ i $B = (0, y)$, amb $x > 0$ i $y > 0$, i en què la suma dels catets és 10.

a) Expresseu l'àrea del triangle AOB en funció de x. Per a quin valor de x l'àrea del triangle AOB és la més gran possible? Quin valor té aquesta àrea màxima?
[1,25 punts]

b) Expresseu la hipotenusa del triangle AOB en funció de x. Per a quin valor de x la hipotenusa del triangle AOB és la més petita possible? Quin és aquest valor mínim?
[1,25 punts]

21. PAU 2021 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 4

4. ***a)*** En la figura es mostra la gràfica de la funció $f(x)$. Representeu de manera esquemàtica la gràfica de la funció derivada de $f(x)$. Expliqueu el raonament que heu seguit.
[1,25 punts]



b) Calculeu els valors de a i b perquè la funció $g(x) = ax^3 + bx^2 + 1$ tingui un punt d'inflexió en $x = \frac{1}{2}$ i la seva derivada en aquest punt sigui $\frac{-3}{2}$.
[1,25 punts]

22. PAU 2021 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 6

6. Considereu la funció $f(x) = \frac{x^3}{x-2}$.

a) Estudieu si té punts crítics i, en cas que en tingui, justifiqueu de quin tipus són. Determineu també quins són els intervals de creixement i decreixement de la funció.
[1,5 punts]

b) Comproveu que l'equació $f(x) = 0$ té una única solució en l'interval $(-2, 1)$.
[1 punt]

23. PAU 2021 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 1

1. Considereu la paràbola $y = 4 - x^2$ i un valor $a > 0$.

a) Comproveu que l'equació de la recta tangent a la gràfica de la paràbola en el punt d'abscissa $x = a$ és $y = -2ax + a^2 + 4$ i calculeu els punts de tall d'aquesta recta tangent amb els eixos de coordenades.

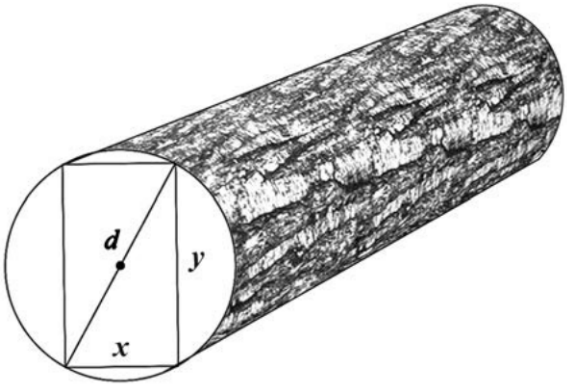
[1,25 punts]

b) Calculeu el valor de $a > 0$ perquè l'àrea del triangle determinat per aquesta recta tangent i els eixos de coordenades sigui mínima.

[1,25 punts]

24. PAU 2021 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 4

4. La resistència al trencament R d'una biga de secció rectangular de base x i altura y és directament proporcional al producte xy^2; per tant, $R = kxy^2$, en què k és una constant positiva. Disposem d'un tronc de fusta en forma de cilindre de diàmetre d com el de la figura.



a) Comproveu que la resistència R de la biga rectangular de base x que podem construir amb aquest tronc ve donada per l'expressió $R = kx(d^2 - x^2)$.

[1,25 punts]

b) Calculeu les dimensions de la biga rectangular de resistència màxima que podem construir a partir d'aquest tronc i calculeu aquesta resistència màxima.

[1,25 punts]

25. PAU 2021 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 6

6. Resoleu les dues qüestions següents:

a) Sigui $f(x) = 2x^3 + mx^2 + nx + p$ una funció que té dos extrems relatius en $x = -3$ i en $x = 1$ i que passa pel punt $(3, 4)$. Calculeu els valors de m, n i p.

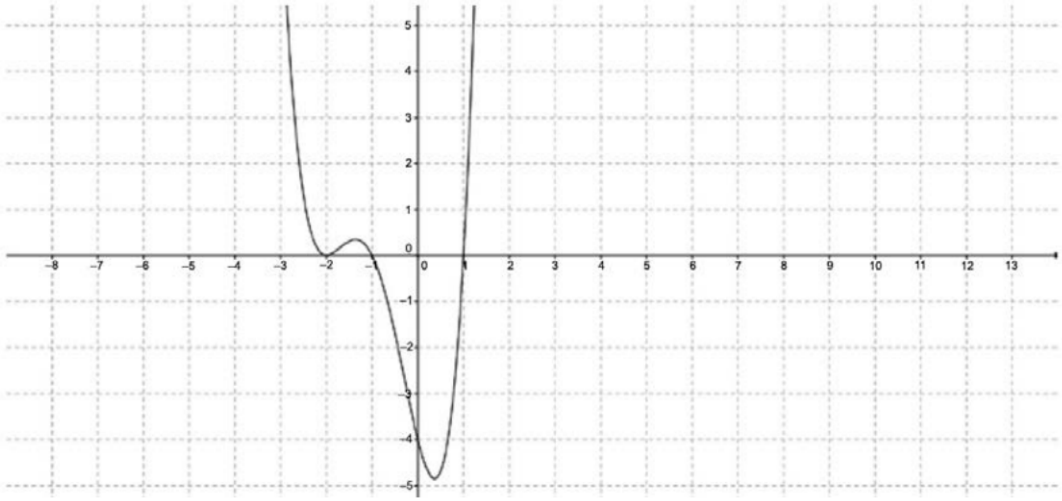
[1,25 punts]

b) Calculeu l'equació de la recta tangent a la funció $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ en $x = -3$.

[1,25 punts]

26. PAU 2020 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 3

3. Sigui $f(x)$ una funció derivable la gràfica de la qual passa pel punt (0, 1). La gràfica de la seva derivada, $f'(x)$, és la que es mostra en la figura.

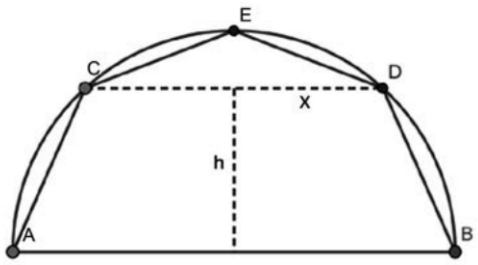


a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en el punt de la gràfica d'abscissa $x = 0$.
[1,25 punts]

b) Trobeu les abscisses dels punts singulars de la funció $f(x)$ i classifiqueu-los.
[1,25 punts]

27. PAU 2020 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 5

5. Una empresa està treballant en el disseny d'unes càpsules de cafè. L'empresa ha construït la secció transversal de les càpsules inscrivint-la en una semicircumferència de radi 1, traçant a continuació una corda CD paral·lela al diàmetre AB i incorporant el punt E en el punt mitjà de l'arc CD. D'aquesta manera queda traçat el pentàgon $ACEDB$, tal com es mostra en la figura.

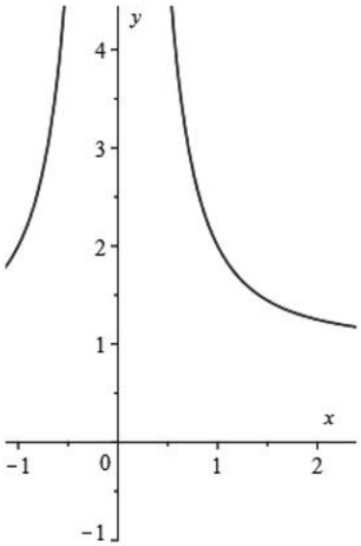


a) Expresseu en funció de x i h l'àrea del pentàgon $ACEDB$.
[1,25 punts]

b) Quina ha de ser la distància (indicada en la figura per h) a què s'ha de situar la corda CD de AB per tal que l'àrea del pentàgon $ACEDB$ sigui màxima?
[1,25 punts]

28. PAU 2020 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

1. Tracem la recta tangent a la funció $f(x)=\frac{1}{x^2}+1$ per un punt $P=(a, f(a))$ del primer quadrant. Aquesta recta juntament amb els eixos de coordenades formen un triangle.



a) Comproveu que l'àrea d'aquest triangle, en funció de a, ve donada per la funció

$$g(a)=\frac{(a^2+3)^2}{4a}.$$

[1,25 punts]

b) En quin punt P l'àrea del triangle és mínima? Calculeu aquest valor mínim.

