Matemàtiques

Càlcul integral

Solucions · 68 exercicis

Proves d'accés a la universitat (PAU) de Catalunya. Ordenats del més recent al més antic.
Retalls dels exàmens i pautes oficials (selecat.cat / universitats.gencat.cat).

1. PAU 2026 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

Exercici 1

1.1.

Com que les tres funcions que defineixen f són contínues en els seus respectius intervals de definició, només cal imposar que f sigui contínua als punts de contacte, $x = 0$ i $x = 2$. Tenim

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 5e^{2x} = 5,$$

$$f(0) = 5e^0 = 5,$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x + m)^2 + 1 = m^2 + 1.$$

Per tant, la funció f és contínua en $x = 0$ si i només si $m^2 + 1 = 5$, cosa que passa si i només si $m = \pm 2$. D'altra banda,

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x + m)^2 + 1 = (2 + m)^2 + 1,$$

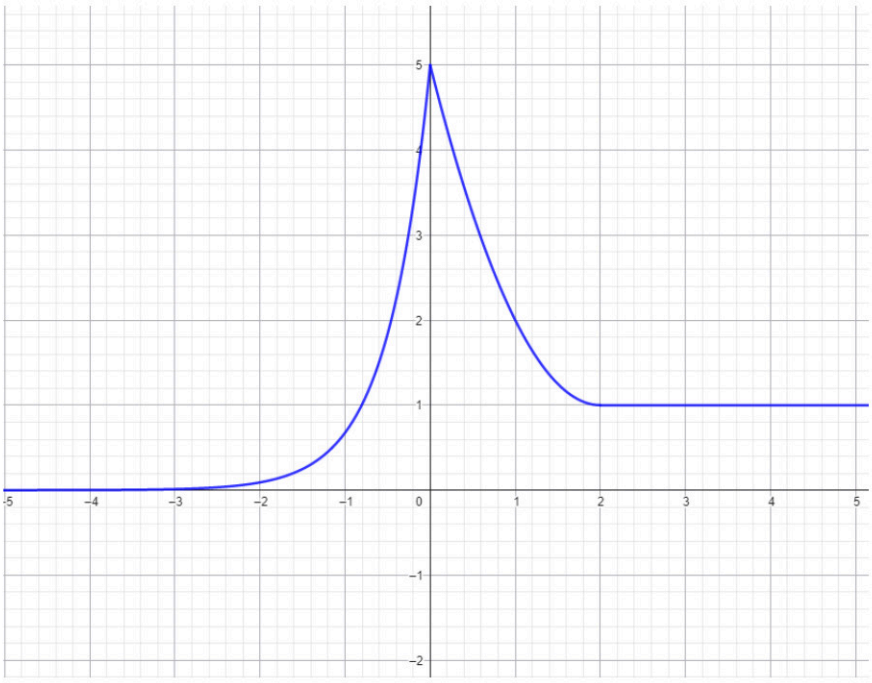
$$f(2) = 1,$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} 1 = 1,$$

i la funció f és contínua en $x = 2$ si i només si $(2 + m)^2 + 1 = 1$, cosa que passa si i només si $m = -2$. Per tant, la funció és contínua en tots els punts només quan $m = -2$.

1.2.

La gràfica corresponent és:



Per representar la funció quadràtica es pot calcular el vèrtex amb la fórmula $x = \frac{-b}{2a} = 2$ o bé observar que és una translació 2 unitats a la dreta i una unitat amunt de la paràbola $y = x^2$.

És clar, fins i tot sense la gràfica, que la funció és positiva en tot el seu domini. Per tant per calcular l'àrea demanada ens cal calcular la integral definida:

$$A = \int_{-1}^{3} f(x)dx = \int_{-1}^{0} 5e^{2x}\,dx + \int_{0}^{2} ((x-2)^2 + 1)dx + \int_{2}^{3} 1\,dx =$$

$$= \left[\frac{5}{2}e^{2x}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{(x-2)^3}{3} + x\right]_{0}^{2} + [x]_2^3 = \frac{5}{2} - \frac{5}{2e^2} + 2 + \frac{8}{3} + 3 - 2 \simeq 7{,}83\ u^2.$$

1.3.

Com que el primer tram de la gràfica és creixent, i el tercer és pla, només pot haver-hi punts amb pendent negativa al tram del mig. Volem un punt on el pendent sigui -2, per tant derivem el tram parabòlic i igualem la derivada a -2:

$$2(x-2) = -2 \;\longrightarrow\; x = 1.$$

La recta tangent al punt $\big(1, f(1)\big) = (1, 2)$ és

$$y - 2 = -2(x-1) \;\longrightarrow\; y = -2x + 4.$$

Pautes de correcció: (**1.1**) Compteu 0,25 punts per justificar que ja és contínua fora dels punts de contacte; 0,25 per estudiar cadascun dels dos contactes, i 0,25 per combinar-ho i donar la resposta final correcta. **(1.2)** Compteu 0,25 per l'esbós de la gràfica; 0,25 pel planteig correcte de l'àrea com a suma d'integrals; 0,25 pel càlcul de la integral de la part exponencial, i 0,25 per la integral de la part parabòlica. **(1.3)** Compteu 0,25 per trobar el punt i 0,25 pel càlcul de l'equació de la recta tangent.

2. PAU 2026 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 1

Exercici 1

1.1. Per trobar els punts de tall entre paràbola i hipèrbola, resolem l'equació $\boldsymbol{f(x) = g(x)}$:

$$-x^2 + 5x = 8 - \frac{8}{x+1}$$

$$(x+1)(-x^2 + 5x) = 8x + 8 - 8$$

$$-x^3 + 4x^2 + 5x = 8x$$

$$x(-x^2 + 4x - 3) = 0.$$

Les solucions són $x = 0$ i $x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{-2} = \frac{-4 \pm 2}{-2} = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$. Per tant, es tallen exactament en tres punts. Calculant les seves imatges, es tracta de $(0, f(0)) = (0,0)$, $(1, f(1)) = (1, 4)$ i $\big(3, f(3)\big) = (3, 6)$.

1.2. Com que no hi ha més punts de tall que els tres calculats a l'apartat anterior, entre 1 i 3 les gràfiques no es toquen (de fet, $\boldsymbol{f}$ està per damunt de $\boldsymbol{g}$) i l'àrea demanada és

$$A = \int_1^3 (f(x) - g(x))\, dx = \int_1^3 \left(-x^2 + 5x - 8 + \frac{8}{x+1}\right) dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 8x + 8\ln(x+1)\right]_1^3 =$$

$$= \left(-\frac{27}{3} + \frac{45}{2} - 24 + 8\ln(4)\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 8 + 8\ln(2)\right) = -\frac{26}{3} + 4 + 8\ln(2)$$

$$= 0.878\ldots\ u^2.$$

1.3. Efectivament $f(x)$ té arrels als punts d'abscisses 0 i 5, $f(0) = -0^2 + 0 = 0$ i $f(5) = -5^2 + 25 = 0$. La paràbola $y = f(x)$ té el vèrtex situat al punt $-2x + 5 = 0 \longrightarrow x = \frac{5}{2}$, que efectivament té per imatge $f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{25}{4} + \frac{25}{2} = \frac{25}{4} = 6{,}25$.

A més, $y = f(x)$ és l'única paràbola amb aquestes dues propietats ja que qualsevol que les compleixi haurà de ser de la forma $f(x) = ax(x-5)$; i com que el vèrtex ha d'estar al punt mig de les dues arrels $x = \frac{0+5}{2} = \frac{5}{2}$ i ha de tenir imatge $6{,}25$, tindrem

$$6{,}25 = f\left(\frac{5}{2}\right) = a\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2} - 5\right) = a \cdot \left(-\frac{25}{4}\right) = -6{,}25\ a.$$

Per tant $a = -1$, i l'única paràbola és $f(x) = -1 \cdot x(x-5) = -x^2 + 5x$.

Criteris de correcció: (1.1.) Compteu 0,5 per plantejar i desenvolupar l'equació, i 0,25 pels punts de tall. **(1.2.)** Compteu 0,25 pel planteig correcte de l'àrea, 0,5 pel càlcul de la primitiva, i 0,25 pel resultat final. Penalitzeu 0,25 si resten les funcions al revés i/o donen com a bona una àrea negativa. **(1.3.)** Compteu 0,25 per la comprovació de les dues propietats demanades i 0,5 per la justificació que és l'única paràbola que les compleix.

3. PAU 2025 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 4 (Opció A)

4. OPCIÓ A. a) Com que $3\sin(\frac{0}{4}) = 0$ i $3\cos(\frac{0}{4}) = 3$, la gràfica inferior (la que passa pels punts A i C) és la del sinus, i la superior (la que passa per B i C) és la del cosinus. El punt B correspon al valor de $3\cos(\frac{0}{4}) = 3$, per tant és el punt $B = (0{,}3)$. Finalment, el punt C és el punt de tall entre el sinus i el cosinus, $3\sin(\frac{x}{4}) = 3\cos(\frac{x}{4})$,

$$\frac{3\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{3\cos\left(\frac{x}{4}\right)} = 1 \longrightarrow \tan\left(\frac{x}{4}\right) = 1 \longrightarrow \frac{x}{4} = \frac{\pi}{4} \longrightarrow x = \pi.$$

Com que $3\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, el punt de tall és $C = \left(\pi, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

b) Per a calcular el preu del vitrall necessitem trobar la seva àrea:

$$A = \int_0^{\pi} \left(3\cos\left(\frac{x}{4}\right) - 3\sin\left(\frac{x}{4}\right)\right) dx = \left[12\sin\left(\frac{x}{4}\right) + 12\cos\left(\frac{x}{4}\right)\right]_0^{\pi}$$

$$= 12\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin(0) - \cos(0)\right) = 12\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1\right)$$

$$= 12(\sqrt{2} - 1) \simeq 4{,}97\ m^2.$$

Per tant, el preu del vitrall serà de $4{,}97\ m^2 \cdot 750\frac{€}{m^2} = 3.725{,}5$ €.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,5 per raonar quina gràfica és cadascuna; 0,25 per les coordenades del punt B, i 0,25 per les de C. **(b)** Compteu 0,25 per plantejar la integral correctament; 0,5 per la primitiva; 0,5 per trobar l'àrea, i 0,25 pel preu final. Compteu 0 de la part de la primitiva si no tracten adequadament el coeficient del sinus i del cosinus.

4. PAU 2025 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4 (Opció A)

4. OPCIÓ A. La vela ocupa la regió compresa entre les corbes $y = 0$, $x = 0$, i $y = -x^2 + 25$. Per calcular el cost total, caldrà calcular separadament l'àrea de la regió superior i l'àrea de la regió inferior i multiplicar-les cadascuna pel preu del material respectiu (niló o polièster).

Trobem primer els punts de tall entre les funcions involucrades: el punt de tall de $y = -x^2 + 25$ amb la part positiva de l'eix d'abscisses és:

$$y = 0 \longrightarrow -x^2 + 25 = 0 \longrightarrow x = 5.$$

L'abscissa positiva del punt de tall entre les corbes $y = -x^2 + 25$ i $y = 9$ és

$$-x^2 + 25 = 9 \longrightarrow -x^2 = -16 \longrightarrow x = 4.$$

L'àrea total sota la corba $y = -x^2 + 25$ entre els extrems $x = 0$ i $x = 5$ és

$$A_{total} = \int_0^5 (-x^2 + 25)\, dx = \left[\frac{-x^3}{3} + 25x\right]_0^5 = \frac{-125}{3} + 125 - 0 = \frac{250}{3}\ u^2.$$

L'àrea de la regió inferior és:

$$A_{inf} = \int_0^4 9dx + \int_4^5 (-x^2 + 25)\, dx = 9 \cdot 4 + \left[\frac{-x^3}{3} + 25x\right]_4^5 =$$
$$= 36 + \left(-\frac{125}{3} + 125\right) - \left(-\frac{64}{3} + 100\right) = 36 + \frac{14}{3} = \frac{122}{3}\ u^2.$$

Finalment, l'àrea de la regió superior és la diferència:

$$A_{sup} = A_{total} - A_{inf} = \frac{250}{3} - \frac{122}{3} = \frac{128}{3}\ u^2.$$

Així doncs, el cost total de la vela serà:

$$\frac{128}{3}\ u^2 \cdot 50\ €/u^2 + \frac{122}{3}\ u^2 \cdot 70\ €/u^2 = \frac{6.400 + 8.540}{3}\ € = 4.980\ €.$$

Criteris de correcció: Compteu 0,25 punts pels punts de tall, 0,5 p. pel plantejament de l'àrea de la regió inferior, i 0,5 p. pel càlcul; 0,5 p. pel plantejament de l'àrea de la regió superior, i 0,5 p. pel càlcul, i, finalment, 0,25 p. pel càlcul del cost final.

Comentaris: hi ha altres maneres de plantejar el càlcul de les dues àrees. Compteu-les bé si ho fan correctament i de manera justificada.

5. PAU 2024 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 3

(a) El punt A és un punt de tall de $y = f(x)$ amb l'eix OX:

$$x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \;\longrightarrow\; x(x-2)^2 = 0 \;\longrightarrow\; x = 0,\;\; x = 2.$$

Per tant, el punt A té per coordenades $A = (2,0)$. El punt D és un punt de tall de $y = g(x)$ amb l'eix OX:

$$-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 4 = 0 \;\longrightarrow\; x^2 - 2x - 15 = 0 \;\longrightarrow\; x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-15)}}{2} = -3,\;\; 5.$$

Descartem la solució negativa i podem afirmar, per tant, que el punt D té coordenades $D = (5,0)$. Finalment, el punt B és el punt de tall de $y = g(x)$ amb l'eix OY; com que

$$g(0) = -\left(\frac{0-1}{2}\right)^2 + 4 = \frac{15}{4},$$

es tracta del punt $B = \left(0, \frac{15}{4}\right)$. Les coordenades del punt C ja ens les dóna l'enunciat, $C = \big(3, f(3)\big) = \big(3, g(3)\big) = (3,3)$.

(b) La zona puntejada és l'àrea compresa entre $g(x)$ i $f(x)$ des de $x = 0$ fins a $x = 3$:

$$A_1 = \int_0^3 \left(-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 4 - (x^3 - 4x^2 + 4x)\right) dx = \int_0^3 \left(\frac{-4x^3 + 15x^2 - 14x + 15}{4}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left[-x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 15x\right]_0^3 = 9 \;\; u^2.$$

(c) Sabent que l'àrea total del logotip és de $\frac{175}{12} = 14.583\ldots u^2$, la zona ratllada tindrà àrea $14.583\ldots - 9 = 5.583\ldots u^2$. Per tant, per pintar el logotip de la manera que volen, els caldrà més pintura blava que vermella.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0.25 pel càlcul de cadascun dels tres punts demanats. (b) Compteu 0.5 pel plantejament de l'àrea de la zona puntejada (amb els límits d'integració correctament col·locats), 0.5 per la primitiva, i 0.25 pel càlcul final. (c) 0.5 per la resposta correcta.

6. PAU 2024 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3

3.

a)

[1,25 punts]

Tal com es veu al dibuix, les abscisses dels punts $(0,5)$, P, i Q són les tres solucions de l'equació $f(x) = 5$:

$$-x^3 + 7x^2 - 6x + 5 = 5 \;\longrightarrow\; x(-x^2 + 7x - 6) = 0$$

$$x = 0, \qquad x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{-2} = \begin{cases} 1 \\ 6. \end{cases}$$

Per tant, les coordenades dels punts demanats són $P = (1,5)$, $Q = (6,5)$, i $R = (6,0)$.

Ara, la recta r que passa pels punts $P = (1,5)$ i $R = (6,0)$ té pendent $m = \frac{0-5}{6-1} = -1$, per tant és $y = -x + n$ i, com que passa pel punt $R = (6,0)$, tenim que $n = 6$; es tracta de la recta $y = -x + 6$.

b)

[1,25 punts]

La superfície del terreny serà la integral definida entre els punts d'abscissa $x = 1$ i $x = 6$ de la funció $f(x)$ menys la recta:

$$A = \int_1^6 \big(f(x) - r(x)\big)\, dx =$$

$$= \int_1^6 \big((-x^3 + 7x^2 - 6x + 5) - (-x + 6)\big)\, dx =$$

$$= \int_1^6 (-x^3 + 7x^2 - 5x - 1)\, dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{7}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - x\right]_1^6 =$$

$$= \left(-\frac{6^4}{4} + \frac{7}{3}6^3 - \frac{5}{2}6^2 - 6\right) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{7}{3} - \frac{5}{2} - 1\right) = \frac{1025}{12} = 85.416\ldots\, u^2.$$

Alternativament, es pot integrar només $f(x)$ entre 1 i 6, i restar el triangle inferior no inclòs al terreny:

$$A = \int_1^6 f(x)\, dx - \frac{5\cdot 5}{2} = \int_1^6 (-x^3 + 7x^2 - 6x + 5)\, dx - \frac{25}{2} = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{7}{3}x^3 - 3x^2 + 5x\right]_1^6 -$$
$$\frac{25}{2} = \left(-\frac{6^4}{4} + \frac{7}{3}6^3 - 3\cdot 6^2 + 5\cdot 6\right) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{7}{3} - 3 + 5\right) - \frac{25}{2} = \frac{1175}{12} - \frac{25}{2} = 85.416\ldots\, u^2.$$

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,25 per plantejar bé l'equació, 0,25 per resoldre-la, 0,25 per donar les coordenades dels tres punts i 0,5 per l'equació de la recta. (b) Compteu 0,5 pel plantejament de la integral correcta i 0,75 per fer-ne el càlcul.

