Matemàtiques

Càlcul integral

Exercicis · 68 exercicis

Proves d'accés a la universitat (PAU) de Catalunya. Ordenats del més recent al més antic.
Retalls dels exàmens i pautes oficials (selecat.cat / universitats.gencat.cat).

1. PAU 2026 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

Exercici 1
[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 1	

Considereu la funció definida a trossos següent:

$$f(x)=\begin{cases} 5e^{2x} & x\le 0 \\ (x+m)^2+1 & 0<x<2 \\ 1 & 2\le x \end{cases},$$

on m és un paràmetre real.

1.1. Determineu els valors de m que fan que la funció $f(x)$ sigui contínua en tot el seu domini. Justifiqueu la resposta.
[1 punt]

Puntuació de l'apartat 1.1	

1.2. Feu un esbós de la gràfica de $y=f(x)$ per al cas $m=-2$, i calculeu l'àrea delimitada per aquesta gràfica, l'eix OX i les rectes $x=-1$ i $x=3$.
[1 punt]

Puntuació de l'apartat 1.2	

1.3. Per a $m=-2$, trobeu un punt on la recta tangent a $y=f(x)$ sigui paral·lela a $y=-2x$. Calculeu l'equació d'aquesta recta tangent.
[0,5 punts]

Puntuació de l'apartat 1.3	

2. PAU 2026 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 1

Exercici 1
[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 1	

Considereu la paràbola $y=f(x)$, amb $f(x)=-x^2+5x$, i la hipèrbola $y=g(x)$, amb $g(x)=8-\dfrac{8}{x+1}$.

1.1. En quants punts es tallen les gràfiques d'aquestes dues funcions? Calculeu-los tots.
[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 1.1	

1.2. Calculeu l'àrea de la regió situada entre les dues corbes des de $x=1$ fins a $x=3$.
[1 punt]

Puntuació de l'apartat 1.2	

1.3. Comproveu que $f(x)$ té les arrels als punts d'abscissa $x=0$ i $x=5$, i que l'ordenada del vèrtex de la paràbola $y=f(x)$ és $y=6{,}25$. Justifiqueu que $y=f(x)$ és l'única paràbola que existeix amb aquestes dues propietats.
[0,75 punts]

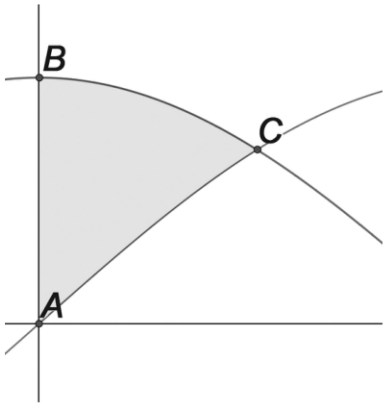
Puntuació de l'apartat 1.3	

Exercici 4

Trieu UNA de les dues opcions (A o B) i responeu a les qüestions que s'hi plantegen.

OPCIÓ A

Un vidrier està reparant un dels vitralls de la Sagrada Família la forma del qual és la de la part ombrejada de la figura adjunta. S'ha adonat que Gaudí el va dissenyar de manera que un dels costats segueix la funció $y = 3\sin(x/4)$ i un altre segueix la funció $y = 3\cos(x/4)$, on x i y estan expressades en metres.



a) Raoneu a quina funció correspon cada gràfica i calculeu les coordenades dels punts B i C assenyalats a la figura (tenint en compte que A és l'origen de coordenades).
[1 punt]

b) Calculeu el preu del vitrall sabent que costa 750 €/m^2.
[1,5 punts]