[1,25 punts]

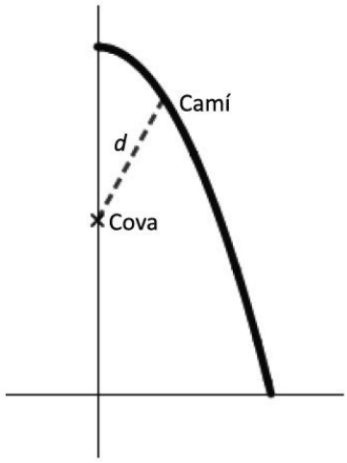
29. PAU 2020 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4

4. Considereu la funció $f(x)=\frac{ax^2+b}{x}$, en què a i b són dos paràmetres reals. Calculeu els valors de a i b de manera que la funció $f(x)$ tingui una asímptota obliqua de pendent 1 i un mínim en el punt de la gràfica d'abscissa $x=2$.

[2,5 punts]

30. PAU 2020 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 2

2. S'han trobat unes pintures rupestres en una cova situada en una zona molt pedregosa. Hi ha un camí que voreja parcialment la cova format per l'arc de corba $y=4-x^2$ d'extrems $(0, 4)$ i $(2, 0)$. La cova està situada en el punt de coordenades $(0, 2)$, tal com es mostra en la figura, i es vol habilitar un accés rectilini d des del camí a la cova que sigui el més curt possible.



a) Identifiqueu a la gràfica de la figura les coordenades de la cova i del punt del camí des d'on es vol habilitar l'accés. Comproveu que la funció $f(x)=\sqrt{x^4-3x^2+4}$ calcula la distància des de cada punt del camí a la cova.

[1,25 punts]

b) Calculeu les coordenades del punt del camí que queda més a prop de la cova i digueu quina serà la longitud de l'accés d.

[1,25 punts]

31. PAU 2019 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 4

4. Considereu la funció $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica en aquells punts en què la recta tangent és horitzontal.
[1 punt]

b) Calculeu les coordenades del punt de la gràfica de la funció $f(x)$ en què el pendent de la recta tangent és màxim.
[1 punt]

32. PAU 2019 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

1. Les pàgines d'un llibre han de tenir cada una 600 cm^2 de superfície, amb uns marges al voltant del text de 2 cm a la part inferior, 3 cm a la part superior i 2 cm a cada costat. Calculeu les dimensions de la pàgina que permeten la superfície impresa més gran possible.
[2 punts]

33. PAU 2019 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 1

1. Volem construir un marc rectangular de fusta que delimiti una àrea de 2 m^2. Sabem que el preu de la fusta és de 7,5 €/m per als costats horitzontals i de 12,5 €/m per als costats verticals. Determineu les dimensions que ha de tenir el rectangle perquè el cost total del marc sigui el mínim possible. Quin és aquest cost mínim?
[2 punts]

34. PAU 2019 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 6

6. Sabem que una funció $f(x)$ és contínua i derivable a tots els nombres reals, que té com a segona derivada $f''(x) = 6x$ i que la recta tangent en el punt d'abscissa $x = 1$ és horitzontal.

a) Determineu l'abscissa dels punts d'inflexió de la funció f i els intervals de concavitat i convexitat. Justifiqueu que la funció f té un mínim relatiu en $x = 1$.
[1 punt]

b) Sabent, a més, que la recta tangent en el punt d'abscissa $x = 1$ és $y = 5$, calculeu l'expressió de la funció f.
[1 punt]

35. PAU 2018 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 1

1. Considereu la funció polinòmica $f(x) = x^3 - ax^2 + bx + c$.

a) Calculeu els valors dels paràmetres a, b i c, sabent que la funció té un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = 1$ i que la recta tangent a la gràfica de la funció en el punt d'abscissa $x = 0$ és la recta $y = x + 3$.

[1 punt]

b) Per als valors $a = 2$, $b = 1$ i $c = 3$, calculeu les abscisses dels extrems relatius de la funció i classifiqueu-los.

[1 punt]

36. PAU 2018 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3

3. Sigui la funció $f(x) = x^3 - x^2$.

a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica i que és paral·lela a la recta d'equació $x + 3y = 0$.

[1 punt]

b) Calculeu, si n'hi ha, els punts de la gràfica en què la funció presenta un màxim o mínim relatiu o un punt d'inflexió.

[1 punt]

37. PAU 2018 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 4

4. Sabem que una funció $f(x)$ està definida per a tots els nombres reals i que és derivable dues vegades. Sabem també que té un punt d'inflexió en el punt d'abscissa $x = 2$, que l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en aquest punt és $y = -124x + 249$ i que $f(-3) = -4$.

a) Calculeu $f''(2)$, $f'(2)$ i $f(2)$.

[1 punt]

b) Calculeu $\int_{-3}^{2} f'(x)\,\mathrm{d}x$.

[1 punt]

38. PAU 2017 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 4

4. De les funcions $f(x)$, $f'(x)$, $g(x)$ i $g'(x)$, en coneixem els valors següents:

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	2	1
1	0	−6

x	$g(x)$	$g'(x)$
0	1	1
1	3	3

a) De la funció $f(x)$ sabem també que el pendent de la recta tangent a un punt d'abscissa x és $4x^3 - 9x^2 - 2x + 1$. Trobeu $f(x)$.

[1 punt]

b) Calculeu $(g \circ f)'(1)$.

[1 punt]

39. PAU 2017 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3

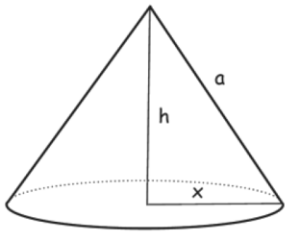
3. Sigui la funció $f(x)=\dfrac{1}{x^2-k}$, en què k és un paràmetre real diferent de 0. Per als diferents valors del paràmetre k:

a) Calculeu el domini i les asímptotes de la funció.
[1 punt]

b) Calculeu els punts amb un màxim o un mínim relatiu.
[1 punt]

40. PAU 2017 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 6

6. Considereu un con de 120 cm^3 de volum que té una altura h, un radi de la base x i una aresta a, com el de la figura següent:



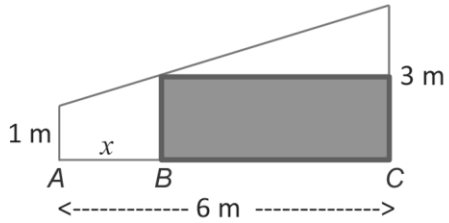
a) Comproveu que $a^2=\dfrac{360}{\pi}\cdot\dfrac{1}{h}+h^2$.
[1 punt]

b) Calculeu l'altura del con que té l'aresta de longitud mínima.
[1 punt]

NOTA: Recordeu que el volum del con és un terç del volum del cilindre recte que té la mateixa base i la mateixa altura que el con.

41. PAU 2017 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 6

6. El croquis de sota representa la paret d'unes golfes amb el sostre inclinat, en la qual es vol construir un armari rectangular com el de la zona ombrejada.



a) Expresseu l'àrea del rectangle en funció de la longitud x del segment AB.
[1 punt]

b) Determineu les dimensions del rectangle si volem que tingui una superfície màxima i calculeu aquesta superfície màxima.
[1 punt]

42. PAU 2016 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 3

3. Volem fer un envàs de gelat amb forma de prisma regular de base quadrada i amb una capacitat de 80 cm^3. Per a elaborar-ne la tapa i la superfície lateral, farem servir un material determinat que costa 1 €/cm^2, però per a la base haurem d'utilitzar un material que és un 50 % més car.

a) Si x és la mesura, en cm, del costat de la base, comproveu que la funció que determina el preu de l'envàs és $P(x) = 2{,}5x^2 + \dfrac{320}{x}$.