Comentaris: Compteu bé qualsevol de les maneres de fer-ho, si són correctes i estan ben explicades.

7. PAU 2023 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 4

Que l'equació $f(x) = 2$ tingui alguna solució és equivalent que la funció $g(x) = f(x) - 2$ tingui algun zero.

La funció $g(x)$ és una funció contínua a l'interval $[-1, 0]$, ja que és suma de dues funcions contínues (una funció polinòmica -exactament una funció lineal- i una funció exponencial).

D'altra banda podem comprovar que

$$g(-1) \cdot g(0) = (3 + e^{-3} - 2)(0 + e^{-1} - 2) = (1 + e^{-3})(e^{-1} - 2) < 0,$$

per tant podem aplicar el teorema de Bolzano i afirmar que la funció té un zero a l'interval $(-1, 0)$.

b)

Calculem els punts de tall entre les dues funcions:

$$f(x) = h(x)$$

$$-3x + e^{2x^3-1} = -3x^2 + e^{2x^3-1}$$

$$-3x = -3x^2$$

$-3x + 3x^2 = 3x(x - 1) = 0$

Hi ha, per tant, dues solucions: $x = 0$ i $x = 1$.

$$A = \left| \int_0^1 (h(x) - f(x))\ dx \right| = \left| \int_0^1 ((-3x^2 + e^{2x^3-1}) - (-3x + e^{2x^3-1}))\ dx \right| =$$

$$= \left| \int_0^1 (-3x^2 + 3x)\ dx \right| = \left| \left[-x^3 + \frac{3x^2}{2} \right]_0^1 \right| = \boxed{\frac{1}{2}u^2}.$$

Observació: També es pot comprovar que la funció $h(x)$ està per sobre de la funció $f(x)$ a l'interval $(0, 1)$ i calcular directament l'àrea amb $A = \int_0^1 (h(x) - f(x))\, dx$.

a) 0,5 punts per explicitar que la funció és contínua per a poder aplicar el teorema de Bolzano.
0,5 punts per comprovar que als extrems de l'interval la funció pren signes diferents.
0,25 punts per aplicar el teorema de Bolzano i concloure l'existència d'una solució.

b) 0,25 punts per trobar els punts de tall de les dues funcions.
0,25 punts pel plantejament de la integral.
0,25 punts pel càlcul de la primitiva.
0,25 punts per l'aplicació de la regla de Barrow.
0,25 punts pel càlcul final.

8. PAU 2023 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3

Resolució:

a) Integrant $f(x) = \begin{cases} \int (x-1)dx & \text{si } x < 2 \\ \int \frac{1}{x-1} dx & \text{si } x > 2 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x + k & \text{si } x < 2 \\ \ln|x-1| + k' & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Trobem els valors de les constants k i k':

- $f(x)$ passa pel punt $A = (0,3)$, per tant, $\frac{1}{2}0^2 - 0 + k = 3 \rightarrow k = 3$.
- Com que $f(x)$ és derivable, llavors és contínua, així que ho és en el punt d'abscissa 2 i, per tant, els límits laterals de la funció $f(x)$ en 2 han de coincidir:

$$\frac{1}{2}2^2 - 2 + 3 = \ln|2-1| + k'$$

$$k' = 3.$$

Per tant, la funció $f(x)$ serà $\boxed{f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x + 3 & si\ x \leq 2 \\ \ln|x-1| + 3 & si\ x > 2 \end{cases}}$

Observació: es puntuarà per igual l'expressió $\ln|x-1|$ que l'expressió $\ln(x-1)$.

Apliquem l'equació de la recta tangent a una funció $g(x)$ en el punt d'abscissa a:

$$y - g(a) = g'(a) \cdot (x - a)$$

Ara la funció és f' és $g(x) = \begin{cases} x - 1 & si\ x \leq 2 \\ \frac{1}{x-1} & si\ x > 2 \end{cases}$ i $a = 3$.

Cal trobar $g'(x), g'(3)$ i $g(3)$:

$$g'(x) = f''(x) = \begin{cases} 1 & si\ x < 2 \\ \frac{-1}{(x-1)^2} & si\ x > 2 \end{cases}, \qquad g'(3) = -\frac{1}{4}, \qquad g(3) = \frac{1}{2}$$

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \cdot (x - 3) \quad \rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}}$$

Pautes de correcció:

a) 0,5 punts pel càlcul de les primitives.

0,25 punts pel càlcul de la constant *k*.

0,5 punts per argumentar la continuïtat de la funció *f*.

0,25 punts pel càlcul de la constant *k'*.

b) 0,25 punts per la fórmula de la recta tangent.

0,25 punts pel càlcul de $f''(x) = g'(x)$.

0,25 punts pel càlcul de $g(3)$ i de $g'(3)$.

0,25 punts pel càlcul final de la recta tangent.

9. PAU 2023 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 1

a)

Punts de tall: $-x^2+x+6=-9x+3x^2 \rightarrow 4x^2-10x-6=0$

$$x=\frac{10\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot 4\cdot(-6)}}{8}=\frac{10\pm 14}{8}=\begin{cases}3\\-\frac{1}{2}\end{cases}$$

Comprovem la posició de cadascuna de les corbes:

$A\left(-\frac{1}{2},3\right)$ comprovem que $f(x)>g(x)$ per a qualsevol $x\in\left(-\frac{1}{2},3\right)$

$$A=\int_{-\frac{1}{2}}^{3}(f(x)-g(x))\,dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{3}\left(-x^2+x+6-(-9x+3x^2)\right)dx=$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{3}(-4x^2+10x+6)\,dx=\left[-\frac{4}{3}x^3+5x^2+6x\right]_{-1/2}^{3}=$$

$$=\left((-36+45+18)-(\frac{4}{24}+\frac{5}{4}-3)\right)=\left(27-(-\frac{19}{12})\right)=\boxed{\frac{343}{12}\,u^2}$$

b)

Calculem la recta tangent a $f(x)=-x^2+x+6$ que passa pel punt (-2,0):

El pendent ve donat per la derivada de la funció:

$f'(x)=-2x+1\rightarrow f'(-2)=-2x+1=-2(-2)+1=5$

I passa pel punt $(-2,0) \rightarrow f(-2)=0$

Així la recta tangent serà de la forma:

$y=5x+n \rightarrow 0=5(-2)+n \rightarrow n=10$

I tenim: $y=5x+10$

Per fer la representació gràfica observem que la recta $y=5x+10$ passa pels punts $(0,10)$ i $(-2,0)$.

La gràfica de la funció f és una paràbola amb les branques cap avall i el vèrtex en el punt de coordenades:

$f(x)=-x^2+x+6\rightarrow f'(x)=-2x+1=0\rightarrow x=\frac{1}{2}\rightarrow\left(\frac{1}{2},\frac{27}{4}\right)$

I els punts de tall amb l'eix d'abscisses són $(-2,0)$ i $(3,0)$ ja que:

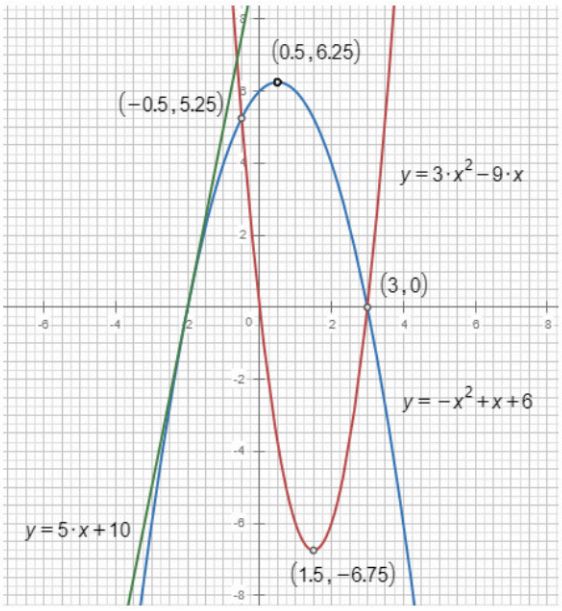
$-x^2 + x + 6 = 0 \to x = -2$ i $x = 3$.

La gràfica de la funció g és una paràbola amb les branques cap amunt i el vèrtex en el punt de coordenades:

$$g(x) = -9x + 3x^2 \to g'(x) = -9 + 6x = 0 \to x = \frac{3}{2} \to \left(\frac{3}{2}, \frac{-27}{4}\right)$$

I els punts de tall amb l'eix d'abscisses són $(0,0)$ i $(3,0)$ ja que:

$-9x + 3x^2 = 0 \to x = 0$ i $x = 3$.



a) 0,5 punts per calcular les abscisses dels punts de tall de les dues funcions.
0,25 punts per plantejar l'àrea demanada com una integral definida.
0,25 punts pel càlcul de la primitiva.
0,25 punts per aplicar correctament la regla de Barrow i donar el resultat final.

b) 0,5 punts per l'equació de la recta tangent demanada.
0,75 punts per la representació gràfica de les tres gràfiques, 0,25 punts per la gràfica de la recta i 0,25 punts per cada una de les paràboles.

10. PAU 2022 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 1

Resolució:

a)

Com que $f'(x) = 3x^2 - 12x$, integrant tenim que $f(x) = x^3 - 6x^2 + C$, on C és una constant real.

Ara bé, sabem que $f(x)$ talla l'eix d'abscises en $x = 1$, per tant, $f(1) = 0$. Substituïm:

$$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + C = 0 \rightarrow C = 5$$

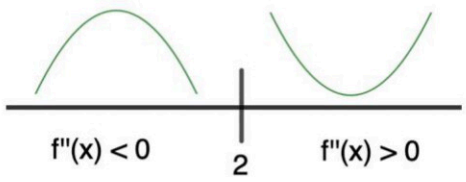
I obtenim $\boxed{f(x) = x^3 - 6x^2 + 5}$.

b)

En el punt d'inflexió s'anul·larà la derivada segona:

$$f''(x) = 6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2$$

Per estudiar la concavitat de $f(x)$, estudiarem el signe de la derivada segona:



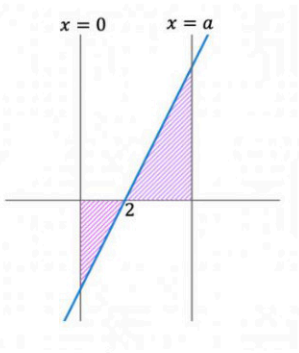
A l'esquerra del punt $x = 2$ la derivada segona és negativa i a la dreta del punt $x = 2$ la derivada segona és positiva.

Per tant:

- En el punt $(2, f(2))$ hi ha un punt d'inflexió.
- La funció té concavitat negativa o és còncava cap avall a l'interval $(-\infty, 2)$
- La funció té concavitat positiva o és còncava cap amunt a l'interval $(2, +\infty)$

c)

La funció $f''(x) = 6x - 12$ talla l'eix d'abscises en $x = 2$ i l'enunciat ens diu que $a > 2$, fets que s'hauran de tenir en compte en el càlcul de les integrals definides:



$$15 = \int_0^2 (12 - 6x)dx + \int_2^a (6x - 12)dx$$

$$15 = [12x - 3x^2]_0^2 + [3x^2 - 12x]_2^a$$

$$15 = 24 - 12 + 3a^2 - 12a - 12 + 24$$

$$3a^2 - 12a + 9 = 0 \rightarrow a^2 - 4a + 3 = 0$$

Resolem l'equació de segon grau:

$$a = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = 2 \pm 1 \rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = 1 \end{cases}$$

Com que $a > 2$, només hi ha una solució: $\boxed{a = 3}$.

Observació: el plantejament de l'àrea també es pot fer a partir de la suma de les àrees dels dos triangles de la figura i no fent esment de cap càlcul integral.

Pautes de correcció:

a) 0,25 pel plantejament que indica com obtenir la funció.

0,25 pel càlcul de la integral.

0,25 pel valor de la constant d'integració.

b) 0,25 per calcular la derivada segona.

0,25 pel punt d'inflexió.

0,25 per l'estudi de la concavitat.

c) 0,25 pel plantejament.

0,25 pel càlcul de les primitives.

0,25 per aplicar correctament la regla de Barrow.

0,25 per trobar el valor del paràmetre.

(En el cas que aquest apartat s'hagi fet sense càlcul integral es repartirà el punt entre els passos que condueixin a la solució final.)

11. PAU 2022 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 4

Resolució:

a)

De la funció g tenim la informació següent: $g(0) = 5,\ g'(1) = 0, g''(x) = 2x + 1.$

Per tant, sabem que $g'(x) = x^2 + x + m$ on m és una constant real. Com que $g'(1) = 0$ deduïm que $m = -2$. Aleshores $g(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + n$ on n és una constant real. Com que $g(0) = 5$ deduïm que $n = 5$. Així tenim que

$$\boxed{g(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 5}$$

Observació: També és totalment correcte el plantejament inicial de

$g(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ i imposant les condicions obtenir els valors respectius de *a*, *b*, *c* i *d*.

b)

La funció f és polinòmica i, per tant, contínua i derivable a tots els nombres reals. Comprovem fàcilment que $\boxed{f(2) = 0}$ i per tant $x = 2$ és una arrel de la funció.

Per comprovar si és estrictament creixent a l'interval indicat calculem la funció derivada $f'(x) = -3x^2 + 12x$, que s'anul·la per a $x = 0$ i $x = 4$.

Com que es tracta d'una paràbola amb coeficient principal negatiu deduïm que la derivada és estrictament positiva en l'interval $(0,4)$ i, per tant, que la funció f és estrictament creixent en aquest interval. Això implica que la funció f no té més arrels en aquest interval i per tant l'àrea A demanada es pot calcular amb l'expressió següent:

$$\boxed{A =} \left|\int_0^2 (-x^3 + 6x^2 - 16)\, dx\right| + \left|\int_2^4 (-x^3 + 6x^2 - 16)\, dx\right| =$$

$$= \left|\left(\frac{-x^4}{4} + 2x^3 - 16x\right)\Big|_0^2\right| + \left|\left(\frac{-x^4}{4} + 2x^3 - 16x\right)\Big|_2^4\right| = 20 + 20 = \boxed{40\ \mathrm{u}^2}.$$

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts pel plantejament.
0,25 punts per trobar la derivada primera.
0,25 punts per determinar la constant d'integració m.
0,25 punts per determinar la constant d'integració n.

b) 0,25 punts per comprovar que la funció té una arrel en $x = 2$.
0,25 punts per calcular la derivada primera.
0,25 punts per justificar el creixement estricte de la funció en l'interval donat.
0,25 punts per escriure les dues integrals definides correctament.
0,25 punts per calcular la primitiva.
0,25 punts per la regla de Barrow i resultat de l'àrea.

12. PAU 2022 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 2

a)

Aplicarem l'equació: $y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$.

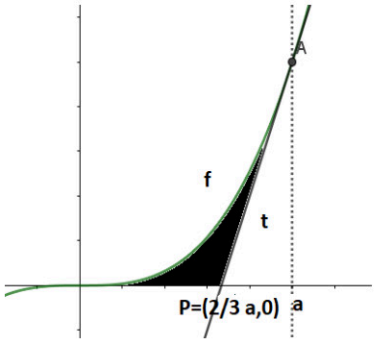
Com que $f(x)$: $y = x^3$, $f(a) = a^3$, $f'(x) = 3x^2$, així que $f'(a) = 3a^2$

i tindrem $y = 3a^2 \cdot (x - a) + a^3 \rightarrow \boxed{t: y = 3a^2x - 2a^3}$.

El punt de tall de la recta t amb l'eix de les abscisses $(y = 0)$ és:

$0 = 3a^2 \cdot x - 2a^3 \rightarrow x = \frac{2a^3}{3a^2} = \frac{2}{3}a$, així que el punt de tall és $\boxed{P = \left(\frac{2}{3}a, 0\right)}$.

b)



L'àrea que ens demanen és la regió ombrejada de la figura i es pot calcular fent l'àrea limitada per la funció f, entre $x = 0$ i $x = a$, menys l'àrea del triangle format per la recta tangent t i l'eix d'abscisses entre $x = \frac{2}{3}a$ i $x = a$.