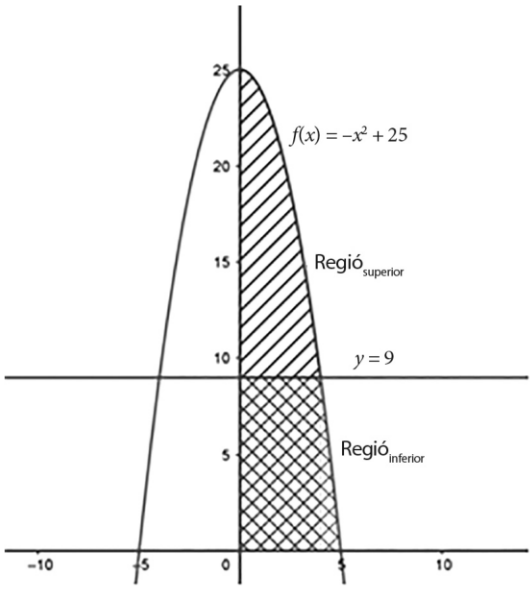
4. PAU 2025 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4 (Opció A)

Exercici 4

Trieu UNA de les dues opcions (A o B) i responeu a les qüestions que s'hi plantegen.

OPCIÓ A

La vela major d'un veler té forma semiparabòlica i està delimitada per les gràfiques de $f(x) = -x^2 + 25$, $y = 0$ i $x = 0$, tal com s'indica a la figura següent:

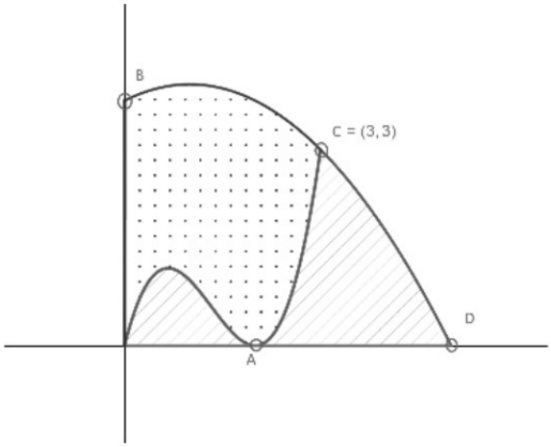


La vela té dues parts separades per la recta $y = 9$. Per a construir-la, s'empra un teixit de niló a la part superior, que costa 50 €/u^2, i un teixit de polièster a la part inferior, que costa 70 €/u^2. Calculeu el cost total del material que es necessita per a construir aquesta vela.

[2,5 punts]

5. PAU 2024 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 3

3. La classe de l'Èlia ha dissenyat el logotip següent per a pintar-lo a la paret de l'institut:



La corba que passa pel punt A és $y = f(x)$, amb $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$, i la que passa pels punts B, $C = (3, 3)$ i D és $y = g(x)$, amb $g(x) = -\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 4$.

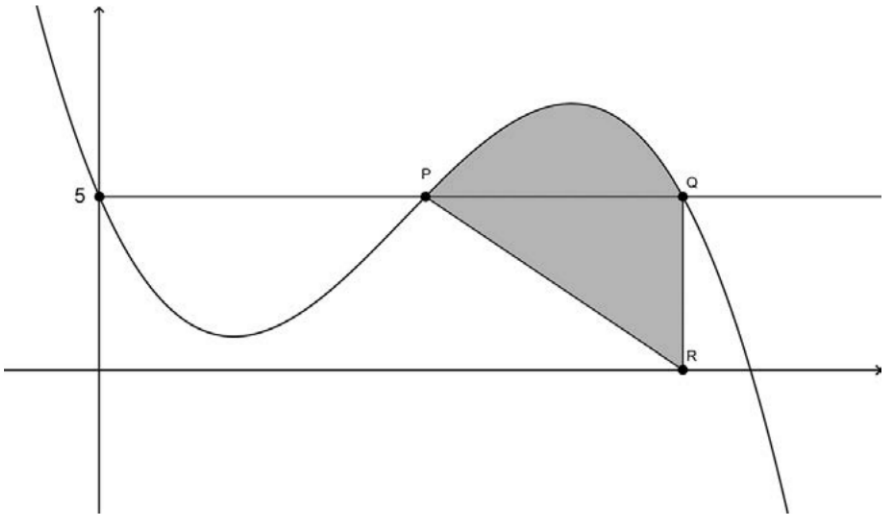
a) Calculeu les coordenades dels punts A, B i D.
[0,75 punts]

b) Calculeu l'àrea de la zona puntejada.
[1,25 punts]

c) Els alumnes volen pintar la part puntejada de color blau i la part ratllada de color vermell. Sabent que l'àrea total del logotip és $\frac{175}{12}$ m^2, de quin color necessitaran més pintura?
[0,5 punts]

6. PAU 2024 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3

3. En Joan troba entre els papers del seu avi un esbós com el de la figura adjunta, on es descriu un terreny de regadiu que ha deixat en herència al seu pare.