[1 punt]

b) Calculeu les mides que ha de tenir l'envàs perquè el preu sigui el mínim possible.

[1 punt]

43. PAU 2016 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 3

3. Sigui la funció $f(x) = x\,e^{x-1}$.

a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x = 1$.

[1 punt]

b) Determineu en quins intervals la funció f és creixent i en quins intervals és decreixent.

[1 punt]

44. PAU 2016 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 3

3. Responeu a les qüestions següents:

a) Calculeu els màxims relatius, els mínims relatius i els punts d'inflexió de la funció $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$.

[1 punt]

b) Expliqueu raonadament que si $f(x)$ és una funció amb la derivada primera contínua en l'interval $[a, b]$ i satisfà que $f'(a) > 0$ i $f'(b) < 0$, aleshores hi ha, com a mínim, un punt de l'interval (a, b) en què la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en aquest punt és horitzontal.

[1 punt]

45. PAU 2016 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 6

6. Sabem que una funció $f(x)$ té per derivada $f'(x) = (x + 1)e^x$ i que $f(0) = 2$.

a) Trobeu l'equació de la recta tangent a $y = f(x)$ en el punt de la corba d'abscissa $x = 0$.

[1 punt]

b) Calculeu l'expressió de $f(x)$.

[1 punt]

46. PAU 2015 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 5

5. Siguin x i y les mesures dels costats d'un rectangle inscrit en una circumferència de diàmetre 2.

a) Comproveu que la superfície del rectangle, en funció de x, és donada per l'expressió $S(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$.

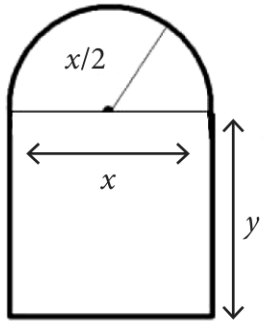
[1 punt]

b) Calculeu els valors de les mesures x i y per als quals la superfície del rectangle és màxima i calculeu el valor d'aquesta superfície màxima.

[1 punt]

47. PAU 2015 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 6

6. La portalada d'una catedral està formada, en la part superior, per un arc de mitja circumferència que recolza sobre dues columnes, com il·lustra la figura adjunta, en què x és el diàmetre de la circumferència, és a dir, la distància entre columnes, i y és l'alçària de cada columna.



a) Comproveu que la funció $f(x, y) = \dfrac{\pi x^2}{8} + xy$ determina l'àrea d'aquesta portalada.

[1 punt]

b) Si el perímetre de la portalada fa 20 m, determineu les mides x i y de la portalada que en maximitzen l'àrea.

[1 punt]

48. PAU 2015 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 2

2. Sigui la funció $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$.

a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x = 1$.

[1 punt]

b) Calculeu les abscisses dels punts de la gràfica en què hi ha un mínim relatiu, un màxim relatiu o una inflexió.

[1 punt]

49. PAU 2014 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 2

2. Siguin les funcions $f(x)=\dfrac{e^{ax}+b}{4}$ i $g(x)=+\sqrt{3x+4}$.

a) Determineu el domini i el recorregut de la funció g.
[1 punt]

b) Calculeu per a quins valors de a i de b les gràfiques de les dues funcions són tangents (és a dir, tenen la mateixa recta tangent) en el punt d'abscissa $x=0$.
[1 punt]

50. PAU 2014 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 4

4. Sabem que una funció f té per derivada la funció $f'(x)=(3x-2)^2\,(x-2)$.

a) Calculeu els valors de x en què la funció f té un màxim relatiu, un mínim relatiu o un punt d'inflexió, i indiqueu en cada cas de què es tracta.
[1 punt]

b) Determineu la funció f sabent que s'anul·la en el punt d'abscissa $x=2$.
[1 punt]

51. PAU 2014 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 3

3. Un nedador és al mar en un punt N, situat a 3 km d'una platja recta, i just al davant d'un punt S, situat a la platja arran de l'aigua; i vol anar a un punt A, situat també arran de l'aigua i a 6 km del punt S, de manera que el triangle NSA és rectangle en el vèrtex S. El nedador neda a una velocitat constant de 3 km/h i camina a una velocitat constant de 5 km/h.

a) Si P és un punt entre el punt S i el punt A que està a una distància x de S, demostreu que el temps, en hores, que necessita el nedador per a nedar del punt N al punt P i caminar des del punt P fins al punt A és determinat per l'expressió $t(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{3}+\dfrac{6-x}{5}$.
[1 punt]

b) Calculeu el valor de x que determina el temps mínim que cal per a anar del punt N al punt A, passant per P. Quin és el valor d'aquest temps mínim?
[1 punt]

52. PAU 2014 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 1

1. Considereu la funció $f(x)=\dfrac{x+3}{x-2}$.

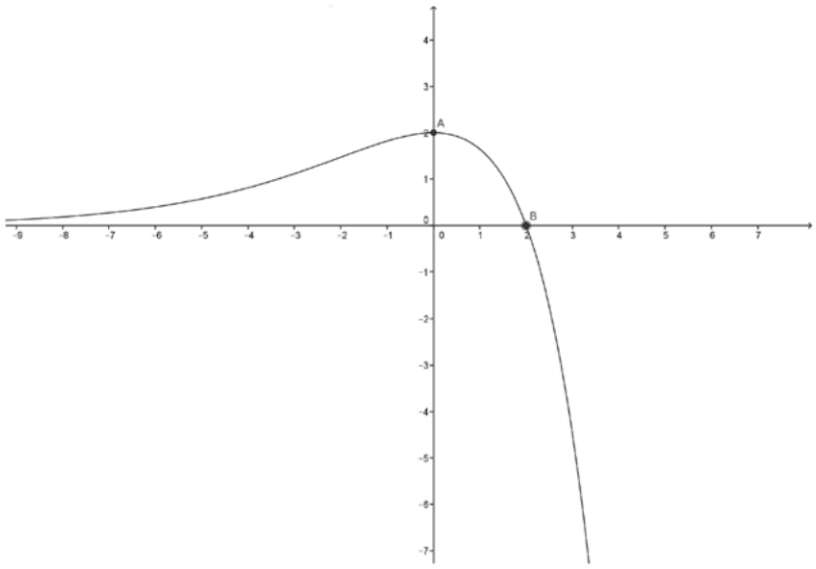
a) Calculeu les asímptotes verticals, horitzontals i obliqües de la funció f.
[1 punt]

b) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en aquells punts en què la recta tangent sigui paral·lela a la recta $y=-5x+4$.
[1 punt]

53. PAU 2014 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 6

6. Responeu a les qüestions següents:

a) La funció $f(x) = (b - x)e^{ax}$, amb a i b constants, té la representació gràfica següent



i sabem que passa pels punts $A = (0, 2)$ i $B = (2, 0)$, i que en el punt A la recta tangent a la gràfica és horitzontal. Calculeu els valors de a i b.

[1 punt]

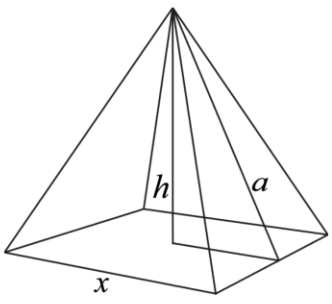
b) Calculeu $\int_1^2 x \ln x \, dx$.

[1 punt]

Institut d'Estudis Catalans

54. PAU 2013 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 6

6. Volem construir una tenda en forma de piràmide regular de base quadrada. Disposem de 300 m^2 de tela per a la fabricació de les quatre cares de la tenda (se suposa que en l'elaboració de les cares no es perd gens de tela). Designem x la longitud d'un costat de la base de la tenda.



a) Sabent que el volum d'una piràmide és igual a un terç del producte de l'àrea de la base per l'altura, comproveu que, en aquest cas,

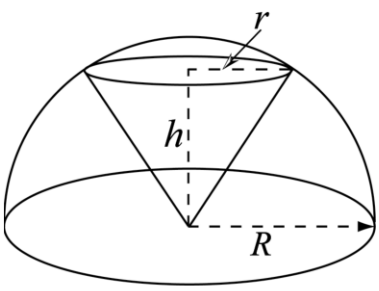
$$V(x) = \frac{x\sqrt{(9 \times 10^4) - x^4}}{6}$$

b) Determineu el valor de x perquè el volum sigui el més gran possible (no cal que comproveu que el valor obtingut correspon realment a un màxim).