$A_T = \int_0^a x^3\, dx - A_{triangle} = \left[\frac{x^4}{4}\right]\Big|_0^a - \frac{\left(a - \frac{2}{3}a\right) \cdot a^3}{2} = \frac{a^4}{4} - \frac{a^4}{6} = \frac{a^4}{12}$,

així que $\frac{a^4}{12} = 108 \rightarrow a^4 = 1296 \rightarrow \boxed{a = 6}$

Observació: També es pot calcular mitjançant la integral

$$A_T = \int_0^{\frac{2}{3}a} f(x)dx + \int_{\frac{2}{3}a}^{a} \big(f(x) - t(x)\big)dx.$$

13. PAU 2021 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 2

L'equació de la recta tangent a $y = f(x)$ en el punt $x = 1$ és:

$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$$

Fem els càlculs:

$$f(x) = \frac{4}{x} \rightarrow f'(x) = \frac{-4}{x^2}$$

Així

$$f(1) = 4 \text{ i } f'(1) = -4$$

L'equació de la recta tangent demanada és:

$$y - 4 = -4 \cdot (x - 1) \rightarrow y = -4x + 8 \rightarrow 4x + y = 8$$

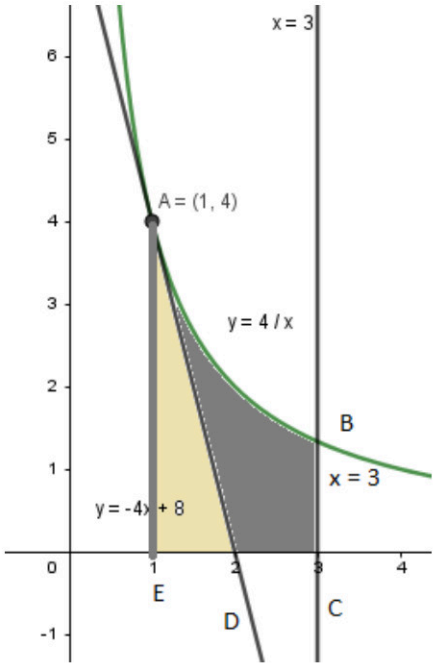
L'equació de la recta normal es pot calcular a partir de l'equació:

$$y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)} \cdot (x - a)$$

$$y - 4 = \frac{-1}{-4} \cdot (x - 1) \rightarrow 4y - 16 = x - 1 \rightarrow x - 4y = -15$$

b)

Per fer l'esbós de la gràfica n'hi ha prou veient que:



- $x = 0$ no és del domini
- f és continua
- $f'(x) = -\frac{4}{x^2} < 0$, per tant, f és decreixent
- Els eixos de coordenades són rectes asímptotes a la funció.

La recta donada, és la recta tangent en el punt $(1{,}4)$.

L'àrea demanada és la regió $ABCD$, que es pot obtenir restant l'àrea del triangle ADE, de la regió $ABCE$:

$$A_T = \int_1^3 \frac{4}{x}\,dx - A_{ADE} = [4\,ln(x)]_1^3 - \frac{1 \cdot 4}{2} =$$

$$= 4[(ln(3) - ln(1)] - 2 = 4\,ln(3) - 2 = 2{,}39u^2$$

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts pel plantejament, on es digui que la recta tangent té pendent $f'(a)$.

0,5 punts per l'expressió de la recta tangent.

0,5 punts per l'expressió de la recta normal.

b) 0,5 punts per l'esbós de la gràfica.

0,25 punts pel plantejament, on s'indiqui que l'àrea es pot obtenir com a diferència de dues àrees calculables o com a suma de dues integrals definides.

0,5 punts pel valor final de l'àrea demanada.

14. PAU 2021 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 4

a)

[1 punt]

La recta tangent és horitzontal en els punts on la derivada s'anul·la, aleshores:

$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}x-lnx}{x^2}=\frac{1-lnx}{x^2} \rightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}=0 \rightarrow 1-\ln x=0 \rightarrow \ln x=1 \rightarrow x=e$

Així, l'únic punt amb recta tangent horitzontal és $(x,y)=\left(e,\frac{1}{e}\right)$

Per determinar si és un extrem relatiu podem fer servir el criteri de la segona derivada:

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}x^2-2x(1-\ln x)}{x^4}=\frac{-x-2x(1-\ln x)}{x^4}=\frac{-3+2\ln x}{x^3}$$

$f''(e)=\frac{-3+2\ln x}{x^3}=\frac{-1}{e^3}<0$ → indica que correspon a un màxim relatiu.

b)

[0,5 punts]

En relació amb les asímptotes, com que la funció només està definida per $x>0$, cal mirar l'asímptota només per a $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\frac{\infty}{\infty}\text{ ind.}$$

Aplicant la regla de l'Hôpital, resoldrem aquesta indeterminació:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

Per tant, l'eix d'abscisses, $y=0$, és una asímptota horitzontal d'aquesta funció.

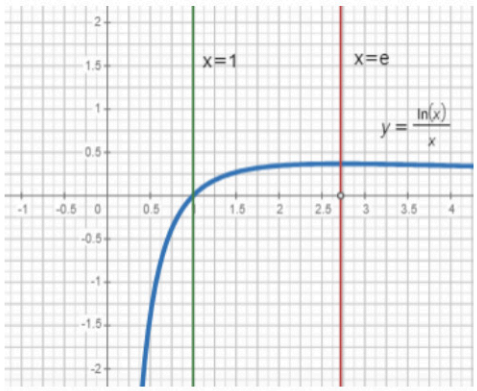
c)

[1 punt]

L'àrea demanada correspon a la integral definida:

$$A = \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_1^e \frac{1}{x} lnx\,dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e = \frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{1}{2}u^2$$

La representació gràfica és:



Pautes de correcció:

a) 0,25 punts pel plantejament, on es digui que el pendent de la recta horitzontal ha de ser zero.

0,25 punts per la derivada.

0,25 punts pel punt on la recta tangent és horitzontal.

0,25 punts per justificar que és un màxim relatiu.

b) 0,25 punts pel plantejament, on s'expliqui que només cal estudiar el límit quan $x \to +\infty$.

0,25 punts per l'asímptota horitzontal.

c) 0,25 punts per la integral definida que correspon a l'àrea demanada.

0,25 punts per la primitiva.

0,25 punts per la regla de Barrow i resultat de l'àrea.

0,25 punts per la gràfica.

En cas que responguin que l'àrea és infinita –perquè no s'esmenta l'eix d'abscisses en l'enunciat–, es puntuarà 0,5 punts per la gràfica i 0,5 per dir raonadament que és infinita.

15. PAU 2021 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 2

[2,5 punts]

a)

Per trobar els intervals de creixement i decreixement de $f(x)$, estudiarem la seva derivada: $f'(x) = 3x^2 - 9$

Calculem $f'(x) = 0$, en aquest cas obtenim $3x^2 - 9 = 0$ i per tant, $x = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$. Com que $f'(x)$ la podem escriure $3(x+\sqrt{3})\,(x-\sqrt{3})$, estudiarem el signe que assoleix la derivada segons els diferents intervals

	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
$3(x+\sqrt{3})$	-	0	+	+	+
$(x-\sqrt{3})$	-	-	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	Creix	Màxim	Decreix	Mínim	Creix

Per tant, la funció creix en $(-\infty,-\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3},+\infty)$

I la funció decreix en $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$

b)

Trobem els punts de tall entre $f(x)$ i $g(x)$ per $x \geq 0$.

Calculem: $x^3 - 9x = 7x,\ x^3 - 9x - 7x = 0$ i per tant, $x^3 - 16x = x(x^2-16) = 0$, que s'anul·la en $x = \{0, -4, 4\}$. En el semiplà $x \geq 0$, la funció $f(x)$ i $g(x)$ es tallen en els punts d'abscisses $x = 0$ i $x = 4$.

Així doncs, hem de calcular la integral definida:

$$\int_0^4 \big(g(x)-f(x)\big)dx = \int_0^4 (-x^3+16x)dx = \left[-\frac{x^4}{4}+16\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 64-128 = \boxed{64\,u^2}.$$

Pautes de correcció:

a)

0,25 punts per la funció derivada.

0,5 punts pel càlcul de les abscisses dels punts singulars.

0,25 punts per l'anàlisi i conclusions dels signe de la derivada primera.

0,25 punts pels intervals de creixement i decreixement

b)

0,5 punts pel càlcul dels punts de tall

0,25 punts pel plantejament de la integral.

0,25 punts pel càlcul de la primitiva.

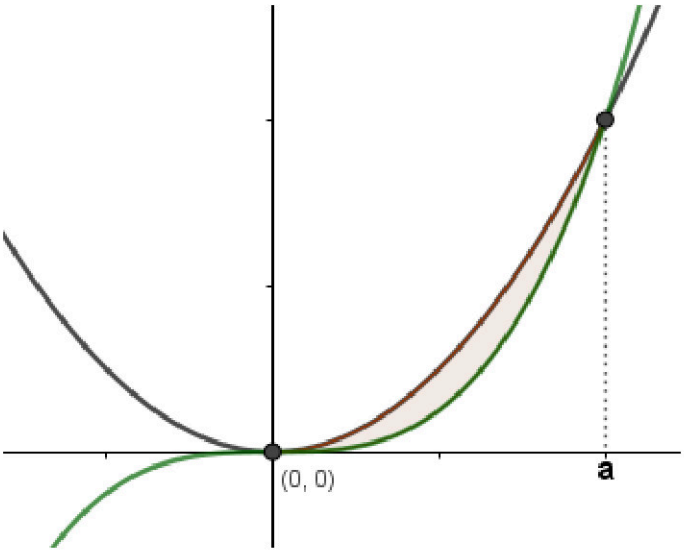
0,25 punts pel càlcul final de l'àrea.

16. PAU 2020 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 1

1. Siguin les funcions $f(x) = x^3$ i $g(x) = a \cdot x^2$, en què a és un nombre real positiu.
   a) Trobeu, en funció del paràmetre a, els punts de tall entre les dues corbes $y = f(x)$ i $y = g(x)$ i feu un esbós de la regió limitada per les dues gràfiques.
   [1,25 punts]
   b) Calculeu el valor d'a perquè l'àrea compresa entre $y = f(x)$ i $y = g(x)$ sigui $\frac{27}{4}$ u^2.
   [1,25 punts]

Resolució:

a)



Igualem les dues funcions i resolem:

$$f(x) = g(x)$$
$$x^3 = ax^2$$
$$x^3 - ax^2 = 0$$
$$x^2(x - a) = 0$$
$$x = 0 \text{ i } x = a$$

Els punts de tall són

$$\boxed{(0,0) \text{ i } (a, a^3)}$$

b) L'àrea entre les dues funcions es calcularà amb la integral definida de la diferència de les dues funcions:

$$A = \int_0^a \big(g(x) - f(x)\big)dx = \int_0^a (ax^2 - x^3)dx = \left(\frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^a = \frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{4} = \frac{a^4}{12}$$

$\frac{a^4}{12} = \frac{27}{4} \Rightarrow a^4 = 81 \Rightarrow a = \pm 3$.

Cal descartar el valor a = -3 ja que a ens diu l'enunciat, que és positiu.

Per tant, per a $a = 3$ l'àrea entre les dues funcions és $\frac{27}{4}\ u^2$.

a) 0,25 punts pel plantejament de la igualtat.
0,25 punts per la solució de l'equació (els valors d'a).
0,25 punts pel punt (0, 0).
0,25 punts pel punt (a, a^3).
0,25 punts per l'esbós.

b) 0,25 punts pel plantejament de la integral definida (en coherència amb l'esbós fet a l'apartat anterior).
0,25 punts pel càlcul de la primitiva.
0,25 punts pel càlcul final de la integral.
0,25 punts pel plantejament de la igualtat.
0,25 punts per la resolució final.

17. PAU 2020 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 6

6. Considereu la funció $f(x) = x^3$.

a) Calculeu en quin punt del tercer quadrant la recta tangent a $y = f(x)$ és paral·lela a la recta $3x - y = 4$. Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica en aquest punt i feu un dibuix aproximat de la gràfica de la funció i les dues rectes.
[1,25 punts]

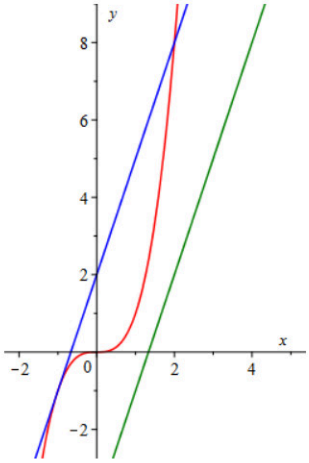
b) Calculeu l'àrea de la regió delimitada per $y = f(x)$ i la recta $y = 3x + 2$.
[1,25 punts]

Resolució:

a) El pendent de la recta tangent a la funció $y = f(x)$ en el punt $(a, f(a))$ és $f'(a)$, que ha de ser igual al pendent de la recta $y = 3x - 4$, que és 3. Per tant,

$$f'(x) = 3x^2 \rightarrow f'(a) = 3a^2 = 3 \rightarrow$$
$$\rightarrow a^2 = 1 \rightarrow a = \pm 1$$

Així, el punt buscat és $(-1, f(-1)) = \boxed{(-1, -1)}$ ja que ha de ser del tercer quadrant.



La recta tangent en aquest punt és:

$$y = f'(-1)(x + 1) + f(-1) \rightarrow \boxed{y = 3x + 2}$$

b) Per a calcular l'àrea compresa entre $y = x^3$ i $y = 3x + 2$, hem de calcular els seus punts de tall:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = 3x + 2 \end{cases} \rightarrow x^3 = 3x + 2 \rightarrow x^3 - 3x - 2 = 0$$

Pel mètode de Ruffini es descompon el polinomi en factors primers i tenim:

$$x^3 - 3x - 2 = (x + 1)^2(x - 2) = 0 \rightarrow x = -1 \text{ i } x = 2$$

Així, l'àrea demanada es calcula amb la integral definida:

$$\int_{-1}^{2} (3x + 2 - x^3)dx = \left[3\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{2} = \boxed{\frac{27}{4}u^2}$$

a) 0,25 punts pel plantejament i obtenir els valors possibles de *a*.
0,25 punts per triar el punt correcte en el tercer quadrant.
0,25 punts per la formulació de la recta tangent.
0,25 punts per l'equació de la recta tangent.
0,25 punts per la gràfica de la funció i les dues rectes.

b) 0,25 punts pel plantejament de l'àrea.
0,25 punts per calcular els punts d'intersecció de les dues gràfiques.
0,25 punts per plantejar la integral definida.
0,25 punts pel càlcul de la primitiva.
0,25 punts pel càlcul i resultat final.
Observació: Qualsevol subdivisió correcta de l'àrea demanada també serà donada per bona.

4. Sigui la funció $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(x)$, en què ln indica el logaritme neperià, definida per a $x > 0$.

   a) Calculeu les coordenades del punt de la corba $y = f(x)$ en què la recta tangent a la corba en aquest punt és horitzontal. Estudieu si aquest punt és un extrem relatiu i classifiqueu-lo.
   [1,25 punts]

   b) Calculeu l'àrea del recinte delimitat per la corba $y = f(x)$, les rectes verticals $x = 1$ i $x = e$ i l'eix de les abscisses.
   [1,25 punts]

Resolució:

a) Si la recta tangent és horitzontal (f'(x)=0), aleshores:

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}x-lnx}{x^2}=\frac{1-lnx}{x^2} \quad \rightarrow \quad \frac{1-\ln x}{x^2}=0 \quad \rightarrow \quad 1-\ln x=0 \quad \rightarrow \ln x=1 \quad \rightarrow x=e$$

El punt demanat serà $\boxed{\left(e, \frac{1}{e}\right)}$

Per determinar si és un extrem relatiu podem utilitzar el criteri de la segona derivada:

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}x^2-2x(1-\ln x)}{x^4}=\frac{-x-2x(1-\ln x)}{x^4}=\frac{-3+2\ln x}{x^3}$$

$f''(e)=\frac{-3+2\ln e}{e^3}=\frac{-1}{e^3}<0$ i per tant es tracta d'un Màxim relatiu.

b) Com que la funció $f(x)$ és positiva per a $x > 1$, l'àrea (A) que es busca serà el resultat d'integrar:

$$A=\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx=\int_1^e \frac{1}{x}lnx\,dx=\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e=\frac{(\ln e)^2}{2}-\frac{(\ln 1)^2}{2}=\boxed{\frac{1}{2}u^2}.$$

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per la funció derivada.
   0,25 punts per l'abscissa del punt singular.
   0,25 punts per les coordenades del punt.
   0,25 punts per la derivada segona.
   0,25 punts per la classificació com a màxim relatiu.

b) 0,25 punts pel plantejament de la integral.
   0,5 punts pel càlcul de la primitiva.
   0,25 punts per l'aplicació de la regla de Barrow.
   0,25 punts pel càlcul final.

6. Una empresa de ceràmica vol posar a la venda una rajola quadrada de 20 cm de costat pintada a dos colors, de manera que la superfície de cada color sigui la mateixa i que si es posen les rajoles l'una al costat de l'altra es vegi un dibuix continu (figura 1).

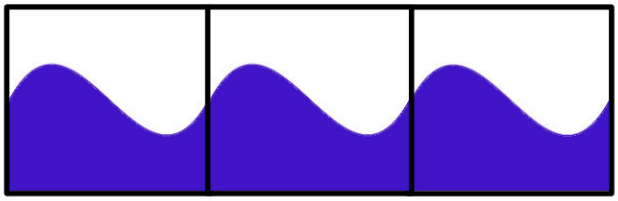


Figura 1

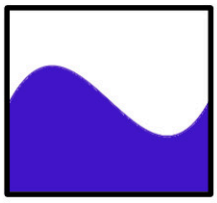


Figura 2

Per a fer-ho l'empresa utilitza en cada rajola la funció $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ enquadrada entre els punts de coordenades (0,0), (0,2), (2,0) i (2,2), tal com mostra en la figura 2, i fa servir com a unitat de mesura el decímetre.

a) Justifiqueu que, efectivament, aquesta funció permet ajuntar les rajoles de manera contínua i derivable.
[1,25 punts]

b) Justifiqueu que aquesta funció divideix el quadrat esmentat en dues parts que tenen la mateixa superfície.
[1,25 punts]

Resolució:

a) Sabent que, pel fet de ser un polinomi, la funció *f(x)* és contínua a tota la recta real, i per tant la continuïtat gràfica de les juntes queda provada només veient que $\boxed{f(0) = 1 = f(2)}$,

De manera anàloga, *f(x)* és derivable –i amb derivada contínua- a tota la recta real i la junta serà derivable sempre que el pendent en que s'hi arribi, $f'(2)$, sigui el mateix que el pendent amb què en sortim, $f'(0)$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

$$\lim_{x \to 2^-} f'(x) = 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 2 = \boxed{2}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \boxed{2}$$

b) Per a comprovar que les àrees són idèntiques cal utilitzar la integral definida:

$\int_0^2 (x^3 - 3x^2 + 2x + 1)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 + x\right]_0^2 = \frac{1}{4}2^4 - 2^3 + 2^2 + 2 = 2\ dm^2$

com que l'àrea de la rajola és $A = 2 \cdot 2 = 4\ dm^2$ queda clar que la funció la divideix en dues parts d'igual superfície.

a) 0,25 punts per la continuïtat de f.
   0,25 punts per la prova de la continuïtat de les juntes.
   0,25 punts per la derivabilitat de f.
   0,5 punts per la prova de la derivabilitat de les juntes.
b) 0,25 punts pel platejament de la integral
   0,25 punts pel càlcul de la primitiva.
   0,25 punts per la regla de Barrow.
   0,25 punts pel càlcul final de la integral.
   0,25 punts per la comprovació final.
   Observació: També es donarà per bó qualsevol justificació basada en la simetria de la funció a cada rajola respecte del centre de la rajola (per exemple comprovant que f(1-x)=2-f(1+x) o que f(1-x)+f(1+x)=2). En aquest cas no seria necessari utilitzar el concepte (ni el càlcul) d'integral.