La corba de la gràfica és $y = f(x)$, amb $f(x) = -x^3 + 7x^2 - 6x + 5$.

a) A partir de l'expressió de $f(x)$, calculeu les coordenades dels punts P, Q i R indicats a la figura. Calculeu també l'equació de la recta PR.

[1,25 punts]

b) Calculeu la superfície del terreny.

[1,25 punts]

7. PAU 2023 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 4

4. Sigui la funció $f(x)$ definida per $f(x) = -3x + e^{2x^3-1}$.

a) Justifiqueu que $f(x) = 2$ té una solució en l'interval $(-1, 0)$.

[1,25 punts]

b) Sigui la funció $h(x) = -3x^2 + e^{2x^3-1}$. Calculeu l'àrea de la regió compresa entre les gràfiques de les funcions $f(x)$ i $h(x)$.

[1,25 punts]

8. PAU 2023 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3

3. Sigui $f'(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{si } x \le 2 \\ \dfrac{1}{x-1}, & \text{si } x > 2 \end{cases}$ la funció derivada d'una funció derivable $f(x)$ que passa pel punt $A = (0, 3)$.

a) Calculeu la funció $f(x)$.

[1,5 punts]

b) Calculeu l'equació de la recta tangent a la funció $f'(x)$ en el punt d'abscissa $x = 3$.

[1 punt]

9. PAU 2023 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 1

1. Considereu les funcions $f(x) = -x^2 + x + 6$ i $g(x) = -9x + 3x^2$.

a) Calculeu l'àrea de la regió delimitada per les dues funcions.
[1,25 punts]

b) Trobeu l'equació de la recta tangent a la funció $f(x)$ en el punt $(-2, 0)$. Representeu aquesta recta tangent i les funcions $f(x)$ i $g(x)$ en uns mateixos eixos de coordenades.
[1,25 punts]

10. PAU 2022 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 1

1. Sigui $f'(x) = 3x^2 - 12x$ la derivada d'una funció $f(x)$.

a) Si sabem que $f(x)$ talla l'eix de les abscisses en $x = 1$, calculeu l'expressió de la funció $f(x)$.
[0,75 punts]

b) Calculeu l'abscissa del punt d'inflexió de $f(x)$ i estudieu la concavitat de la funció.
[0,75 punts]

c) Sabem que l'àrea del recinte limitat per la corba $y = f''(x)$, l'eix de les abscisses i les rectes $x = 0$ i $x = a$, amb $a > 2$, és $15u^2$. Calculeu el valor de a.
[1 punt]

11. PAU 2022 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 4

4. ***a)*** Trobeu una funció polinòmica $y = g(x)$ de grau 3 tal que talli l'eix de les ordenades en el punt $(0, 5)$, que la recta tangent a $y = g(x)$ en el punt d'abscissa $x = 1$ sigui horitzontal i que $g''(x) = 2x + 1$.
[1 punt]

b) Comproveu que la funció $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 16$ té una arrel a $x = 2$ i que és estrictament creixent a l'interval $(0, 4)$. Utilitzeu aquesta informació per a calcular l'àrea determinada per la funció $f(x)$, l'eix de les abscisses i les rectes $x = 0$ i $x = 4$.
[1,5 punts]

12. PAU 2022 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 2

2. Considereu la funció $f(x) = x^3$ i sigui a un nombre real estrictament positiu.

a) Calculeu l'equació de la recta t tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x = a$. Trobeu el punt de tall de la recta t amb l'eix de les abscisses (en funció de a).
[1,25 punts]

b) Feu un esbós de la gràfica de la funció f i la recta t. Calculeu el valor de a perquè l'àrea en el primer quadrant limitada per la funció f, la recta t i l'eix de les abscisses sigui $108\ u^2$.
[1,25 punts]