[1 punt per cada apartat]

55. PAU 2013 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 5

5. En una semiesfera de radi R inscrivim un con situant el vèrtex al centre de la semiesfera, tal com es veu en el dibuix.



a) Sabent que el volum d'un con és igual a l'àrea de la base multiplicada per l'altura i dividida per 3, comproveu que, en aquest cas, podem expressar el volum com

$$V = \frac{\pi \cdot h}{3}(R^2 - h^2)$$

b) Trobeu les dimensions d'aquest con (el radi de la base i l'altura) perquè el seu volum sigui màxim i comproveu que es tracta realment d'un màxim.

[0,5 punts per l'apartat *a*; 1,5 punts per l'apartat *b*]

56. PAU 2013 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 6

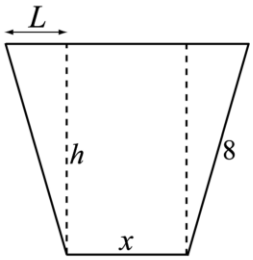
6. Sigui $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Sabem que la gràfica d'aquesta funció és tangent a la recta r: $y = x + 3$ en el punt d'abscissa $x = -1$, i que en el punt d'abscissa $x = 1$ la recta tangent és paral·lela a la recta r.

Calculeu el valor dels paràmetres a, b i c.

[2 punts]

57. PAU 2013 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 4

4. Es vol construir un canal que tingui com a secció un trapezi isòsceles de manera que l'amplària superior del canal sigui el doble de l'amplària inferior i que els costats no paral·lels siguin de 8 metres. A la dreta teniu un esquema de la secció del canal.



a) Trobeu el valor del segment L de la gràfica en funció de la variable x (amplària inferior del canal).

b) Sabem que l'àrea d'un trapezi és igual a l'altura multiplicada per la semisuma de les bases. Comproveu que, en aquest cas, l'àrea de la secció és donada per

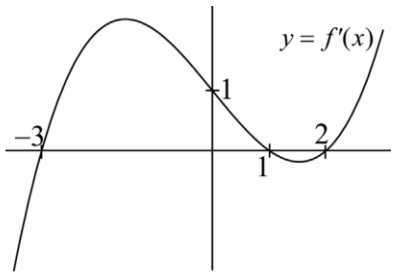
$$A(x) = \frac{3x\sqrt{256 - x^2}}{4}$$

c) Calculeu el valor de x perquè l'àrea de la secció del canal sigui màxima (no cal que comproveu que és realment un màxim).

[0,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*; 1 punt per l'apartat *c*]

58. PAU 2013 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 6

6. La funció $f(x)$ és derivable i passa per l'origen de coordenades. La gràfica de la funció derivada és la que veieu aquí dibuixada, essent $f'(x)$ creixent als intervals $(-\infty, -3]$ i $[2, +\infty)$.



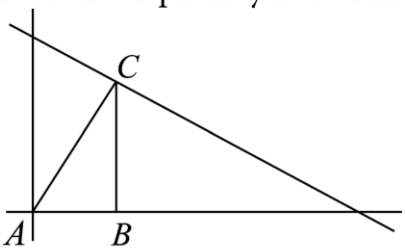
a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 0$.

b) Indiqueu les abscisses dels extrems relatius de la funció $f(x)$ i classifiqueu aquests extrems.

[1 punt per cada apartat]

59. PAU 2013 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 6

6. Un triangle rectangle situat en el primer quadrant té el vèrtex A en l'origen de coordenades, el vèrtex $B = (x, 0)$ en el semieix positiu d'abscisses i el vèrtex C pertany a la recta $x + 2y = 8$. L'angle recte és el que correspon al vèrtex B.



a) Comproveu que l'àrea del triangle es pot expressar de la manera següent: $A(x) = 2x - \frac{x^2}{4}$.

b) Trobeu els vèrtexs B i C perquè l'àrea del triangle sigui màxima i comproveu que es tracta realment d'un màxim.

[1 punt per cada apartat]

60. PAU 2012 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 4

4. Una fàbrica produeix diàriament x tones d'un producte A i $(40 - 5x)/(10 - x)$ tones d'un producte B. La quantitat màxima de producte A que es pot produir és 8 tones. El preu de venda del producte A és 100€ per tona i el del producte B és 250€ per tona.

a) Construïu la funció de la variable x que ens proporciona els ingressos diaris, suposant que es ven tota la producció.

b) Calculeu quantes tones de cada producte s'han de produir diàriament per a obtenir el màxim d'ingressos, i comproveu que és realment un màxim relatiu.

[0,5 punts per l'apartat *a*; 1,5 punts per l'apartat *b*]

61. PAU 2012 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 6

6. Donades la recta $y = ax + 1$ i la paràbola $y = 3x - x^2$,

a) Calculeu els valors del paràmetre a perquè siguin tangents.

b) Calculeu els punts de tangència.

[1,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*]

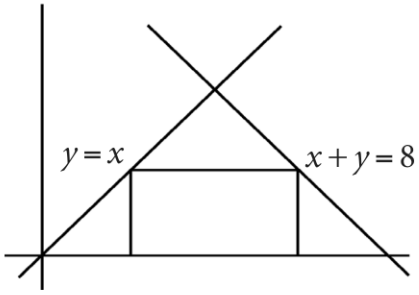
62. PAU 2012 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4

4. Un rectangle és inscrit en el triangle que té els costats en les rectes d'equacions

$$y = x, \quad x + y = 8, \quad y = 0,$$

i té un costat sobre la recta $y = 0$. Trobeu-ne els vèrtexs perquè la superfície sigui màxima.

[2 punts]



63. PAU 2012 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 2

2. Donades la recta $y = 3x + b$ i la paràbola $y = x^2$,

a) Calculeu l'abscissa del punt on la recta tangent a la paràbola és paral·lela a la recta donada.

b) Calculeu el valor del paràmetre b perquè la recta sigui tangent a la paràbola.

[1 punt per apartat]

64. PAU 2012 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 5

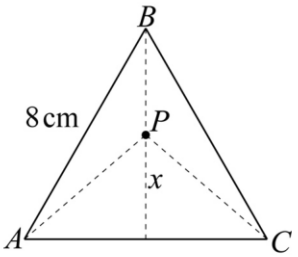
5. Un triangle equilàter de vèrtexs A, B i C té els costats de 8 cm. Situem un punt P sobre una de les altures del triangle, a una distància x de la base corresponent.

a) Calculeu l'altura del triangle de vèrtexs A, B i C.

b) Indiqueu la distància del punt P a cadascun dels vèrtexs (en funció de x).

c) Determineu el valor de x perquè la suma dels quadrats de les distàncies del punt P a cadascun dels tres vèrtexs sigui mínima.

[0,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*; 1 punt per l'apartat *c*]



65. PAU 2011 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 3

3. Donada la funció $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$:

a) Determineu la relació que han de complir els paràmetres a, b i c perquè $f(x)$ tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x=-1$.

b) Calculeu el valor del paràmetre a perquè hi hagi un punt d'inflexió de la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x=0$.

c) Determineu la relació entre els paràmetres a, b i c sabent que la gràfica de $f(x)$ talla l'eix OX en el punt d'abscissa $x=-2$.

d) Calculeu el valor dels paràmetres a, b i c perquè es compleixin les tres propietats anteriors alhora.

[0,5 punts per cada apartat]

66. PAU 2011 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 6

6. Sigui $f(a)=\int_0^{1/a}(a^2+x^2)dx$ per $a>0$.

a) Comproveu que $f(a)=\dfrac{1}{3a^3}+a$.

b) Calculeu el valor del paràmetre a perquè la funció $f(a)$ tingui un mínim relatiu.