20. PAU 2019 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 1

1. Considereu les rectes $y = x$ i $y = 2x$, i la paràbola $y = x^2$.
   a) Calculeu els punts d'intersecció entre les gràfiques de les diferents funcions i feu un esbós de la regió limitada per le gràfiques.
   [1 punt]
   b) Calculeu l'àrea de la regió de l'apartat anterior.
   [1 punt]

Resolució:

a) Calculem els punts d'intersecció per parelles de funcions.

$$\begin{cases} y = x \\ y = 2x \end{cases} \Longrightarrow x = 2x, x = 0, y = 0 \Longrightarrow \boxed{P = (0,0)}$$

$$\begin{cases} y = x \\ y = x^2 \end{cases} \Longrightarrow x = x^2 \Longrightarrow x^2 - x = x(x-1) = 0 \Longrightarrow x = 0 \; o \; x = 1$$

$$x = 0, y = 0 \Longrightarrow P = (0,0)$$

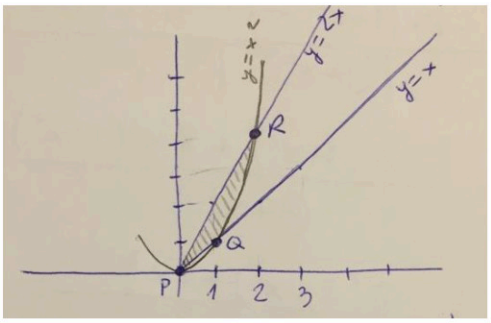
$$x = 1, y = 1 \Longrightarrow \boxed{Q = (1,1)}$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = x^2 \end{cases} \Longrightarrow 2x = x^2 \Longrightarrow x^2 - 2x = x(x-2) = 0 \Longrightarrow x = 0 \; o \; x = 2$$

$$x = 0, y = 0 \Longrightarrow P = (0,0)$$

$$x = 2, y = 4 \Longrightarrow \boxed{R = (2,4)}$$

I quan en fem l'esbós, obtenim la representació gràfica següent:



b) Per calcular l'àrea del recinte, l'hem de descompondre en dues parts: d'una banda, la part limitada per la recta $y = 2x$ i, d'una altra, la recta $y = x$ i la part limitada per la recta $y = 2x$ i la paràbola.

$$S = \int_0^1 (2x - x)dx + \int_1^2 (2x - x^2)dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2} - 0 + 4 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + 3 - \frac{7}{3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \boxed{\frac{7}{6}u^2}$$

Observació: les descomposicions alternatives del recinte que siguin correctes també es donen per bones. Per exemple:

$$S = \int_0^2 (2x - x^2)dx - \int_0^1 (x - x^2)dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= 4 - \frac{8}{3} - 0 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{24 - 16 - 3 + 2}{6} = \boxed{\frac{7}{6}u^2}$$

a)
0,25 punts pel punt P.
0,25 punts pel punt Q.
0,25 punts pel punt R.
0,25 punts per l'esbós.

b)
0,25 punts pel plantejament de les integrals.
0,25 punts pel càlcul de les primitives.
0,25 punts per l'aplicació de la regla de Barrow.
0,25 punts pel càlcul final.

6. Considereu la funció $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.
   a) Calculeu el domini de la funció f, els punts de tall de la gràfica de f amb els eixos de coordenades, i els intervals de creixement i decreixement de f.
   [1 punt]
   b) Calculeu l'àrea de la regió del pla determinada per la gràfica de la funció f, les rectes $x = 1$ i $x = e$, i l'eix de les abscisses.
   [1 punt]

Resolució:

a) Per poder avaluar la funció $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ necessitem poder calcular el logaritme neperià del numerador (això vol dir que *x* sigui estrictament positiva) i poder dividir (és a dir, que *x* no sigui 0). Així doncs, $\boxed{dom(f) = (0, +\infty)}$.

Com que *x* = 0 no pertany al domini de la funció, no hi ha intersecció amb l'eix *OY*.
Com que $f(x) = 0 \Longrightarrow \ln(x) = 0 \Longrightarrow x = 1$, la intersecció amb l'eix *OX* és (1, 0).

Per als intervals de creixement cal estudiar el signe de la funció derivada primera.
La funció derivada és $f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$.
Resolent $f'(x) = 0$ s'obté com a única solució x = e. Així doncs, els intervals de creixement són els següents:

$(0, e)$	$(e, +\infty)$
$f' > 0$	$f' < 0$
f creixent	f decreixent

b) Comencem calculant una primitiva de la funció f (és quasiimmediata):

$$F(x) = \int \frac{\ln(x)}{x}\, dx = \frac{\ln^2(x)}{2}$$

A l'interval (1, *e*) la funció f és sempre positiva o zero. Per tant:

$$A = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{\ln^2(x)}{2}\Big|_1^e = \frac{\ln^2(e)}{2} - \frac{\ln^2(1)}{2} = \frac{1}{2} - 0 = \boxed{\frac{1}{2}\, u^2}.$$

a)
0,25 punts pel domini de la funció.
0,25 punts pels punts d'intersecció amb els eixos.
0,25 punts per la funció derivada.
0,25 punts pels intervals de creixement i decreixement.

b)

0,25 punts per l'argument de positivitat o pel valor absolut en la integral.
0,25 punts pel plantejament de la integral.
0,25 punts per la primitiva.
0,25 punts per l'aplicació correcte de la regla de Barrow i la substitució final.

22. PAU 2019 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 6

6. Considereu les funcions $f(x)=x^2$ i $g(x)=\frac{1}{x}$, i la recta $x=e$.

a) Feu un esbós de la regió delimitada per les seves gràfiques i l'eix de les abscisses. Calculeu les coordenades del punt de tall de $y=f(x)$ amb $y=g(x)$.

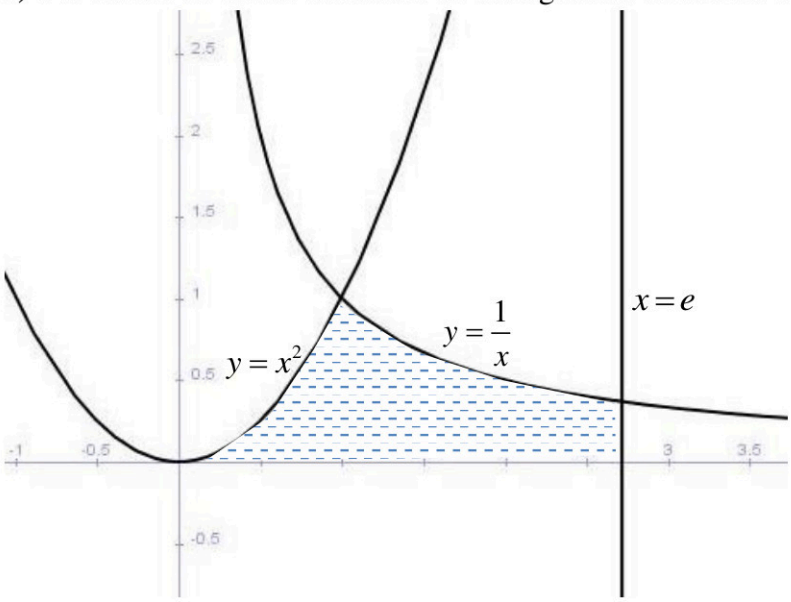
[1 punt]

b) Calculeu l'àrea de la regió descrita en l'apartat anterior.

[1 punt]

Resolució:

a) No cal fer un estudi exhaustiu de cada gràfica. Poden fer l'esbós directament.



Calculem punts de tall:

$$\left.\begin{array}{l} y=x^2 \\ y=\frac{1}{x} \end{array}\right\} \rightarrow x^2=\frac{1}{x} \rightarrow x^3=1 \rightarrow x=1 \rightarrow (1,1)$$

b) Cal expressar l'àrea amb la suma de dues integrals definides:

$$\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^e g(x)\,dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^e \frac{1}{x}dx=\left.\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\ln(x)\Big]_1^e=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}u^2$$

a) 0,75 punts per l'esbós de la regió (0,25 per cada expressió).
0,25 punts pel punt d'intersecció.

b) 0,5 punts per expressar l'àrea demanada amb integrals definides.
0,5 punts pel càlcul de les primitives i el resultat final.

23. PAU 2019 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 4

4. Considereu la funció $f(x)$, que depèn dels paràmetres reals n i m i és definida per

$$f(x)=\begin{cases} e^x & si\ x\le 0 \\ \dfrac{x^2}{4}+n & si\ 0<x\le 2 \\ \dfrac{3x}{2}+m & x>2 \end{cases}$$

a) Calculeu els valors de n i m perquè la funció sigui contínua a tot el conjunt dels nombres reals.
[1 punt]

b) Per al cas n = -4 i m = -6, calculeu l'àrea de la regió limitada per la gràfica de $f(x)$, l'eix de les abscisses i les rectes $x=0$ i $x=4$.
[1 punt]

Resolució:

a) La funció $f(x)$ està definida per trossos que són funcions contínues (exponencial i polinòmiques), per tant només cal estudiar la continuïtat en $x=0$ i en $x=2$.

Perquè $f(x)$ sigui contínua en $x=a$ és necessari que $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} e^x = 1 = f(0) \\ \lim_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x^2}{4}+n\right)=n \end{cases}$$

i

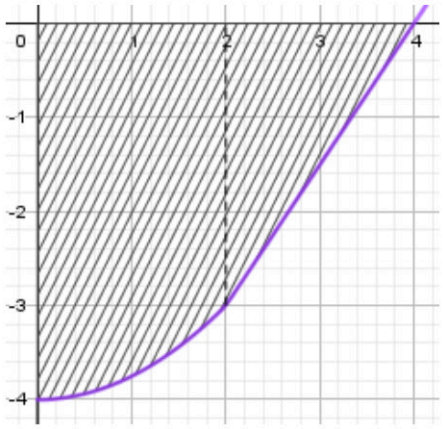
$$\lim_{x\to 2} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to 2^-}\left(\dfrac{x^2}{4}+n\right)=1+n=f(2) \\ \lim_{x\to 2^+}\left(\dfrac{3}{2}x+m\right)=3+m \end{cases}$$

Aleshores per a ser contínua en els dos punts cal que $\left.\begin{matrix} n=1 \\ 1+n=3+m \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} n=1 \\ m=-1 \end{matrix}$

Per tant, si n = 1 i m = -1 la funció $f(x)$ és contínua per qualsevol nombre real.

b) Quan $n = -4$ i $m = -6$

$$f(x) = \begin{cases} e^x & si \quad x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{4} - 4 & si \quad 0 < x \le 2 \\ \dfrac{3}{2}x - 6 & si \quad x > 2 \end{cases}$$



Àrea

$$A = \left|\int_0^2 \left(\frac{x^2}{4} - 4\right) dx\right| + \left|\int_2^4 \left(\frac{3}{2}x - 6\right) dx\right| = \left|\left(\frac{x^3}{12} - 4x\right)\Big|_0^2\right| + \left|\left(\frac{3x^2}{4} - 6x\right)\Big|_2^4\right| = \left|\frac{2}{3} - 8\right| + \left|-3\right| = \frac{31}{3}u^2$$

Observació: Evidentment també es pot calcular l'àrea del segon tros com l'àrea del triangle.

a)
0,25 punts per la continuïtat general.
0,25 punts per la condició de continuïtat en $x = 0$.
0,25 punts per la condició de continuïtat en $x = 2$.
0,25 punts pel càlcul correcte dels valors de n i de m.

b)
0,25 punts per la substitució de paràmetres.
0,25 punts pel plantejament de les integrals.
0,25 punts pel càlcul de les primitives.
0,25 punts per l'aplicació de la regla de Barrow i el càlcul final.

24. PAU 2018 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 6

6. Siguin les funcions $f(x) = x^2 - 1$ i $g(x) = 3 - x^2$,

a) Feu un esbós de les gràfiques de les paràboles $y = f(x)$ i $y = g(x)$ en un mateix sistema d'eixos cartesians i trobeu els punts de tall amb l'eix de les abscisses, els vèrtexs i els punts de tall entre les dues gràfiques.
[1 punt]

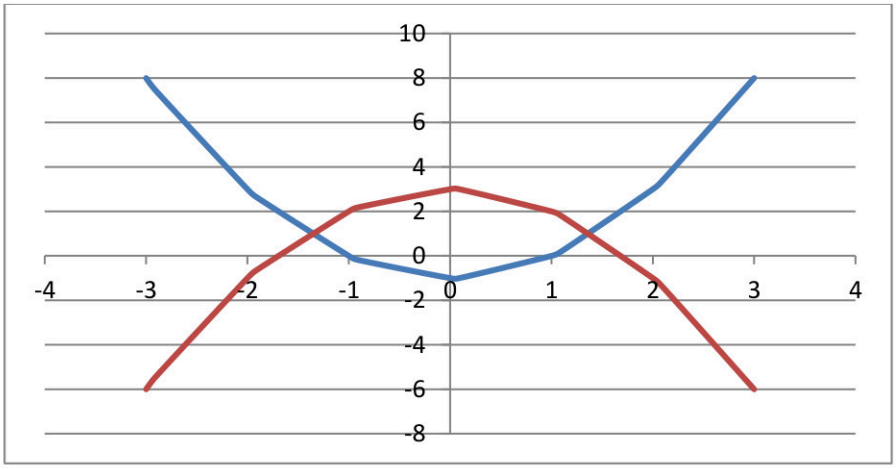
b) Calculeu l'àrea de la regió del semiplà $y \geq 0$ compresa entre les gràfiques de $f(x)$ i $g(x)$.
[1 punt]

Resolució:

a) La gràfica de $f(x) = x^2 - 1$ talla l'eix OX en els punts d'abscissa x = 1 i x = −1. Per tant, els punts de tall amb l'eix de les abscisses són (−1, 0) i (1, 0).
El vèrtex (mínim) és en el punt mitjà entre les solucions, x = 0, amb ordenada $f(0) = -1$, i per tant, el vèrtex és el punt (0, −1).
La gràfica de $g(x) = 3 - x^2$ talla l'eix OX en els punts $x = \sqrt{3}$ i $x = -\sqrt{3}$.
Per tant, els punts de tall amb l'eix de les abscisses són $(\sqrt{3},\ 0)$ i $(-\sqrt{3},\ 0)$.
El vèrtex (màxim) és en el punt mitjà entre les solucions, x = 0, amb ordenada $g(0) = 3$, i per tant, el vèrtex és el punt (0, 3).

Calculem els punts de tall entre les dues gràfiques:

Per tant, els punts de tall són a les abscisses $x = \sqrt{2}$ i $x = -\sqrt{2}$ amb valor $f(\sqrt{2}) = g(\sqrt{2}) = 1$ i $f(-\sqrt{2}) = g(-\sqrt{2}) = 1$. Així doncs, els punts d'intersecció de les gràfiques són $(\sqrt{2},\ 1)$ i $(-\sqrt{2},\ 1)$



b) En el dibuix es veu que l'eix OY és un eix de simetria de l'àrea compresa entre les dues gràfiques. Aquest fet ens permet fer el càlcul de l'àrea en el primer quadrant i multiplicar per 2.
Com que ens demanen l'àrea en el semiplà y ≥ 0, el càlcul de l'àrea demanada és:

$$2\int_0^1 (3-x^2)dx + 2\int_1^{\sqrt{2}} ((3-x^2)-(x^2-1))dx =$$

$$= 2\left(3x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 + 2\left(4x-2\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^{\sqrt{2}} = 2\frac{8}{3} + 2\left(4\sqrt{2}-\frac{4\sqrt{2}}{3}-4+\frac{2}{3}\right) = \boxed{\frac{16\sqrt{2}-4}{3}\ u^2} =$$

$$= \boxed{6{,}21\ u^2}$$

Comentari: Qualsevol altre càlcul equivalent i correcte serà igualment ben valorat.

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts per les arrels.
0,25 punts pels vèrtexs.
0,25 punts pels punts intersecció.
0,25 punts per l'esbós.

b)
0,25 punts per les integrals a calcular.
0,25 punts per les primitives.
0,25 punts per l'aplicació correcta de la regla de Barrow.
0,25 punts pel càlcul final de l'àrea.