[1 punt per cada apartat]

67. PAU 2011 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 6

6. Sigui $f(x)=x^2\cdot e^{-ax}$ quan $a\neq 0$.

a) Calculeu el valor de a perquè aquesta funció tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x=2$.

b) Quan $a=2$, classifiqueu-ne els extrems relatius.

[1 punt per cada apartat]

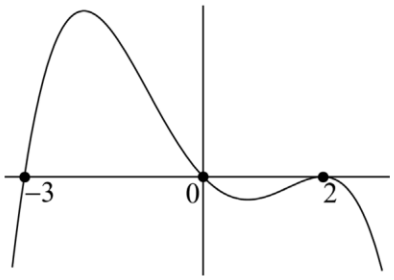
Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Organització de Proves d'Accés a la Universitat

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2010-2011

Matemàtiques

68. PAU 2011 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 3

3. La gràfica corresponent a la derivada d'una funció $f(x)$ és la següent:



a) Expliqueu raonadament quins valors de x corresponen a màxims o a mínims relatius de $f(x)$.

b) Determineu els intervals de creixement i decreixement de la funció $f(x)$.

[1,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*]

69. PAU 2011 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 6

6. Dins d'un triangle rectangle, de catets 3 i 4 cm, hi ha un rectangle. Dos costats del rectangle estan situats en els catets del triangle i un dels vèrtexs del rectangle és a la hipotenusa del triangle.

a) Feu un esbós de la situació descrita.

b) Si x és la longitud del costat del rectangle que està situat en el catet petit i y és l'altre costat del rectangle, comproveu que es compleix que $4x + 3y = 12$.

c) Determineu les dimensions del rectangle perquè l'àrea sigui màxima.

[0,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*; 1 punt per l'apartat *c*]

70. PAU 2010 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 3

3. Considereu tots els prismes rectes de base quadrada amb un volum V fixat. Anomeneu x el costat de la base del prisma i y la seva altura.

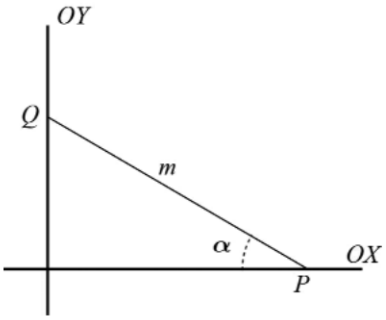
a) Trobeu l'expressió del volum i de l'àrea total del prisma en funció de les variables x i y.

b) Comproveu que el que té àrea total mínima és en realitat un cub.

[0,5 punts per l'apartat *a*; 1,5 punts per l'apartat *b*]

71. PAU 2010 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3

3. Un segment de longitud fixada m recolza sobre els eixos de coordenades. Calculeu el valor de l'angle α que forma el segment amb l'eix OX perquè el triangle rectangle determinat pel segment amb els eixos i del qual m és la hipotenusa tingui àrea màxima. Comproveu que es tracta realment d'un màxim.



[2 punts]

72. PAU 2010 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 3

3. Sigui $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polinomi qualsevol de segon grau.

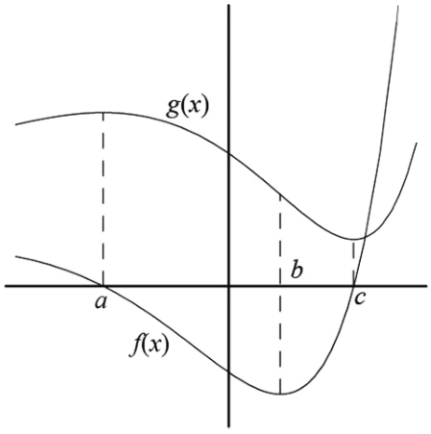
a) Trobeu la relació existent entre els paràmetres a, b i c sabent que es compleix que $P(1) = 0$ i $P(2) = 0$.

b) Quan es compleix la condició anterior, indiqueu quins valors pot tenir $P'(3/2)$.

[1 punt per cada apartat]

73. PAU 2010 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 5

5. En la figura següent es representen dues funcions. L'una és la derivada de l'altra. Decidiu si la funció $f(x)$ és la derivada de la funció $g(x)$ o és a l'inrevés, estudiant què passa en els punts $x = a$, $x = b$ i $x = c$.



[2 punts]

74. PAU 2009 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 3

3. Sigui $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 1$. Donades les rectes r_1: $y = x + 2$ i r_2: $y = 7x - 2$:

a) Expliqueu, raonadament, si alguna de les dues rectes pot ser tangent a la corba $y = f(x)$ en algun punt.

b) En cas que alguna d'elles ho sigui, trobeu el punt de tangència.

[1 punt per cada apartat]

75. PAU 2009 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 5

PROBLEMES

5. Sigui la funció $f(x) = a + \frac{4}{x} + \frac{b}{x^2}$.

a) Calculeu els valors de a i b, sabent que la recta $2x + 3y = 14$ és tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 3$.

Per a la resta d'apartats, considereu que $a = -3$ i que $b = 4$.

b) Trobeu els intervals de creixement i de decreixement de la funció $f(x)$. Trobeu i classifiqueu els extrems relatius que té la funció.

c) Calculeu els punts de tall de la funció $f(x)$ amb l'eix OX.

d) Trobeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció $f(x)$, l'eix OX i les rectes $x = 1$ i $x = 3$.

[1 punt per l'apartat *a*; 1 punt per l'apartat *b*; 0,5 punts per l'apartat *c*; 1,5 punts per l'apartat *d*]

76. PAU 2008 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 1

QÜESTIONS

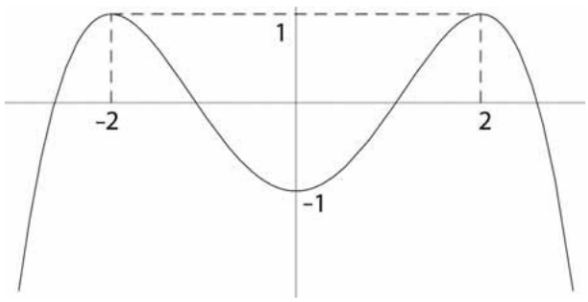
1. Considereu la funció $f(x) = ax^2 + x + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Trobeu els valors de a i b que fan que la recta $y = 2x + 1$ sigui tangent a la gràfica de f quan $x = 1$.

[2 punts]

77. PAU 2008 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 5

PROBLEMES

5. Considereu una funció tal que la seva representació gràfica a l'interval (–3, 3) és la següent:



a) Determineu les abscisses dels punts extrems (màxims i mínims) relatius.
b) Estudieu el creixement i decreixement de la funció a l'interval (–3, 3).
c) Feu un esbós de la gràfica de la derivada d'aquesta funció.
d) Sabent que la funció és de la forma $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$, trobeu de quina funció es tracta.

[0,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*; 1 punt per l'apartat *c*; 2 punts per l'apartat *d*]

78. PAU 2008 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 1

QÜESTIONS

1. Trobeu els valors dels paràmetres a i b per tal que la funció següent sigui contínua i derivable en $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x + 3 & \text{si} \quad x < 2 \\ x^3 + bx + 5 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

[2 punts]

79. PAU 2008 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 3

3. Digueu per a quin valor de x la recta tangent a la corba $y = \ln(x^2 + 1)$ és paral·lela a la recta $y = x$. Escriviu l'equació d'aquesta tangent.

[2 punts]

80. PAU 2008 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 6

6. De tots els triangles rectangles d'hipotenusa 10 cm, trobeu la longitud dels catets del triangle que té el perímetre màxim. Comproveu que la solució trobada correspongui realment al perímetre màxim.

[2,5 punts pel càlcul dels catets; 1,5 punts per la comprovació]

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

81. PAU 2007 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 6

6. Donades les funcions $f(x) = x^2 - ax - 4$ i $g(x) = \frac{x^-}{2} + b$:

a) Calculeu a i b de manera que les gràfiques de $f(x)$ i de $g(x)$ siguin tangents en el punt d'abscissa $x = 3$, és a dir, que tinguin la mateixa recta tangent en aquest punt.
b) Trobeu l'equació de la recta tangent esmentada en l'apartat anterior.
c) Pel valor de a obtingut en el primer apartat, calculeu el valor de l'àrea de la regió limitada per l'eix d'abscisses OX i la funció $f(x)$.