25. PAU 2018 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 5

5. Sigui la funció $f(x) = \sqrt{x} + x - 2$.

a) Comproveu que la funció $f(x)$ compleix l'enunciat del teorema de Bolzano a l'interval [0, 2] i que, per tant, l'equació $f(x) = 0$ té alguna solució a l'interval (0, 2). Comproveu que $x = 1$ és una solució de l'equació $f(x) = 0$ i raoneu, tenint en compte el signe de $f'(x)$, que la solució és única.
[1 punt]

b) A partir del resultat final de l'apartat anterior, trobeu l'àrea limitada per la gràfica de la funció $f(x)$, l'eix de les abscisses i les rectes $x = 0$ i $x = 1$.
[1 punt]

Resolució:

a)

La funció $f(x)$ és contínua en l'interval tancat [0, 2] per tractar-se de suma de funcions contínues en el seu domini com són la funció arrel quadrada i les funcions polinòmiques.

Els valors en els extrems $f(0) = -2 < 0$ i $f(2) = \sqrt{2} > 0$ tenen signe diferent, és a dir, $f(0) \cdot f(2) < 0$, per tant, sí que es compleixen les condicions del teorema de Bolzano.

Així doncs, la funció canvia de signe dins l'interval indicat i, per tant, aplicant el teorema de Bolzano, com a mínim existeix un punt dins l'interval obert (0, 2) en què la seva imatge és zero.

$f(1) = 1 + 1 - 2 = 0$ i, per tant, efectivament $x = 1$ és solució de l'equació $f(x) = 0$.

La funció derivada $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1 > 0$ és positiva en tot el domini de la funció i per tant la funció $f(x)$ és estrictament creixent i, per tant, després de tallar l'eix de les abscisses una vegada, la gràfica no pot tornar-lo a tallar.

b)

Com que $x = 1$ és l'únic punt en què la funció talla l'eix de les abscisses, la funció $f(x)$ té signe constant en l'interval (0,1) i, per tant, l'àrea que es demana es pot calcular amb

$$A = \left| \int_0^1 (\sqrt{x} + x - 2) \quad dx \right| = \left| \left(\frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_0^1 \right| = \left| \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right| = \left| \frac{-5}{6} \right| = \boxed{\frac{5}{6}\ u^2}$$

Observació: També es donarà per bona la resolució si l'estudiant planteja la integral sense el valor absolut i canvia el signe després d'haver vist el resultat negatiu. Es penalitzarà donar com a resposta de l'àrea un valor negatiu.

a)
0,25 punts per la continuïtat de la funció i les imatges en els extrems.
0,25 punts per l'argumentació del signe diferent i conclusió d'existència de solució.
0,25 punts per la comprovació en $x = 1$ i la derivada de la funció.
0,25 punts per l'argument de monotonia de la funció i unicitat de la solució.

b)
0,25 punts per l'argumentació del signe constant.
0,25 punts pel plantejament de la integral.
0,25 punts per la primitiva.
0,25 punts per l'aplicació de la regla de Barrow i el càlcul final.

26. PAU 2017 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 6

6. Sigui la funció $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

a) Calculeu una primitiva de la funció $f(x)$.
[1 punt]

b) Calculeu l'àrea limitada per la funció $f(x)$ i l'eix de les abscisses entre les abscisses $x = 0$ i $x = \frac{\pi}{4}$.
[1 punt]

Resolució:

a)

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{-dt}{t^2} = -\int t^{-2} dt = \frac{1}{t} + C = \boxed{\frac{1}{\cos x} + C}$$

La primitiva es quasi immediata o podem assajar el canvi de variable $\cos x = t$

$\cos x = t$
$-\sin x\, dx = dt$
$\sin x\, dx = -dt$

Observació: Com que a l'enunciat es demana "una" primitiva, l'exercici es donarà per ben resolt amb o sense la constant d'integració.

b) La funció sinus és positiva a l'interval $[0, \frac{\pi}{2}]$. Atès que el denominador de la funció està elevat al quadrat, és també positiu en tot l'interval. La funció és, per tant, positiva i l'àrea demanada és:

$$\text{Àrea} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \left[\left[\frac{1}{\cos x}\right]\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{\sqrt{2}/2} - 1 =$$

$$\boxed{\frac{2}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-2}{2} = 0{,}414\, u^2}$$

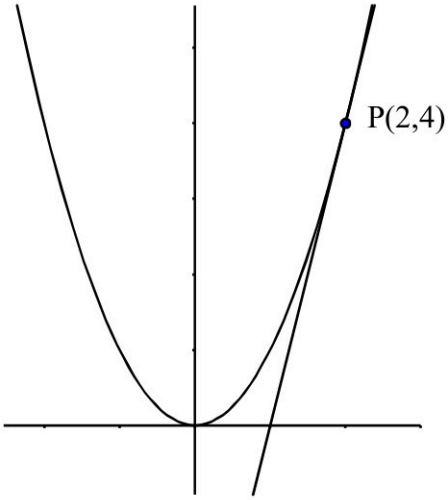
a)
0,25 punts per la formulació del canvi de variable.
0,25 punts per l'aplicació del canvi de variable.
0,25 punts per la integral directa (amb o sense la constant d'integració).
0,25 punts per desfer el canvi de variable.

b)
0,25 punts per la positivitat de l'integrand i el plantejament de la integral.
0,25 punts per la primitiva.
0,25 punts per l'aplicació de la regla de Barrow.
0,25 punts pel càlcul final (en qualsevol de les formes indicades).

27. PAU 2017 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 3

3.

a)



Trobem el punt de tangència: P(2,4).

El pendent de la tangent és la derivada, per tant:

$f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$ i $f'(2) = 4$

La recta tangent és doncs: $y - 4 = 4(x - 2)$, o sigui $y = 4x - 4$.

Els punts d'intersecció amb els eixos de coordenades els trobem quan x = 0 que obtenim y = -4 i quan y = 0 que obtenim x = 1. Així doncs els punts intersecció són $\boxed{(0,-4)}$ i $\boxed{(1,0)}$.

b) L'àrea de la regió es pot obtenir:

$$\int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 \left(x^2 - (4x-4)\right) dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 + \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right)\Big]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - 8 + 8 - \frac{1}{3} + 2 - 4 = \boxed{\frac{2}{3}u^2}.$$

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts pel punt de tangència.
0,25 punts per la derivada en el punt.
0,25 punts per la recta tangent.
0,25 punts pels punts intersecció.

b)
0,25 punts pel plantejament de les dues integrals.
0,25 punts per les dues primitives.
0,25 punts per l'aplicació de la regla de Barrow.
0,25 punts pel càlcul final.

28. PAU 2016 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 4

4. Sigui la funció $f(x) = \sin(x)$.

a) Calculeu l'equació de les rectes tangents a la funció f en els punts d'abscissa $x = 0$ i $x = \pi$, respectivament. Trobeu les coordenades del punt en què es tallen les dues rectes.

[1 punt]

b) Calculeu l'àrea de la regió limitada per la gràfica de la funció f i les rectes tangents de l'apartat anterior (en cas de no haver fet l'apartat anterior suposeu que les rectes són $y = x$ i $y = -x + \pi$, respectivament).

[1 punt]

Resolució:

a)

$$y = \sin(x), y' = \cos(x)$$

Calculem les dues rectes tangents:

En $x = 0$, $y = \cos(0)\,(x - 0) + \sin(0) \Rightarrow \boxed{y = x}$.

En $x = \pi$, $y = \cos(\pi)\,(x - \pi) + \sin(\pi) \Rightarrow \boxed{y = -x + \pi}$.

Per trobar el punt en què es tallen resolem la igualtat entre les dues rectes

$$x = {}^{\pi}/_{2} \Rightarrow y = x = {}^{\pi}/_{2}$$

Així doncs, les rectes es tallen en el punt $\boxed{({}^{\pi}/_{2}, {}^{\pi}/_{2})}$

b)

Les dues rectes es tallen en $x = {}^{\pi}/_{2}$ i com que la funció $y = \sin(x)$ és còncava entre $x = 0$ i $x = \pi$, les rectes tangents estan per sobre de la gràfica.

Així doncs,

$$Area = \int_0^{{}^{\pi}/_{2}} (x - \sin x)dx + \int_{{}^{\pi}/_{2}}^{\pi} (-x + \pi - \sin x)\, dx =$$

$$= 2\int_0^{{}^{\pi}/_{2}} (x - \sin x)dx = 2\left(\frac{x^2}{2} + \cos x\right)\Big|_0^{{}^{\pi}/_{2}} = 2\left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right) = \boxed{\frac{\pi^2}{4} - 2 \quad u^2}.$$

Observació: No és necessari aprofitar la simetria de la regió. Per tant l'exercici es puntuarà igualment si l'estudiant calcula separadament cadascuna de les àrees.

Apartat a)

0,25 punts per la derivada.

0,25 punts per una recta tangent.

0,25 punts per l'altra recta tangent.

0,25 punts pel punt d'intersecció.

Apartat b)

0,25 punts per la formulació de les integrals a calcular.

0,25 punts per les primitives.

0,25 punts per la regla de Barrow.

0,25 punts pel càlcul final.

29. PAU 2016 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 6

6. Siguin les paràboles $f(x) = x^2 + k^2$ i $g(x) = -x^2 + 9k^2$.

a) Calculeu les abscisses, en funció de *k*, dels punts d'intersecció entre les dues paràboles. [1 punt]

b) Calculeu el valor del paràmetre *k* perquè l'àrea compresa entre les paràboles sigui de 576 unitats quadrades. [1 punt]

Resolució:

a) $f(x) = x^2 + k^2$ i $g(x) = -x^2 + 9k^2$.

És directe observar que la paràbola $f(x)$ és la paràbola elemental x^2 desplaçada k^2 unitats, mentre que la paràbola $g(x)$ és la paràbola elemental $-x^2$, desplaçada $9k^2$ unitats, totes dues simètriques respecte l'eix de les ordenades i de manera que al voltant de l'origen la paràbola $g(x)$ està per sobre de la $f(x)$. (Un dibuix ho il·lustra força bé).

Calculem les abscisses dels punts intersecció igualant $f(x) = g(x)$ i obtenim $x^2 + k^2 = -x^2 + 9k^2$, o sigui $2x^2 = 8k^2$, per tant $\boxed{x = \pm 2k}$.

b) L'àrea compresa entre les dues paràboles serà doncs

$$A = \int_{-2k}^{2k} [(-x^2 + 9k^2) - (x^2 + k^2)]\,dx = 2\int_{0}^{2k} (-2x^2 + 8k^2)\,dx = 4\int_{0}^{2k} (-x^2 + 4k^2)\,dx$$

$$= 4\left(-\frac{x^3}{3} + 4k^2x\right)\Big]_{x=0}^{x=2k} = 4\left(-\frac{8k^3}{3} + 8k^3\right) = \frac{64k^3}{3}.$$

Per tant, el valor que demana l'enunciat haurà de satisfer l'equació $\frac{64k^3}{3} = 576$.

$$k^3 = 27 \Rightarrow \boxed{k = 3}$$

Observació: També es valorarà com a correcte si el plantejament de les funcions en l'integrant no té en compte quina està per sobre de quina però es discuteix al final el signe del resultat. Per tant, la puntuació pot ser la màxima sense haver representat cap figura ni haver discutit la posició relativa, sempre que s'indiqui correctament que cal prendre el valor absolut del resultat de la integral.

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,5 punts pel plantejament de la igualtat a resoldre.

0,5 punts per l'obtenció de les dues abscisses $2k$ i $-2k$.

Apartat b)

0,25 punts pel plantejament de la integral.

0,25 punts pel càlcul de les primitives.

0,25 punts per la regla de Barrow

0,25 punts per la solució final.

30. PAU 2015 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 3

3. Responeu a les qüestions següents:

a) Determineu l'equació de la recta tangent a la corba $y = x^3$ en el punt d'abscissa $x = 2$.

[1 punt]

b) Calculeu l'àrea de la regió plana finita limitada per la corba $y = x^3$ i la recta $y = 3x - 2$.

[1 punt]

Resolució:

a) Tenim $y = x^3$ i per tant la seva derivada $y' = 3x^2$. I quan avaluem en $x = 2$ tenim $y(2) = 8$ i $y'(2) = 12$. Per tant la recta tangent que busquem és la recta que passa pel punt $(2, 8)$ i que té pendent 12, és a dir

$$\boxed{y =}\ 12(x-2) + 8\ \boxed{= 12x - 16}.$$

b) Primer hem de trobar els punts d'intersecció entre les dues funcions. Igualant obtenim:

$x^3 = 3x - 2$, és a dir $x^3 - 3x + 2 = 0$.

Si apliquem la regla de Ruffini obtenim $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2 \cdot (x+2) = 0$ i per tant que les abscisses dels punts de tall són $x = -2$ i $x = 1$.

Per la continuïtat de les funcions l'ordre entre elles és el mateix al llarg de tot l'interval (-2, 1). Com que en $x = 0$ el valor de la corba és 0 i el valor de la recta és -2, la funció cúbica està més amunt que la recta i per tant el valor de l'àrea limitada serà

$$\int_{-2}^{1}\left(x^3 - (3x-2)\right)dx = \int_{-2}^{1}(x^3 - 3x + 2)dx = \left(\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_{-2}^{1} = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2\right) - (4 - 6 - 4) = \frac{3}{4} + 6 = \boxed{\frac{27}{4}\ u^2}$$

Observació: També es pot haver plantejat amb el valor absolut de la integral directament, sense fer el balanç de quina funció pren valors més grans.

Apartat a)

0,25 punts per la funció derivada.

0,25 punts per la formulació.

0,25 punts per la substitució.

0,25 punts per l'equació final.

Apartat b)

0,25 punts per trobar els punts de tall.

0,25 punts pel plantejament de la integral.

0,25 punts per la primitiva.

0,25 punts per l'aplicació de la regla de Barrow.

---

31. PAU 2015 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 4

4. Sigui f la funció $f(x) = x \cdot \sin(x)$. Calculeu la primitiva de la funció f que passa pel punt $(\frac{\pi}{2}, 0)$ (unitats en radians).
[2 punts]

Resolució:

Comencem calculant la integral de la funció $f(x) = x \cdot \sin(x)$

$$F(x) = \int x \cdot \sin(x)\ dx$$

Hem de fer una integral per parts

Tenim doncs,

$F(x) = \int x \cdot \sin(x)\ dx = -x \cdot \cos(x) + \int \cos(x)\ dx = -x \cdot \cos(x) + \sin(x) + C$.

Hem de determinar ara el valor de la constant C. Per fer-ho utilitzem que sabem que la funció F passa pel punt $(\frac{\pi}{2}, 0)$. És a dir, sabem que $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, i d'altra banda,

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + C = 1 + C,$$

d'on $1 + C = 0$, és a dir, $C = -1$.

Així doncs, la funció que estàvem buscant és

$$F(x) = -x \cdot \cos(x) + \sin(x) - 1\ .$$

0,5 punts per la identificació de les parts en la integral.
0,5 per l'aplicació de la fórmula.
0,5 per la integració final i expressió general de la primitiva.
0,5 per la condició de passar pel punt i deducció de la constant d'intergració.

32. PAU 2014 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 4

4. Calculeu l'àrea de la regió del pla limitada en el primer quadrant per les gràfiques de les funcions $y = x^2$, $y = 4x^2$ i $y = 9$.
[2 punts]

Resolució:

Es tracta de l'àrea limitada per dues paràboles que comparteixen el seu vèrtex, el punt (0,0), i la recta horitzontal $y = 9$.

Calculem en quines abscisses del primer quadrant l'horitzontal talla cadascuna de les paràboles.

$x^2 = 9$ porta a $x = 3$.

$4x^2 = 9$ porta a $x = +\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$.

Per tant l'àrea serà (plantejant la integral de les diferències verticals entre la funció que marca el punt superior de la regió i la funció que marca el punt inferior de la regió)

$$\int_0^{3/2} (4x^2 - x^2)dx + \int_{3/2}^{3} (9 - x^2)dx = \int_0^{3/2} 3x^2 dx + \int_{3/2}^{3} (9 - x^2)dx =$$

$$= x^3\Big|_0^{3/2} + \left(9x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{3/2}^{3} = \frac{27}{8} + (27 - 9) - \left(\frac{27}{2} - \frac{9}{8}\right) = \boxed{9\,u^2}.$$

Observació: La mateixa regió també es pot subdividir en tres diferents regions i calcular l'àrea per separat i operar entre elles.

Pautes de correcció:

0,25 punts pel primer punt de tall.

0,25 punts pel segon punt de tall.

0,25 punts pel plantejament de la primera integral.

0,25 punts pel plantejament de la segona integral.

0,25 punts pel càlcul de la primera primitiva.

0,25 punts pel càlcul de la segona primitiva.

0,25 punts per aplicar la regla de Barrow a la primera integral.

0,25 punts per aplicar la regla de Barrow a la segona integral.

33. PAU 2013 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 2

2.- De la funció polinòmica $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ ***sabem que***

- ***té un extrem relatiu en el punt d'abscissa*** $x = -3$ **.**
- ***la integral definida en l'interval*** $[0, 1]$ ***val*** $-\dfrac{5}{4}$ **.**

Calculeu el valor dels paràmetres a ***i*** b**.**

[2 punts]

Solució

Si la funció té un extrem relatiu en el punt on $x = -3$ sabem que $P'(-3) = 0$. Com que $P'(x) = 3x^2 + 2ax + b$, ens queda l'equació

$$3(-3)^2 + 2a(-3) + b = 0\,.$$

Per altra banda, tenim que

$$\int_0^1 (x^3 + ax^2 + bx + 2)dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + 2x\right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + 2 = -\frac{5}{4}\,.$$

En definitiva, hem obtingut el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} -6a + b & = & -27 \\ \dfrac{a}{3} + \dfrac{b}{2} & = & -\dfrac{7}{2} \end{array}\right\},$$

que té per solució $a = 3$ i $b = -9$.

Pautes de Correcció

0,5 punts per saber interpretar la condició per tenir un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = -3$.

0,25 punts pel planteig de la integral.

0,5 punts pel càlcul de la primitiva.

0,25 punts per l'aplicació de la regla de Barrow, arribant a la segona equació.

34. PAU 2013 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 3

3.- Donada la funció $f(x) = \sqrt{x-1}$ ***i la recta horitzontal*** $y = k$***, amb*** $k > 0$***,***

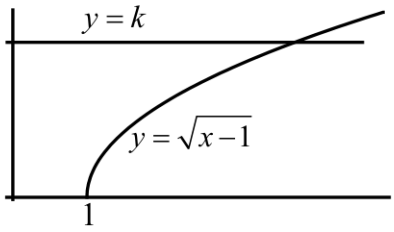
(a) ***Feu un esbós del recinte limitat per les gràfiques de la funció i la recta, i els eixos de coordenades.***

(b) ***Trobeu el valor de*** k ***sabent que l'àrea d'aquest recinte és igual a*** $14/3$ ***.***

[0,5 per l'apartat a; 1,5 per l'apartat b]

Solució

(a) L'esquema demanat és a la figura que es troba a la pàgina següent.



(b) La gràfica de $f(x)$ talla a l'eix d'abscisses en el punt $(1, 0)$. Busquem el punt de tall entre la gràfica de la funció i la de la recta,

$$\sqrt{x-1} = k \Longrightarrow x = k^2 + 1\,.$$

L'àrea del recinte és igual a l'àrea del rectangle de base k^2+1 i altura k menys l'àrea que deixa "per sota" la gràfica de la funció; és a dir,

$$A = k(k^2+1) - \int_1^{k^2+1} (x-1)^{1/2}\,dx = k^3 + k - \left[\frac{(x-1)^{3/2}}{3/2}\right]_1^{k^2+1} = k^3 + k - \frac{2k^3}{3} = \frac{k^3}{3} + k.$$

Naturalment, el càlcul també es pot fer com

$$A = \int_0^{k^2+1} k\,dx - \int_1^{k^2+1} (x-1)^{1/2}\,dx = [kx]_0^{k^2+1} - \left[\frac{(x-1)^{3/2}}{3/2}\right]_1^{k^2+1} = k^3 + k - \frac{2k^3}{3} = \frac{k^3}{3} + k.$$

Igualment, el càlcul de la integral de la funció $f(x)$ entre 1 i k^2+1 es pot realitzar pel canvi de variable $x - 1 = t^2$ (d'on $dx = 2t\,dt$). En aquest cas, però, serà necessari fer el canvi de límits d'integració corresponent,

$$\int_1^{k^2+1} \sqrt{x-1}\,dx = \int_0^k \sqrt{t^2}\,2t\,dt = 2\int_0^k t^2\,dt = 2\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^k = \frac{2k^3}{3}\,.$$

S'admet també com a correcte el realitzar la primitiva (la integral sense definir) i avaluar-la posteriorment.

$$\int \sqrt{x-1}\,dx = \cdots = \frac{2t^3}{3} + C = \frac{2\left(\sqrt{x-1}\right)^3}{3} + C \Longrightarrow \int_1^{k^2+1} \sqrt{x-1}\,dx = \left[\frac{2\left(\sqrt{x-1}\right)^3}{3}\right]_1^{k^2+1} = \frac{2k^3}{3}\,.$$

L'equació $\dfrac{k^3}{3} + k = \dfrac{14}{3}$ es pot escriure també com $k^3 + 3k - 14 = 0$, que té com a única solució (buscada amb el mètode de Ruffini) $k = 2$.

---

35. PAU 2013 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 2

2.- La corba $y = x^2$ i la recta $y = k$, amb $k > 0$, determinen una regió plana.

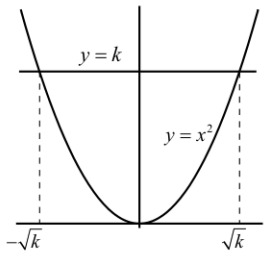
(a) ***Calculeu l'àrea d'aquesta regió en funció del paràmetre k.***

(b) ***Trobeu el valor de k perquè l'àrea limitada sigui $\sqrt{6}\,u^2$.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

La gràfica de la situació descrita és



(a) Les abscisses dels punts d'intersecció entre la corba i la recta són $x = \pm\sqrt{k}$. Per tant, per a qualsevol valor de k,

$$A = \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} \left(k - x^2\right)\,dx = \left[kx - \frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} = \frac{4k\sqrt{k}}{3}\,.$$

(b) Volem que $\dfrac{4k\sqrt{k}}{3} = \sqrt{6}$. Elevant al quadrat els dos membres d'aquesta equació ens queda

$$\frac{16k^3}{9} = 6 \Longrightarrow k = \frac{3}{2}\,.$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

36. PAU 2013 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 4

4.- Per a $x \geq 1$***, considereu la funció*** $f(x) = +\sqrt{x-1}$ **.**

(a) ***Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de*** $f(x)$ ***en el punt d'abscissa igual a 10 .***

(b) ***Calculeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de*** $f(x)$***, la recta d'equació*** $x = 5$ ***i l'eix*** OX**.**

[1 punt per cada apartat]

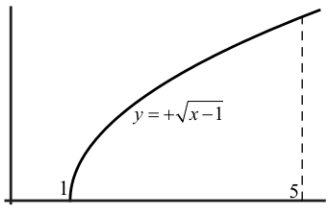
Solució

(a) L'equació de la recta tangent a la gràfica d'una funció $y = f(x)$ en el punt d'abscissa $x = a$ és $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. En el nostre cas, i com que $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$, tenim

$$a = 10\,; \qquad f(10) = \sqrt{10-1} = 3\,; \qquad f'(10) = \frac{1}{2\sqrt{10-1}} = \frac{1}{6}\,.$$

L'equació buscada és $y = 3 + \dfrac{1}{6}(x - 10)$ o, en forma implícita, $x - 6y + 8 = 0$.

(b) Busquem la intersecció entre l'eix OX i la corba. L'equació $y = 0$ és la que correspon a aquest eix. Per tant el punt de tall és la solució de $+\sqrt{x-1} = 0$, és a dir, $x = 1$.



L'àrea buscada és

$$A = \int_1^5 \sqrt{x-1}\,dx = \int_1^5 (x-1)^{1/2}\,dx = \left[\frac{(x-1)^{3/2}}{3/2}\right]_1^5 = \frac{2}{3}\,\left[(5-1)^{3/2} - 0\right] = \frac{16}{3}\,.$$

Aquesta integral es pot calcular també per canvi de variable, fent $x - 1 = t^2$. D'aquí, $dx = 2\,dt$, per $x = 1$ la nova variable val $t = 0$ i quan $x = 5$, llavors $t = 2$; per tant,

$$\int_1^5 \sqrt{x-1}\,dx = \int_0^2 \sqrt{t^2}\cdot 2t\,dt = 2\int_0^2 t^2\,dt = 2\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 = \frac{16}{3}\,.$$

Quan es fa el canvi de variable és molt important canviar també els límits.

Si no es vol canviar els límits, es pot treballar la integral com a primitiva ("integral indefinida") i desfer el canvi al final. És a dir,

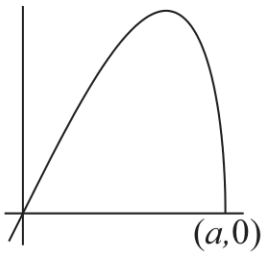
$$\int \sqrt{x-1}\,dx = \int \sqrt{t^2}\cdot 2t\,dt = 2\int t^2\,dt = \frac{2t^3}{3} + C = \frac{2\left(\sqrt{x-1}\right)^3}{3} + C\,.$$

Amb això,

$$\int_1^5 \sqrt{x-1}\,dx = \left[\frac{2\left(\sqrt{x-1}\right)^3}{3}\right]_1^5 = \frac{2}{3}\left(\left(\sqrt{5-1}\right)^3 - 0\right) = \frac{16}{3}\,.$$

37. PAU 2012 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2

2.- La gràfica de la funció $f(x) = x\sqrt{9-x^2}$ ***és la següent:***



(a) ***Trobeu el punt de tall,*** $(a, 0)$***, de la funció amb la part positiva de l'eix*** OX ***.***

(b) ***Calculeu l'àrea limitada per la gràfica de*** $f(x)$ ***i l'eix*** OX ***en el primer quadrant.***

[0,5 punts per l'apartat a; 1,5 punts per l'apartat b]

(a) El paràmetre a és l'abscissa del punt de tall de la corba amb l'eix OX. És a dir, és una de les solucions de l'equació $x\sqrt{9-x^2} = 0$, que són $x = 0$, $x = \pm 3$. Com que ha de ser $a > 0$, és evident que $a = 3$.

(b) Per aquest segon apartat, descriurem dues solucions.

Solució 1

Com que la funció és positiva a l'interval [0, 3], l'àrea buscada és $A = \int_0^3 f(x)\,dx$. Busquem una primitiva per a la funció $f(x)$, amb el canvi $t = 9 - x^2$, la qual cosa fa que $dt = -2x\,dx$.

$$\int f(x)\,dx = \int x\sqrt{9-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int \sqrt{9-x^2}(-2x)dx = -\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,dt$$
$$= -\frac{t^{3/2}}{3} = -\frac{(9-x^2)^{3/2}}{3}.$$

Llavors,

$$A = \left[-\frac{(9-x^2)^{3/2}}{3}\right]_0^3 = -0 + \frac{9^{3/2}}{3} = \frac{27}{3} = 9.$$

Evidentment, també es pot realitzar el càlcul sense desfer el canvi al final, sempre que es posin els límits d'integració que corresponen (per $x = 0$, queda $t = 9$; per $x = 9$, és $t = 0$):

$$A = \int_0^3 f(x)\,dx = -\frac{1}{2}\int_9^0 \sqrt{t}\,dt = \left[-\frac{t^{3/2}}{3}\right]_9^0 = -0 + \frac{9^{3/2}}{3} = \frac{27}{3} = 9.$$

Solució 2

Podem utilitzar la fórmula d'integració immediata $\int u^a\,du = \frac{u^{a+1}}{a+1}$. Llavors,

$$A = \int_0^3 f(x)\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^3 (9-x^2)^{1/2}(-2x)dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{(9-x^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^3 = 9.$$

NOTA: No es pot donar per bo coses per l'estil de $\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}\,dx = 1/2\int_0^3 \sqrt{t}\,dt$.

38. PAU 2011 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3

3.- Definim les funcions $f(x) = a(1-x^2)$ ***i*** $g(x) = \dfrac{x^2-1}{a}$***, en què*** $a > 0$***.***

(a) Comproveu que l'àrea del recinte limitat per les gràfiques de les funcions és

$$\frac{4(1+a^2)}{3a}\,.$$

(b) Busqueu el valor del paràmetre a ***perquè aquesta àrea sigui mínima.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Cal buscar els punts d'intersecció de les dues gràfiques. El valor de l'abscissa en un punt d'intersecció és la solució de l'equació $f(x) = g(x)$; és a dir,

$$a(1-x^2) = \frac{x^2-1}{a}\,.$$

D'aquí ens queda $(a^2+1)(1-x^2) = 0$. Com que a^2+1 no és zero per cap valor del paràmetre a, tenim $x = \pm 1$.

Llavors, tenint en compte que en l'interval $[-1,1]$ es compleix que $f(x) > g(x)$ ja que

$$f(0) = a > g(0) = -\frac{1}{a}, \quad \text{per ser} \quad a > 0,$$

és clar que l'àrea buscada és

$$A = \int_{-1}^{1} \left(f(x) - g(x)\right), dx = \int_{-1}^{1} \left(a(1-x^2) - \frac{x^2-1}{a}\right) dx = \int_{-1}^{1} \frac{(a^2+1)(1-x^2)}{a}\, dx$$
$$= \frac{(a^2+1)}{a}\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{4(1+a^2)}{3a}\,.$$

(b) Definim la funció $h(a) = \dfrac{4(1+a^2)}{3a}$. Perquè el seu valor sigui mínim cal que la primera derivada sigui nul·la. Com que

$$Dh(a) = \frac{4(a^2-1)}{3a^2}\,,$$

els valors "candidats" a donar un màxim o un mínim són $a = 1$ i $a = -1$. A l'enunciat ens diuen que $a > 0$. Per tant, l'únic valor possible és $a = 1$. A més a més, és fàcil veure que

$$D^2h(a) = \frac{8}{3a^3} \quad \text{i, per tant,} \quad D^2h(1) = \frac{8}{3} > 0\,.$$

És a dir, es tracta d'un mínim, tal com es volia.

Si es vol, l'estudi de si en $a = 1$ hi ha realment un mínim es pot realitzar buscant els signes de la primera derivada abans i després d'aquest valor:

$$Dh(0{,}5) = \frac{4(0{,}5^2-1)}{3(0{,}5)^2} = -4 < 0\,; \quad Dh(1{,}5) \simeq 0{,}74 > 0\,.$$

Com que la funció derivada és negativa a l'esquerra (funció decreixent) i positiva a la dreta (funció creixent), en $a = 1$ hi ha un mínim.

39. PAU 2011 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 1

1.- Calculeu l'àrea del recinte limitat per les corbes d'equació $f(x) = x^2 - x + 2$ ***i*** $g(x) = 5 - 3x$ ***.***

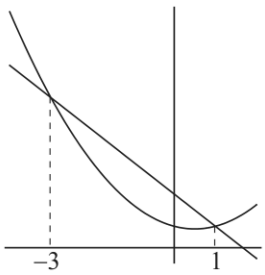
[2 punts]

Solució

Cal començar buscant les abscisses dels punts d'intersecció d'ambdues corbes. Per fer-ho, plantejem l'equació $f(x) = g(x)$,

$$f(x) = g(x) \iff x^2 - x + 2 = 5 - 3x \iff x^2 + 2x - 3 = 0 \iff x = 1 \text{ o } x = -3\,.$$

La gràfica de les dues funcions és



Com que $f(0) = 2$ i $g(0) = 5$, podem assegurar que, en l'interval que ens interessa, $g(x) \geq f(x)$. L'àrea demanada és

$$\int_{-3}^{1} (g(x) - f(x))\,dx = \int_{-3}^{1} (3 - 2x - x^2)\,dx = \left[3x - x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{1} = \left(3 - 1 - \frac{1}{3}\right) - (-9 - 9 + 9) = \frac{32}{3}\,.$$

40. PAU 2010 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 5

5.- Sigui $f(x) = \dfrac{8x^2}{2x+1}$***. Trobeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica d'aquesta funció, l'eix*** OX ***i les rectes*** $x = 0$ ***i*** $x = 2$ ***.***

[2 punts]

Solució

La funció solament val zero quan $x = 0$. Per tant, l'àrea demanada és $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx$. La funció a integrar és una funció racional amb el grau del numerador major que el denominador. Per tant, haurem de començar efectuant la divisió. Ens queda

$$\frac{8x^2}{2x+1} = 4x - 2 + \frac{2}{2x+1}\,.$$

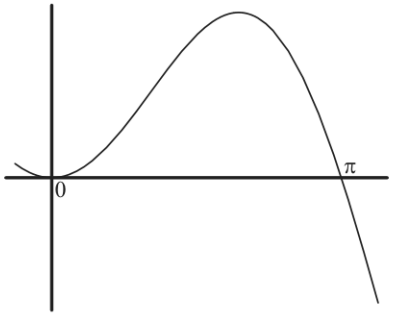
Llavors,

$$\int_0^2 \frac{8x^2}{2x+1}dx = \int_0^2 \left(4x - 2 + \frac{2}{2x+1}\right)dx = \left[2x^2 - 2x + \ln|2x+1|\right]_0^2$$

$$= [2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + \ln(2 \cdot 2 + 1)] - [0 - 0 + \ln(0 + 1)] = 4 + \ln 5 \simeq 5{,}60944\,.$$

41. PAU 2010 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 5

5.- La gràfica de la funció $f(x) = x \cdot \sin(x)$ ***és la següent:***



(a) ***Trobeu-ne una primitiva.***

(b) ***Aplicant el resultat de l'apartat anterior, calculeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció*** $f(x)$ ***i l'eix d'abscisses des de*** $x = 0$ ***fins a*** $x = \pi$***.***

[1,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b]

Solució

(a) Per calcular $\int x \cdot \sin(x)dx$ utilitzarem el mètode de integració per parts. Agafarem $u = x$ i $dv = \sin(x)dx$; llavors, $du = dx$ i $v = -\cos(x)$.

$$\int x \cdot \sin(x)dx = x[-\cos(x)] - \int [-\cos(x)]dx = -x \cdot \cos(x) + \int \cos(x)dx = -x \cdot \cos(x) + \sin(x) \ .$$

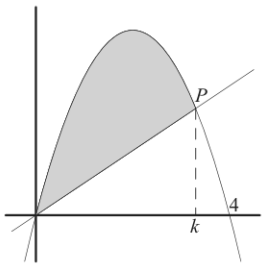
No cal sumar cap constant perquè es demana solament **una** primitiva.