[1,5 punts l'apartat *a*, 1 punt l'apartat *b*, 1,5 punts l'apartat *c*]

---

82. PAU 2007 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

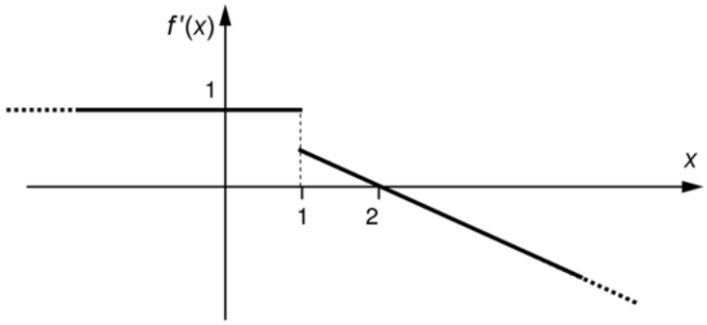
QÜESTIONS

1. En quin punt la recta tangent a la funció $f(x) = x \cdot e^x$ és paral·lela a l'eix d'abscisses? Escriviu l'equació de la recta tangent en aquest punt.

[2 punts]

83. PAU 2007 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 2

2. La funció derivada $f'(x)$ de certa funció contínua f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ és una funció a trossos formada per les semirectes del dibuix.



a) Digueu si $f(x)$ és derivable en tots els punts de $\mathbf{R}$ i per què.
b) Estudieu el creixement i el decreixement de $f(x)$.
c) Trobeu si $f(x)$ té algun extrem relatiu i, si és així, per a quin valor de x i de quin tipus.
d) Sabent que $f(0) = 1$, calculeu el valor de $f(1)$.
Justifiqueu totes les respostes.

[0,5 punts cada apartat]

84. PAU 2007 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 3

3. Calculeu els valors del paràmetre a, $a \neq 0$, que fan que les tangents a la corba d'equació $y = ax^4 + 2ax^3 - ax + 1512$ en els punts d'inflexió siguin perpendiculars.

[2 punts]

85. PAU 2007 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 5

PROBLEMES

5. Un magatzem té forma de prisma recte de base quadrada i un volum de 768 m^3. Se sap que la pèrdua de calor a través de les parets laterals val 100 unitats per m^2, mentre que a través del sostre és de 300 unitats per m^2. La pèrdua pel sòl és molt petita i es pot considerar nul·la. Calculeu les dimensions del magatzem perquè la pèrdua de calor total sigui mínima.

[4 punts]

86. PAU 2006 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 1

Qüestions

1. Sigui $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funció definida per $f(x) = e^x (ax + b)$, on *a* i *b* són nombres reals.
   a) Calculeu els valors de *a* i *b* per tal que la funció tingui un extrem relatiu en el punt $(3, e^3)$.
   b) Per als valors de *a* i *b* obtinguts, digueu quin tipus d'extrem té la funció en el punt esmentat.

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. Total: 2 punts]

87. PAU 2006 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 5

Problemes

5. Considereu la paràbola d'equació $y = x^2 + 2x - 3$.
   a) Calculeu les equacions de les rectes tangents a la paràbola en els punts d'abscissa $x = -1$ i $x = 1$.
   b) Calculant el mínim de la funció $y = x^2 + 2x - 3$, trobeu el vèrtex de la paràbola.
   c) Trobeu les interseccions de la paràbola amb els eixos i feu una representació gràfica de la paràbola i de les tangents obtingudes al primer apartat.
   d) Calculeu l'àrea compresa entre la paràbola i les rectes tangents.

[Puntuació: cada apartat val 1 punt. Total: 4 punts]

$$\begin{cases} px + 7y + 8z = 1370 \end{cases}$$

88. PAU 2006 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 6

6. Considereu la funció $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7$.
   a) Calculeu *c* sabent que la seva recta tangent en el punt d'abscissa $x = 0$ és horitzontal.
   b) Per al valor de *c* trobat a l'apartat anterior, calculeu *a* i *b* sabent que aquesta funció té un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = -2$ i que talla l'eix *OX* quan $x = 1$.
   c) Per als valors obtinguts als altres apartats, calculeu els intervals on la funció creix i decreix, els seus extrems relatius i feu una representació gràfica aproximada.

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt; apartat c) 2 punts. Total: 4 punts]

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Organització de Proves d'Accés a la Universitat

Matemàtiques

sèrie 3

PAU. Curs 2005-2006

A continuació trobareu l'enunciat de quatre qüestions i de dos problemes. Trieu només tres de les quatre qüestions per respondre i un dels dos problemes per resoldre. En les respostes que doneu heu d'explicar sempre què us proposeu de fer i per què. Podeu fer servir qualsevol mena de calculadora, llevat de les que treballin amb un sistema operatiu d'ordinador tipus WINDOWS/LINUX.

Puntuació de cada qüestió: 2 punts.
Total de qüestions i puntuació: 3 x 2 = 6 punts.
Puntuació del problema: 4 punts.

89. PAU 2006 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 1

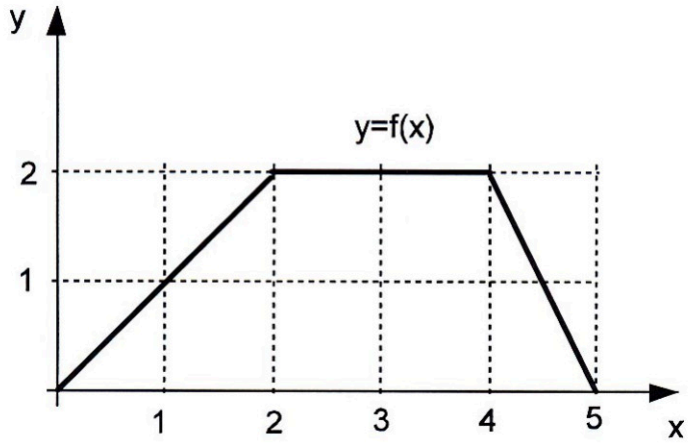
Qüestions

1. Considereu la funció definida per $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$. Calculeu quant val el pendent de la recta tangent a la seva gràfica pel punt d'abscissa $x = 0$. Trobeu si hi ha altres punts en els quals el pendent de la tangent sigui igual al que s'ha obtingut.

[Puntuació: 2 punts]

90. PAU 2006 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 2

2. Considereu la funció $y = f(x)$ definida per a $x \in [0,5]$ que apareix dibuixada a la figura adjunta.



a) Quina és l'expressió de la seva funció derivada quan existeix?

b) Calculeu $\int_0^3 f(x)\,dx$.

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. Total: 2 punts]

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

91. PAU 2005 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 5

PROBLEMES

5. Considereu la funció $f(x) = 3 - x^2$ i un punt de la seva gràfica, M, situat en el primer quadrant ($x \geq 0$, $y \geq 0$). Si pel punt M tracem paral·leles als eixos de coordenades, la seva intersecció amb OX i OY determina dos punts, A i B, respectivament.

a) Feu un gràfic dels elements del problema.
b) Trobeu les coordenades del punt M que fa que el rectangle $OAMB$ tingui l'àrea màxima.

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 3 punts. Total: 4 punts]

92. PAU 2005 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 5

PROBLEMES

5. La recta tangent a la paràbola $y = 3 - x^2$ en un punt M situat dins del primer quadrant ($x > 0$, $y > 0$), talla l'eix OX en el punt A i l'eix OY en el punt B.

a) Feu un gràfic dels elements del problema.
b) Trobeu les coordenades del punt M que fan que el triangle OAB tingui l'àrea mínima.

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 3 punts. Total: 4 punts]

93. PAU 2005 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 3

3. Trobeu els màxims i mínims relatius de la funció $f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3$.

[2 punts]

94. PAU 2005 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 4

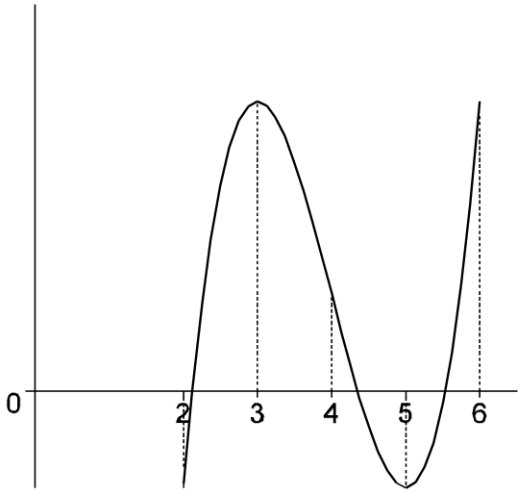
4. Sigui la paràbola $y = 2x^2 + x + 1$ i sigui A el punt de la paràbola d'abscissa 0.

a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la paràbola en el punt A.
b) En quin punt de la paràbola la recta tangent és perpendicular a la recta que heu trobat en l'apartat anterior?

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. Total: 2 punts]

95. PAU 2004 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 2

2. La gràfica següent correspon a una funció $f:[2\ 6] \to R$ derivable i amb derivada contínua. Feu un esbós de la gràfica de $f':(2\ 6) \to R$ i justifiqueu-ne el perquè.



[2 punts]

96. PAU 2004 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 5

5. Considereu la funció polinòmica de tercer grau, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $(a \neq 0)$.

a) Trobeu els valors de a, b, c i d per als quals $f(x)$ talla l'eix OX en els punts $x = 0$ i $x = 1$ i presenta un mínim relatiu en el punt $x = 0$.
b) Feu un esbós de la gràfica de la funció que heu trobat, i acabeu de calcular els elements necessaris per dibuixar-la.

[Puntuació: apartat a) 2 punts; apartat b) 2 punts. Total: 4 punts]

97. PAU 2004 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 6

6. Donats la funció $f(x) = \sqrt{x}$ i el punt $A(2, 0)$ situat sobre l'eix de les abscisses:

   a) Trobeu la funció que expressa la distància del punt A a un punt qualsevol de la gràfica de la funció.
   b) Trobeu les coordenades del punt de la gràfica de $f(x)$ més proper a A.

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 3 punts. Total: 4 punts]

2

98. PAU 2004 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 1

stricte universitari d

QÜESTIONS

1. Considereu la funció $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$.

   a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 3$.
   b) Existeix alguna altra recta tangent a la gràfica de $f(x)$ que sigui paral·lela a la que heu trobat? Raoneu la resposta i, en cas afirmatiu, trobeu-ne l'equació.

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. Total 2 punts]

99. PAU 2004 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 3

sitari de Catalunya
nització de les PAU

3. Considereu la funció $f(x) = 1 + \frac{a}{x} + \frac{6}{x^2}$ on a és un paràmetre.

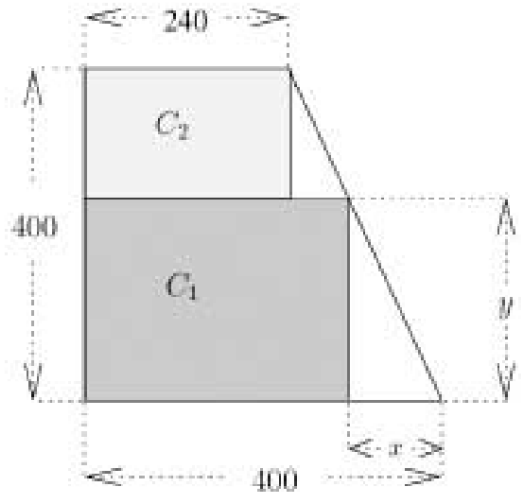
   a) Calculeu el valor del paràmetre a sabent que $f(x)$ té un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = 3$.
   b) Aquest extrem relatiu, es tracta d'un màxim o d'un mínim? Raoneu la resposta.

[Puntuació: apartat a) 1,5 punts; apartat b) 0,5 punts. Total 2 punts]

100. PAU 2003 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 1 (Problemes)

PROBLEMES

1. Un camp té forma de trapezi rectangle, de bases 240 m i 400 m, i el costat perpendicular a les bases també de 400 m. Es vol partir tal com indica la figura per fer dos camps rectangulars C_1 i C_2. Anomenem x i y els catets d'un dels triangles rectangles que es formen.



a) Comproveu que $y = \frac{5}{2}x$.

b) Utilitzant la igualtat anterior, escriviu la suma de les àrees dels dos camps en funció de x.

c) El camp C_1 es vol sembrar amb blat de moro i el camp C_2 amb blat. Amb el blat de moro s'obté un benefici de 0,12 € per m^2 i amb el blat un benefici de 0,10 € per m^2. Determineu les mides de cada un dels camps per obtenir el benefici màxim.

[1 punt els apartats a) i b) i 2 punts el c)]

101. PAU 2003 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 2 (Qüestions)

Distric

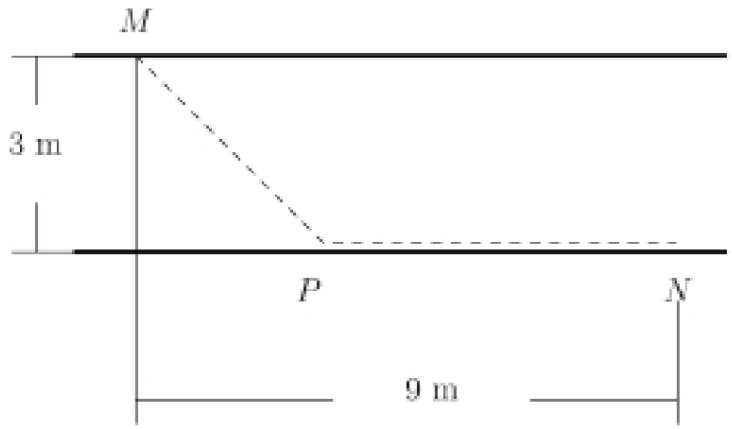
2. Calculeu el punt de la corba $y = 2 + x - x^2$ en què la tangent és paral·lela a la recta $y = x$.

[2 punts]

102. PAU 2003 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 1 (Problemes)

PROBLEMES

1. Volem unir el punt M situat en un costat d'un carrer de 3 m d'amplada amb el punt N situat a l'altre costat i 9 m més avall mitjançant dos cables rectes, un des de M fins a un punt P situat a l'altre costat del carrer i un altre des de P fins a N seguint el mateix costat del carrer, segons l'esquema següent:



El cost de la instal·lació del cable MP és de 12 € per metre i del cable PN de 6 € per metre.
Quin punt P haurem d'escollir de manera que la connexió de M amb N sigui tan econòmica com sigui possible? Quin serà aquest cost mínim?

[4 punts]

103. PAU 2003 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 1 (Qüestions)

QÜESTIONS

1. Calculeu les equacions de les dues rectes del pla que passen pel punt $P = (1, -1)$ i que són tangents a la corba d'equació $y = (x - 1)^2$.

[2 punts]

104. PAU 2003 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 1 (Qüestions)

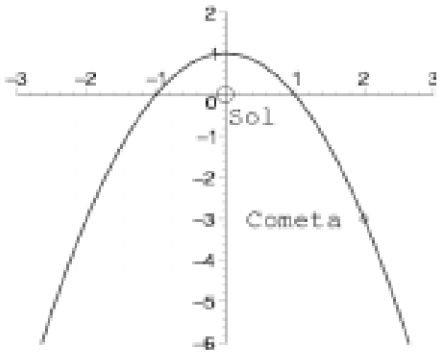
QÜESTIONS

1. Determineu quin és el punt de la gràfica de $y = \sqrt{x}$ (és a dir, de la forma $(x, \sqrt{x})$), que és més a prop del punt $P = (4, 0)$. [2 punts]

105. PAU 2002 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 1 (Problemes)

PROBLEMES

1. Suposem que el Sol es troba a l'origen d'un sistema de coordenades i que un cometa segueix una trajectòria donada per la paràbola $y = 1 - x^2$, tal com es veu a la figura següent:



   a) Quin és el punt en què el cometa es troba més proper al Sol?
   b) Quant val en aquest cas la distància del Sol al cometa?
   c) Hi ha algun punt en què el cometa es trobi a la màxima distància del Sol?
   d) Hi ha algun punt en què la distància entre el Sol i el cometa sigui un màxim local o relatiu?