(b) Aplicant la regla de Barrow,

$$\int_0^{\pi} x \cdot \sin(x)dx = \Big[-x \cdot \cos(x) + \sin(x) \Big]_0^{\pi} = [-\pi \cdot \cos(\pi) + \sin(\pi)] - [-0 \cdot \cos(0) + \sin(0)] = \pi - 0 = \pi.$$

42. PAU 2010 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 6

6.- En la figura es mostra la corba $y = x(4 - x)$ ***i una recta*** r ***que passa per l'origen i talla la corba en un punt*** P ***d'abscissa*** k***, amb*** $0 < k < 4$***.***



(a) ***Trobeu l'àrea ombrejada, delimitada per la corba i la recta, en funció de*** k***.***

(b) ***Trobeu per a quin valor de*** k ***l'àrea de la regió ombrejada és la meitat de l'àrea del recinte limitat per la corba i l'eix*** OX***.***

[1 punt per apartat]

(a) El punt P de la gràfica té per coordenades $P = (k, 4k - k^2)$. Llavors, l'àrea demanda en aquest primer apartat és l'àrea del recinte que tanca la corba des de $x = 0$ fins a $x = 4$ menys l'àrea del triangle format pels punts $(0, 0)$, $(k, 0)$ i P, que té com a base el valor k i com a altura el valor $4k - k^2$.

$$A = \int_0^k (4x - x^2)dx - \frac{k(4k - k^2)}{2} = \frac{6k^2 - k^3}{3} - \frac{4k^2 - k^3}{2} = \frac{k^3}{6} .$$

També és correcte plantejar l'area com la del recinte limitat per la corba i la recta d'equació $y = (4-k)x$ (recta que passa per l'origen i el punt P):

$$A = \int_0^k (4x - x^2 - 4x + kx)dx = \int_0^k (kx - x^2)dx = \left[\frac{kx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^k = \frac{k^3}{6} .$$

(b) La corba talla a l'eix OX en els punts on $x = 0$ i $x = 4$. L'àrea del recinte limitat per la corba i l'eix és

$$\int_0^4 (4x - x^2)dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{32}{3} .$$

Així, volem que $\frac{k^3}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{32}{3} = \frac{16}{3}$. La solució d'aquesta equació és $k = \sqrt[3]{32} = 2\sqrt[3]{4}$.

43. PAU 2009 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 2

2.- Considereu les corbes $y = 4x - x^2$ ***i*** $y = x^2 - 6$***.***

a) ***Trobeu-ne els punts d'intersecció.***

b) ***Representeu les dues corbes en una mateixa gràfica, on es vegi clarament el recinte que limiten entre elles.***

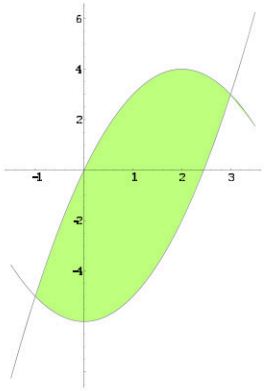
c) ***Trobeu l'àrea d'aquest recinte limitat per les dues corbes.***

[0,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b; 1 punt per l'apartat c]

Solució

a) Les abscisses dels punts de tall d'ambdues corbes, han de complir que $4x - x^2 = x^2 - 6$. Les solucions d'aquesta equació són $x = -1$ i $x = 3$. Així els punts de tall són $(-1, -5)$ i $(3, 3)$.

b) La gràfica és la següent:



c) Comprovem quina és la corba que limita el recinte per dalt

$$y = 4x - x^2 \Longrightarrow y(0) = 0\ ; \qquad y = x^2 - 6 \Longrightarrow y(0) = -6.$$

La corba d'equació $y = 4x - x^2$ és la que va per damunt. Llavors,

$$A = \int_{-1}^{3} [(4x - x^2) - (x^2 - 6)]dx = \int_{-1}^{3} (4x - 2x^2 + 6)dx = \left[2x^2 - \frac{2x^3}{3} + 6x\right]_{-1}^{3} = \frac{64}{3}\,.$$

$$\begin{cases} x + my = n \end{cases}$$

44. PAU 2009 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 3

3.- Considereu la funció $f(x) = \dfrac{x(a-x)}{a^3}$***, amb*** $a > 0$***.***

a) ***Trobeu els punts de tall de la funció amb l'eix*** OX***.***

b) ***Comproveu que l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció*** $f(x)$ ***i l'eix d'abscisses no depèn del valor del paràmetre*** a***.***

[0,5 punts per l'apartat a; 1,5 punts per l'apartat b]

Solució

a) $f(x) = 0 \iff x(a-x) = 0 \iff x = 0$ o $x = a$. Els punts de tall són, doncs, $(0,0)$ i $(a,0)$.

b) L'àrea de recinte és

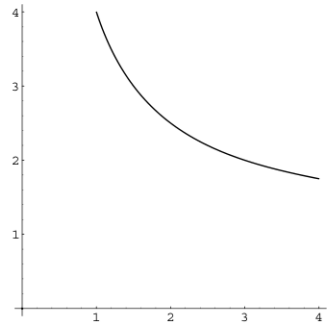
$$A = \int_0^a \frac{x(a-x)}{a^3}dx = \frac{1}{a^3}\left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{1}{6},$$

que, efectivament, no depèn del paràmetre a.

45. PAU 2009 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 5

PROBLEMES

5.- La gràfica de la funció $f(x) = \dfrac{3+x}{x}$***, des de*** $x = 1$ ***fins a*** $x = 4$***, és la següent:***



a) ***Calculeu l'equació de les rectes tangents a aquesta funció en els punts d'abscissa*** $x = 1$ ***i*** $x = 3$***.***

b) ***Dibuixeu el recinte limitat per la gràfica de la funció i les dues rectes tangents que heu calculat.***

c) ***Trobeu els vèrtexs d'aquest recinte.***

d) ***Calculeu la superfície del recinte damunt dit.***

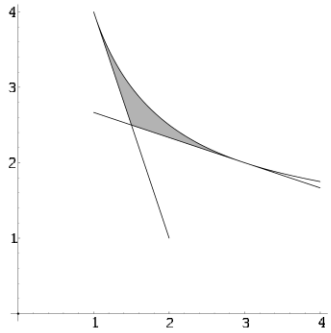
[1 punt per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b; 1 punt per l'apartat c; 1,5 punts per l'apartat d]

Solució

a) L'equació de la recta tangent a la gràfica d'una funció $f(x)$ en un punt x_0 és $y = f(x_0)+f'(x)(x-x_0)$. La derivada de la funció donada és $f'(x) = -\dfrac{3}{x^2}$. Per tant,

- En el punt d'abscissa $x = 1$, l'equació de la recta tangent és $y = f(1) + f'(1)(x - 1)$, és a dir, $y = 7 - 3x$.
- En el punt d'abscissa $x = 3$, l'equació és $y = f(3) + f'(3)(x - 3)$, o sigui, $y = 3 - \dfrac{x}{3}$.

b) El dibuix del recinte limitat per la corba i les dues tangents trobades és



c) Els vèrtexs del recinte són els punts de tall (o de contacte) entre la corba i les dues rectes que el limiten. Com que les rectes són tangents a la corba, els "punts de tall" (de fet, solament de contacte) entre cada una de elles i la corba són $(1, 4)$ i $(3, 2)$, respectivament. El vèrtex que falta és el punt d'intersecció entre les dues rectes,

En resum, els vèrtexs del recinte són, ordenats segons les abscisses, $(1,4)$, $(3/2,5/2)$ i $(3,2)$.

d) La superfície demanada és

$$\begin{aligned} A &= \int_1^{3/2}\left(\frac{3+x}{x}-(7-3x)\right)dx+\int_{3/2}^{3}\left(\frac{3+x}{x}-\left(3-\frac{x}{3}\right)\right)dx \\ &= \int_1^{3/2}\left(\frac{3}{x}-6+3x\right)dx+\int_{3/2}^{3}\left(\frac{3}{x}-2+\frac{x}{3}\right)dx \\ &= \left[3\ln|x|-6x+\frac{3x^2}{2}\right]_1^{3/2}+\left[3\ln|x|-2x+\frac{x^2}{6}\right]_{3/2}^{3} \\ &= \ln(27)-3\simeq 0,2958\ . \end{aligned}$$

46. PAU 2008 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 1

QÜESTIONS

1.- Se sap que certa funció derivable $F(x)$ ***verifica les condicions*** $F'(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$ ***i*** $F(1)=3$***.***

a) Trobeu $F(x)$***.***

b) Calculeu l'àrea compresa entre $F(x)$ ***i l'eix OX des de*** $x=0$ ***fins a*** $x=1$***.***

PUNTUACIÓ: 1 punt cada apartat.

Solució:

a) En primer lloc es calcula la primitiva de la derivada,

$$F(x)=\int\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,dx=\int x^{-1/4}dx=\frac{x^{3/4}}{3/4}+C=\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C\,.$$

A continuació, aplicant $F(1)=3$, s'obté la constant: $\dfrac{4}{3}+C=3\Rightarrow C=\dfrac{5}{3}$. Així, la funció demanada és

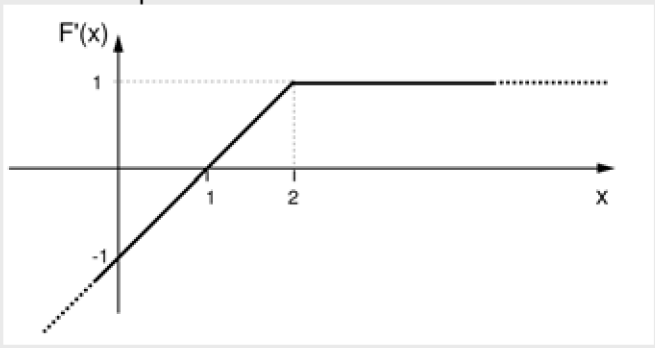
$$F(x)=\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+\frac{5}{3}.$$

b) Tenint en compte que la funció és sempre positiva, l'àrea demanada s'obté de calcular

$$\int_0^1 F(x)dx=\int_0^1\left(\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+\frac{5}{3}\right)dx=\left[\frac{4}{3}\cdot\frac{x^{7/4}}{7/4}+\frac{5}{3}x\right]_0^1=\frac{17}{7}\,.$$

47. PAU 2007 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 4

4.- La funció derivada $F'(x)$ d'una funció contínua $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que passa per l'origen és una funció a trossos formada per les semirectes del dibuix



.

Escriviu l'expressió de la funció *F(x)* com una funció a trossos.

La derivada de la funció *F(x)* es pot expressar com

$$F'(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x<2 \\ 1 & \text{si} \quad 2\le x \end{cases},$$

ja que la primera branca és una recta de pendent 1 que passa per (1,0) i la segona és una funció constant. El punt $x=2$ s'ha d'incorporar a una i només una de les dues branques. Ara bé, per continuïtat es pot escollir la que es vulgui.

Llavors, integrant, $$F(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}-x+C & \text{si} \quad x<2 \\ x+K & \text{si} \quad 2\le x \end{cases}.$$

Com que la funció passa per l'origen, la primera constant indeterminada val $C=0$. Llavors, donat que la funció ha de ser contínua a $x=2$, $\dfrac{4}{2}-2=2+K\to K=-2$ i la funció és

$$F(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}-x & \text{si} \quad x<2 \\ x-2 & \text{si} \quad 2\le x \end{cases}.$$

PUNTUACIÓ:
0.5 punts per l'expressió de *F'(x)*.

0.5 punts per la integració.

0.5 punts per l'obtenció de *C*.

0.5 punts per l'obtenció de *K*.

48. PAU 2007 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3

3.- Buscant els seus extrems relatius i els punts de tall amb els eixos, feu una representació aproximada de la corba d'equació $y = x^4 - x^2$. A continuació, calculeu l'àrea del recinte tancat per aquesta corba i l'eix de les abscisses.

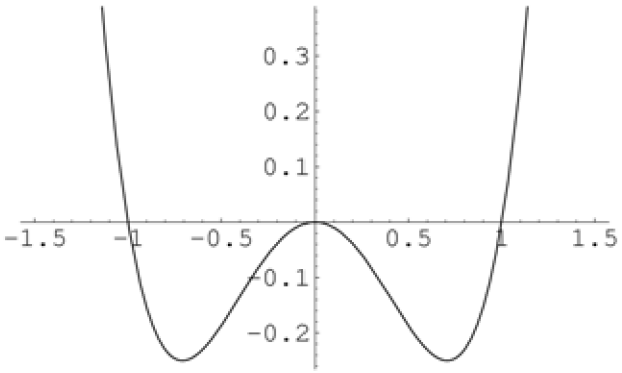
Si $f(x) = x^4 - x^2$, $f'(x) = 4x^3 - 2x$.

Extrems relatius: $4x^3 - 2x = 0 \to 2x(2x^2 - 1) = 0 \to x = 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Com $f''(x) = 12x^2 - 2$, $f''(0) < 0$, $f''(1/\sqrt{2}) > 0$ i $f''(-1/\sqrt{2}) > 0$. Llavors, el punt $(0,0)$ és un màxim relatiu i $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{4}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{4}\right)$ són mínims relatius.

Punts de tall: $x^4 - x^2 = 0 \to x^2(x^2 - 1) = 0 \to x = 0, 1, -1$, $(0,0)$, $(1,0)$ i $(-1,0)$.

Gràfica:



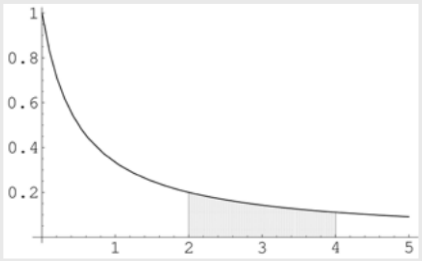
L'àrea demanada s'obté de calcular

$$A = -\int_{-1}^{1} (x^4 - x^2)dx = -\left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{15}u^2.$$

PUNTUACIÓ:
0.5 punts pels extrems i els punts de tall.
0.5 punts per la representació gràfica.
0.5 punts pel càlcul de la primitiva.
0.5 punts per l'aplicació correcta de la regla de Barrow.

49. PAU 2006 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 2

2. El gràfic de la funció $f(x)=\dfrac{1}{2x+1}$, quan $x>0$, és com segueix



a) Trobeu una primitiva de la funció *f*.

b) Calculeu l'àrea de la regió ombrejada.

a) Una primitiva de la funció donada és $F(x)=\dfrac{1}{2}\ln(2x+1)$.

b) L'àrea de la regió ombrejada és

$$\int_2^4 \frac{1}{2x+1}\,dx=\left[\frac{1}{2}\ln(2x+1)\right]_2^4=\frac{1}{2}\left(\ln(9)-\ln(5)\right)=\ln\sqrt{\frac{9}{5}}\,.$$

1 punt per cada apartat.

$$\begin{cases} x+y-z=0 \end{cases}$$

50. PAU 2005 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 6

6. Considereu la funció

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x+b & \text{si} \quad x<0 \\ ae^{bx} & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$$

on a i b són nombres reals. Es demana:

a) Quina condició han de complir a i b per tal que f sigui contínua a tot *R*?

b) Trobeu els valors de a i b pels quals f sigui contínua però no derivable a tot *R*.

c) Per $a=1$ i $b=1$, calculeu $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

SOLUCIÓ.

a) **[1 punt]** Tant x^2+x+b com $a\cdot e^{bx}$ són funcions contínues en tot *R*. Per tant, l'únic punt on f pot tenir una discontinuïtat és a $x=0$. Estudiem els límits laterals en el punt 0:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=b\,;\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=a\,.$$

Per tal que f sigui contínua a $x=0$ cal, doncs, que $a=b$.

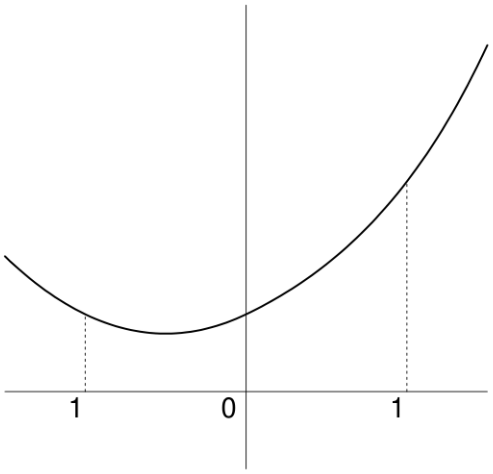
Penalitzeu amb 0,5 els que no comentin res de la continuïtat de f fora de $x=0$.

b) **[1 punt]** Si derivem f, obtenim:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x<0 \\ abe^{bx} & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}.$$

Per tal que f' existeixi en el punt $x=0$, cal novament que $\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^+} f'(x)$. O sigui, cal que $1=ab$. Com que la condició de continuïtat és que $a=b$, tenim que $a^2=1\Leftrightarrow a=\pm 1$. Per tant, hi ha dues parelles de valors que farien f contínua i derivable: $a=b=1$ o bé $a=b=-1$. Qualsevol parell de valors $a=b\neq\pm 1$ resolen la qüestió.

c) **[2 punts]**



$$f(x)=\begin{cases} x^2+x+1 & \text{si} \quad x<0 \\ e^x & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}\left(x^2+x+1\right)dx+\int_{0}^{1} e^x\,dx=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{0}+\left[e^x\right]_{0}^{1}=\frac{5}{6}+e-1=e-\frac{1}{6}\text{ unitats d'àrea.}$$

Puntueu 1 punt pel plantejament correcte i 0,5 punts per cada una de les dues integrals.