Nota: Teniu present que la distància entre dos punts és màxima o mínima quan el quadrat de la distància és màxim o mínim.

[4 punts]

106. PAU 2002 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 2 (Qüestions)

2. Se sap que la derivada d'una funció $f(x)$ és:

$$f'(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x + 1}$$

   Calculeu les abscisses dels punts on la funció $f(x)$ té els seus extrems relatius, especificant per a cada un dels valors que obtingueu si es tracta d'un màxim o d'un mínim relatiu. [2 punts]

107. PAU 2002 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 2 (Qüestions)

2. Sabent que la funció $y = (x + a)(x^2 - 4)$, on a és un nombre real, té un màxim i un mínim relatius, i que el màxim relatiu s'assoleix en el punt $x = -\frac{1}{3}$, trobeu l'abscissa del mínim relatiu. [2 punts]

108. PAU 2002 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 3 (Qüestions)

3. Sigui $f(x) = \dfrac{mx - 2}{x - 1}$, on m és un paràmetre.

   a) Determineu per a cada valor del paràmetre m el valor del límit $\lim_{x \to 1} f(x)$ (si existeix).

   b) Per a quins valors de m la derivada $f'(x)$ de la funció $f(x)$ és positiva per a tot x?

[2 punts]

109. PAU 2002 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 1 (Problemes)

PROBLEMES

1. S'ha de construir un gran dipòsit cilíndric de 81π m^3 de volum. La superfície lateral ha de ser construïda amb un material que costa 30 € el m^2 i les dues bases amb un material que costa 45 € el m^2.

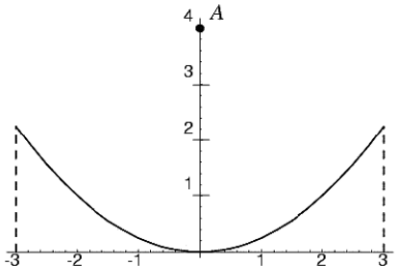
   a) Determineu la relació que hi haurà entre el radi r de les bases circulars i l'altura h del cilindre, i doneu el cost $C(r)$ del material necessari per construir aquest dipòsit en funció de r.
   b) Quines dimensions (radi i altura) ha de tenir el dipòsit perquè el cost del material necessari per construir-lo sigui el mínim possible?
   c) Quin serà, en aquest cas, el cost del material?

[2 punts l'apartat a) i 1 els altres dos]

110. PAU 2001 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 1 (Problemes)

PROBLEMES

1. La riba d'un tram de riu descriu la corba $y = \dfrac{1}{4}x^2$, per a x entre –3 i 3, i en el punt A = (0, 4) hi ha un poble, tal com es pot veure en l'esquema següent:



   a) Expresseu la distància des d'un punt qualsevol d'aquesta vora del riu fins al poble, en funció de l'abscissa x.
   b) Quin és el punt de la vora d'aquest tram de riu que és més lluny del poble?
   c) Hi ha algun punt de la vora del riu a una distància del poble inferior a 2?

[4 punts]

111. PAU 2001 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 3 (Qüestions)

3. Considereu la funció definida per

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax}, & \text{si } x \leq 0 \\ 2x + 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

on a és un nombre real.

a) Calculeu $\lim_{x \to 0} f(x)$ i comproveu que $f(x)$ és contínua en $x = 0$.
b) Per a quin valor del paràmetre a la funció $f(x)$ és derivable en $x = 0$?

[2 punts]

112. PAU 2001 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 1 (Qüestions)

QÜESTIONS

1. Per a cada valor del paràmetre $a \in \mathbf{R}$, considereu la funció

$$f(x) = x + \frac{3 - a}{x}$$

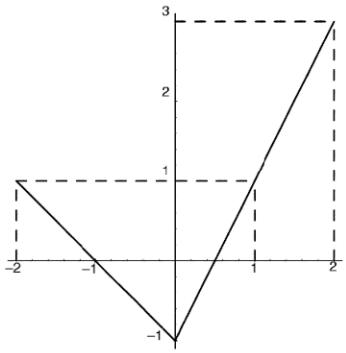
(definida per a tots els valors de x diferents de 0).

a) Determineu per a cada valor del paràmetre a, els extrems relatius que té la funció $f(x)$.
b) Per a quins valors del paràmetre a la funció $f(x)$ és sempre creixent?

[2 punts]

113. PAU 2001 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 2 (Qüestions)

2. Teniu una funció $f(x)$ definida per a $x \in (-2, 2)$, sabeu que el gràfic de $f'(x)$ és de la forma



(on $f'(-1) = 0$, $f'(0) = -1$, $f'(1) = 1$) i que $f(0) = 2$.
Dibuixeu un gràfic aproximat de $f(x)$ indicant en quins punts hi ha extrems relatius. [2 punts]

114. PAU 2000 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 1 (Problemes)

1. El costat desigual d'un triangle isòsceles mesura 12 m, i l'altura sobre aquest costat és de 5 m.

   a) Donat un punt arbitrari sobre aquesta altura, obtingueu una expressió de la suma de les distàncies d'aquest punt a cada un dels vèrtexs del triangle.
   b) Determineu els punts sobre l'altura que compleixen que la suma de les distàncies als tres vèrtexs del triangle sigui màxima i els punts per als quals sigui mínima.

   [4 punts]

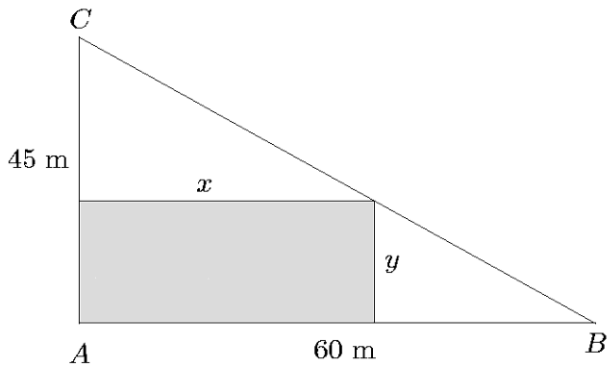
115. PAU 2000 · Setembre · Sèrie 6 · Exercici 2 (Qüestions)

2. Donada la funció $f(x) = \dfrac{x + 1}{e^x}$, determineu l'equació de la recta tangent a la seva gràfica en el punt on s'anul·la la segona derivada. [2 punts]

116. PAU 2000 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1 (Problemes)

PROBLEMES

1. Un terreny té forma de triangle rectangle, els catets mesuren AB = 60 m i AC = 45 m. En aquest terreny es pot construir una casa de planta rectangular com indica la part ombrejada de la figura següent:



   Voleu vendre aquest terreny i us paguen 5.000 pessetes per cada metre quadrat no edificable i 25.000 pessetes per cada metre quadrat edificable.

   a) Determineu la relació que hi ha entre l'amplada x i la profunditat y del rectangle que determina la part edificable.
   b) Determineu l'expressió que dóna el valor del terreny en funció de l'amplada x del rectangle edificable.
   c) Quines són les dimensions de la part edificable que ens permeten obtenir un valor màxim per a aquest terreny?
   d) Quin és aquest valor màxim?

   [4 punts]

117. PAU 2000 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1 (Qüestions)

QÜESTIONS

1. Calculeu els valors de a tals que les tangents a la gràfica de la funció $f(x) = ax^3 + 2x^2 + 3$ en els punts d'abscisses $x = 1$ i $x = -1$ siguin perpendiculars entre si.

[2 punts]

118. PAU 2000 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 2 (Qüestions)

2. Determineu els punts de la gràfica de $f(x) = x^4 + 5x$ on la recta tangent és paral·lela a la bisectriu del primer quadrant. Calculeu l'equació d'aquestes rectes tangents. [2 punts]