51. PAU 2005 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 6

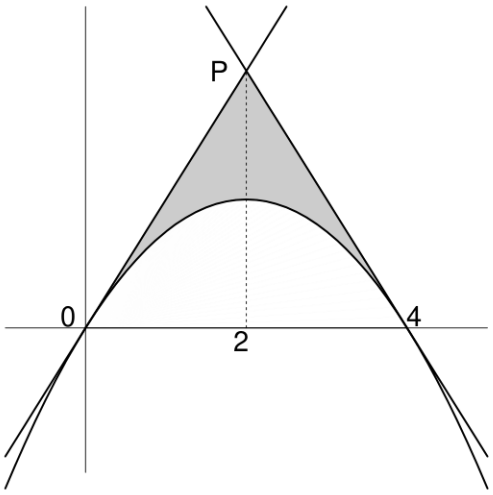
6. Considereu la funció $f(x)=4x-x^2$. Es demana:
   a) calculeu l'equació de les rectes tangents a la gràfica de f en els punts d'abscisses $x=0$ i $x=4$;
   b) feu un gràfic dels elements del problema;
   c) calculeu l'àrea compresa entre la gràfica de f i les rectes tangents que heu trobat a l'apartat a).

SOLUCIÓ

a) **[1 punt]** La derivada de f és $f'(x)=4-2x$. Els pendents de les rectes tangents demanades són $f'(0)=4$ i $f'(4)=-4$ La recta tangent en el punt $(0,0)$ té per equació $y=4x$ i la recta tangent en el punt $(4,0)$ és $y=-4x+16$.

Puntueu 1 punt per cada tangent trobada. Penalitzeu els errors de càlcul.

b) [1 punt]



c) **[2 punts]** La intersecció de les dues tangents és el punt $P=(2,8)$ (vegeu la gràfica). L'àrea demanda la calcularem en dos trossos: l'àrea per sota de $y=4x$ i per sobre de $f(x)$ entre 0 i 2:

$$\int_0^2 (4x-4x+x^2)dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{8}{3}.$$

I l'àrea per sota de $y=-4x+16$ i per sobre de $f(x)$ entre 2 i 4:

$$\int_2^4 (-4x+16-4x+x^2)dx=\left[16x-4x^2+\frac{x^3}{3}\right]_2^4=\frac{8}{3}.$$

En total, l'àrea demanda és de $\frac{16}{3}$ unitats d'àrea.

Puntueu 1 punt pel plantejament correcte (encara que hi hagi errors en el punt d'intersecció de les tangents) i 1 punt per l'àrea correcta. Penalitzeu errors de càlcul. Si algú trobar una de les integrals i multiplica el resultat per 2 fent servir la simetria, òbviament té correcte el càlcul de l'àrea.

52. PAU 2005 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 2

2. Donada la funció $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{5x^2-4}}$ es demana:

a) calculeu la integral $\int f(x)\,dx$;

b) trobeu la primitiva F de f que compleixi $F(1)=1$.

SOLUCIÓ

a) [1 punt]

$$\int \frac{x}{\sqrt{5x^2-4}}\,dx=\frac{1}{10}\int 10x\cdot\left(5x^2-4\right)^{-1/2}\,dx=\frac{1}{10}\frac{\left(5x^2-4\right)^{1/2}}{1/2}+C=\frac{1}{5}\sqrt{5x^2-4}+C\,.$$

b) [1 punt] Per trobar la primitiva que ens demanen, substituïm a

$$F(x)=\frac{1}{5}\sqrt{5x^2-4}+C\,;\ 1=F(1)=\frac{1}{5}+C\quad\Leftrightarrow\quad C=\frac{4}{5}\,.$$

La primitiva demanada és $F(x)=\dfrac{1}{5}\sqrt{5x^2-4}+\dfrac{4}{5}$.

53. PAU 2004 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 1

1. Calculeu el valor de la integral següent:

$$\int_0^3 \frac{x+1+\sqrt{x+1}}{x+1}\,dx\,.$$

SOLUCIÓ.

[2 punts] Es pot considerar immediata:

$$\int_0^3 \frac{x+1+\sqrt{x+1}}{x+1}\,dx=\int_0^3 dx+\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx\ =x\Big|_0^3+2\sqrt{x+1}\Big|_0^3=3+(4-2)=5\,.$$

O es pot fer un canvi de variable:

$$u=\sqrt{x+1};\ x+1=u^2;\ \ dx=2u\,du;\quad\begin{cases}x=0\ \Rightarrow\ u=1\\ x=3\ \Rightarrow\ u=2.\end{cases}$$

$$\int_0^3 \frac{x+1+\sqrt{x+1}}{x+1}\,dx=\int_1^2 \frac{u^2+u}{u^2}\cdot 2u\,du=2\int_1^2 (u+1)\,du=2\cdot\left[\frac{u^2}{2}+u\right]_1^2=5.$$

54. PAU 2004 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 5

PROBLEMES

5. Considerem la funció $f(x) = x^3 + mx^2 + 1,\ m \geq 0$.
a) Calculeu el valor de *m* per tal que l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció, l'eix *OX* i les rectes *x*=0 i *x*=2 sigui de 10 unitats quadrades.
b) Per a *m*=1, indiqueu el punt o els punts on la recta tangent a la gràfica de la funció forma un angle de 45º amb el semieix positiu de *OX*.

SOLUCIÓ.

a) **[2 punts]** La funció es manté positiva per sobre de l'interval $[0,2]$ perquè per $x \geq 0$ i $m \geq 0$ forçosament $x^3 + mx^2 + 1 \geq 1$. Alternativament es pot raonar que $f(x)$ es manté positiva a l'interval $[0,2]$ perquè $f(0) = 1$ i $f'(x) = 3x^2 + 2mx \geq 0$ per $x \in [0,2]$ (recordem que $m \geq 0$).
En conseqüència, l'àrea del recinte que ens diu l'enunciat és

$$\int_0^2 \left(x^3 + mx^2 + 1\right) dx = \frac{x^4}{4} + m\frac{x^3}{3} + x\Big|_0^2 = 6 + \frac{8m}{3}.$$

Així,

$$6 + \frac{8m}{3} = 10 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{3}{2}.$$

Valoreu 0,5 punts el raonament que $f(x) \geq 0$ a l'interval $[0,2]$.

b) **[2 punts]** Per *m*=1 la funció és $f(x) = x^3 + x^2 + 1$. El pendent de la recta tangent que ens diuen ha de ser igual a 1. Per tant, el punt o punts que ens demanen han de ser aquells on $f'(x) = 3x^2 + 2x = 1$. O sigui $x = -1$ i $x = 1/3$. Els punts en qüestió són $(-1,1)$ i $\left(\frac{1}{3}, \frac{31}{27}\right)$.

Valoreu amb 0,5 punts el fet el pendent de la recta és 1.
Si la resposta es limita a donar $x = -1$ i $x = 1/3$ doneu-la per bona.

55. PAU 2004 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 2

2. Donada la funció $f(x) = \cos x - \cos^3 x$, es demana:

a) trobeu la seva integral indefinida;

b) quina és la primitiva de $f(x)$ que passa pel punt $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$?

Indicació. Recordeu que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

SOLUCIÓ.

a) **[1,5 punts]**

$$\int \left(\cos x - \cos^3 x\right) dx = \int \cos x \cdot \left(1 - \cos^2 x\right) dx = \int \cos x \cdot sin^2 x \, dx = \frac{sin^3 x}{3} + C\,.$$

b) **[0,5 punts]** Si la primitiva ha de passar pel punt $(\pi/2, 0)$,

$$\frac{\sin^3 \frac{\pi}{2}}{3} + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{1}{3}.$$

La primitiva demanada és, doncs, $\frac{\sin^3 x - 1}{3}$.

56. PAU 2003 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 1 (Qüestions)

Qüestions

1. *Donada* $f(x) = (2x+1)\, e^{(x^2+x)}$ *determineu la funció* $g(x)$ *tal que* $g'(x) = f(x)$ *(és a dir, una primitiva de* $f(x)$*) i que el seu gràfic passa pel punt* $(0, 2)$.

Les funcions primitives de $f(x) = (2x+1)\, e^{(x^2+x)}$ són de la forma $g(x) = e^{(x^2+x)} + C$, on C és qualsevol constant. Si es demana que el seu gràfic passi pel punt $(0, 2)$ cal que $2 = g(0) = e^0 + C$ d'on es dedueix que $C = 1$ i $g(x) = e^{(x^2+x)} + 1$.

Compteu un punt (1) per la determinació correcta de les primitives de $f(x)$ i l'altre pel càlcul de la constant que fa que el gràfic passi justament pel $(0, 2)$.

---

57. PAU 2003 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 2 (Qüestions)

2. *Calculeu*

$$\int_1^e \frac{2\ln^3(x)}{x}\, dx.$$

Fent el canvi immediat $t = \ln(x)$ la integral es converteix en $\int_0^1 2t^3\, dt$ que val $\frac{1}{2}$.

Compteu fins a un punt (1) pel càlcul correcte de la primitiva i un punt més (1) pel càlcul final.

58. PAU 2003 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 3 (Qüestions)

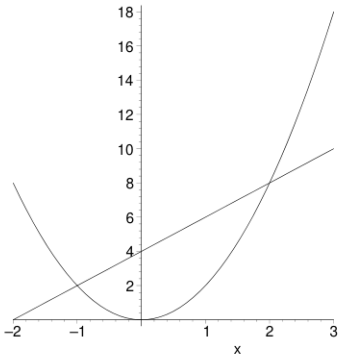
Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

59. PAU 2002 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 1 (Qüestions)

Qüestions

1. *Calculeu el valor positiu de a que fa que l'àrea compresa entre la recta d'equació $y = a\,x + 2\,a$ i la paràbola $y = a\,x^2$ valgui 18.*

Tenint en compte que $a > 0$ l'esquema de la situació és el següent:



Les abscisses dels punts d'intersecció de la recta i la paràbola, que corresponen a les solucions de l'equació $ax^2 = ax + 2a$, són $x = 2$ i $x = -1$. Llavors l'àrea buscada és la integral

$$\int_{-1}^{2} (ax + 2a - ax^2)\,dx = \frac{9}{2}a.$$

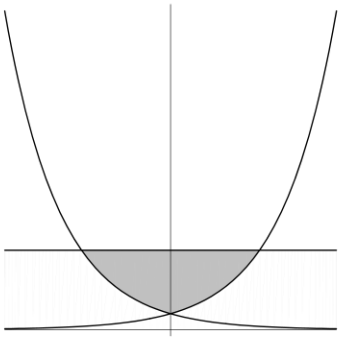
Igualant a 18 obtindrem que $a = 4$.

Compteu un punt i mig pel plantejament correcte, incloent-hi la determinació dels punts de tall de la recta i la paràbola i la determinació de la primitiva, i deixeu el mig punt restant per a valorar la correcció dels càlculs.

60. PAU 2002 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 1 (Qüestions)

Qüestions

1. *Calculeu l'àrea compresa entre les gràfiques de les corbes* $y = e^{2x}$ *i* $y = e^{\ 2x}$ *i la recta* $y = 5$ *representada en l'esquema següent:*



Per simetria respecte l'eix y, l'àrea demanada és el doble de l'àrea A determinada per les gràfiques donades quan $x > 0$. El punt d'intersecció de la recta $y = 5$ i la corba $y = e^{2x}$ és la solució de l'equació $5 = e^{2x}$, és a dir, $x = \frac{1}{2}\ln 5$. Llavors

$$A = (\frac{1}{2}\ln 5) \times 5 \quad \int_0^{\frac{1}{2}\ln 5} e^{2x}\,dx = \frac{5}{2}(\ln 5) \quad 2$$

i l'àrea total és el doble $(5(\ln 5) \quad 4 \simeq 4,0472)$.

Compteu fins a un punt i mig pel plantejament i el càlcul correcte de la primitiva (incloent-hi la determinació dels límits d'integració) i deixeu el mig punt restant pels càlculs.

61. PAU 2002 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 1 (Qüestions)

Qüestions

1. *Calculeu la primitiva de la funció* $f(x) = x\sqrt{x^2 - 1}$ *que s'anul·la en el punt d'abscissa* $x = 2$.

Les primitives de $f(x)$ són les funcions de la forma

$$g(x) = \int x\sqrt{x^2 - 1}\,dx = \frac{1}{3}(x^2 - 1)^{3/2} + C$$

on C és una constant qualsevol. Llavors la primitiva que s'anul·la en $x = 2$ és la que compleix $\frac{1}{3}(2^2 - 1)^{3/2} + C = 0$, d'on $C = -\sqrt{3}$ i per tant la que busquem és $g(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 1)^{3/2} - \sqrt{3}$.

Compteu un punt i mig pel plantejament i el càlcul de la primitiva i deixeu el mig punt restant pels càlculs finals.

62. PAU 2001 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 4 (Qüestions)

4. *Sabeu que la gràfica de la funció $f(x)$ passa pel punt $(1, -4)$ i que la seva funció derivada és $f'(x) = 2x - 2$.*

a) Determineu l'expressió de $f(x)$.

b) Calculeu l'àrea de la regió limitada per la gràfica de $f(x)$ i l'eix d'abscises OX.

---

a) Les primitives de $2x - 2$ són de la forma $g(x) = x^2 - 2x + k$, on k és una constant. Si la gràfica ha de passar per $(1, -4)$ és que $g(1) = -4$ i, per tant, $k = -3$. D'aquí que resulti $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

b) Els punts de tall de la gràfica de $f(x)$ amb l'eix d'abscisses corresponen a $x = -1$ i $x = 3$. L'àrea que es demana serà

$$-\int_{-1}^{3} (x^2 - 2x - 3)\, dx = \frac{32}{3}$$

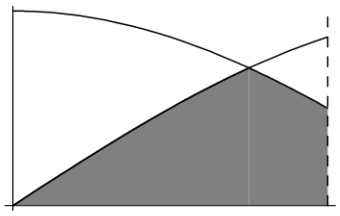
Compteu 1 punt per cada apartat. Valoreu sobretot si demostren conèixer el concepte de primitiva i el mètode per a calcular àrees. Puntueu independentment cada un dels dos apartats i traieu com a màxim mig punt del total de 2 per errors de càlcul.

63. PAU 2001 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 1 (Qüestions)

Qüestions

1. *a) Quin és l'angle x en radians ($0 < x < \frac{\pi}{2}$) tal que $\sin(x) = \cos(x)$?*

b) Considereu les funcions $f(x) = \sin(x)$ i $g(x) = \cos(x)$. Calculeu la superfície del recinte delimitat superiorment per les gràfiques d'aquestes funcions, inferiorment per l'eix d'abscisses i lateralment per les rectes verticals $x = 0$ i $x = \frac{\pi}{3}$ representat en el esquema següent



---

a) L'angle és $x = \pi/4$ amb $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$

b) La superfície que es demana és la suma d'integrals

$$\int_0^{(\pi/4)} \sin x\, dx + \int_{(\pi/4)}^{(\pi/3)} \cos x\, dx = [\quad \cos x]_0^{(\pi/4)} + [\sin x]_{(\pi/4)}^{(\pi/3)} = 1 \quad \sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(que té un valor aproximat de $0,4518$).

Compteu mig punt per la determinació del punt de tall de les dues gràfiques, és a dir, per l'apartat a). Compteu fins a 1 punt pel plantejament de la integral i el càlcul de les primitives i deixeu el mig punt restant pels càlculs finals. Intenteu valorar el segon apartat encara que el primer no estigui bé.

64. PAU 2001 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 4 (Qüestions)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

65. PAU 2000 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 2 (Qüestions)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

66. PAU 2000 · Setembre · Sèrie 6 · Exercici 1 (Qüestions)

1. L'expressió de $f(x)$ serà

$$f(x) = \begin{cases} 2x + C & \text{si } x < 1 \\ -x + K & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Com que $f(x)$ és contínua en tot punt, fent $x = 1$ a les dues expressions de $f(x)$ s'haurà de complir que $2 + C = -1 + K$. O sigui, $K = 3 + C$. Per altra banda, com que $f(-1)$ ha de ser 2, $-2 + C = 2$. Per tant $C = 4$, $K = 7$. Els alumnes han de dibuixar llavors la gràfica de $y = 2x + 4$ per a $x \leq 1$ i la gràfica de $y = -x + 7$ per a $x \geq 1$.

Aquesta qüestió val 2 punts. Atorgueu-los segons els vostre criteri en funció del que hagi fet cada alumne.

67. PAU 2000 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2 (Qüestions)

2. La intersecció de les gràfiques s'obté solucionant $-x^2 + 7 = 6/x$ que és equivalent a $0 = x^3 - 7x + 6 = (x - 1)(x^2 + x - 6)$. Les solucions d'aquesta equació són $x = -3$, $x = 1$ i $x = 2$. L'àrea que es demana és la integral

$$\int_1^2 (7 - x^2 - \frac{6}{x})\, dx = 7x - \frac{x^3}{3} - 6 \ln x \Big]_1^2 = \frac{14}{3} - 6 \ln 2$$

Compteu un punt per la determinació dels punts de tall de les gràfiques i l'altre pel càlcul de la integral.

68. PAU 2000 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 1 (Qüestions)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.