13. PAU 2021 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 2

2. ***a)*** Donada la funció $f(x)=\frac{4}{x}$, calculeu l'equació de la recta tangent a $y=f(x)$ en el punt d'abscissa $x=1$. Trobeu també l'equació de la recta normal a $y=f(x)$ en aquest mateix punt.
[1,25 punts]

b) Feu un esbós de les gràfiques de la corba $y=f(x)$ i de la recta $4x+y=8$, i calculeu l'àrea delimitada per aquestes dues gràfiques, l'eix de les abscisses i la recta vertical $x=3$.
[1,25 punts]

14. PAU 2021 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 4

4. Sigui la funció $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$ definida en el domini $x>0$, en què ln és el logaritme neperià.

a) Trobeu les coordenades d'un punt de la corba $y=f(x)$ en el qual la recta tangent a la corba sigui horitzontal i analitzeu si la funció té un extrem relatiu en aquest punt.
[1 punt]

b) Determineu si la funció $f(x)$ té alguna asímptota horitzontal.
[0,5 punts]

c) Calculeu l'àrea de la regió delimitada per la corba $y=f(x)$ i les rectes $x=1$ i $x=\mathrm{e}$. Feu un dibuix aproximat de la gràfica de la funció en el domini $0<x<5$, en què quedi representada l'àrea que heu calculat.
[1 punt]

15. PAU 2021 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 2

2. Siguin les funcions $f(x)=x^3-9x$ i $g(x)=7x$.

a) Estudieu els intervals de creixement i decreixement de $f(x)$.
[1,25 punts]

b) Calculeu l'àrea de la regió del semiplà $x\geq 0$ compresa entre les gràfiques de $f(x)$ i $g(x)$.
[1,25 punts]

16. PAU 2020 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 1

1. Siguin les funcions $f(x)=x^3$ i $g(x)=a\cdot x^2$, en què a és un nombre real positiu.

a) Trobeu, en funció del paràmetre a, els punts de tall entre les dues corbes $y=f(x)$ i $y=g(x)$ i feu un esbós de la regió limitada per les dues gràfiques.
[1,25 punts]

b) Calculeu el valor de a perquè l'àrea compresa entre $y=f(x)$ i $y=g(x)$ sigui $\frac{27}{4}$ u^2.
[1,25 punts]

17. PAU 2020 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 6

6. Considereu la funció $f(x) = x^3$.

a) Calculeu en quin punt del tercer quadrant la recta tangent a $y = f(x)$ és paral·lela a la recta $3x - y = 4$. Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica en aquest punt i feu un dibuix aproximat de la gràfica de la funció i les dues rectes.

[1,25 punts]

b) Calculeu l'àrea de la regió delimitada per $y = f(x)$ i la recta $y = 3x + 2$.

[1,25 punts]

18. PAU 2020 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 4

4. Sigui la funció $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(x)$, en què ln indica el logaritme neperià, definida per a $x > 0$.

a) Calculeu les coordenades del punt de la corba $y = f(x)$ en què la recta tangent a la corba en aquest punt és horitzontal. Estudieu si aquest punt és un extrem relatiu i classifiqueu-lo.

[1,25 punts]

b) Calculeu l'àrea del recinte delimitat per la corba $y = f(x)$, les rectes verticals $x = 1$ i $x = e$ i l'eix de les abscisses.

[1,25 punts]

19. PAU 2020 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 6

6. Una empresa de ceràmica vol posar a la venda una rajola quadrada de 20 cm de costat pintada a dos colors, de manera que la superfície de cada color sigui la mateixa i que si es posen les rajoles l'una al costat de l'altra es vegi un dibuix continu (figura 1).



Figura 1



Figura 2

Per a fer-ho, l'empresa utilitza en cada rajola la funció $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ enquadrada entre els punts de coordenades (0, 0), (0, 2), (2, 0) i (2, 2), tal com es mostra en la figura 2, i fa servir com a unitat de mesura el decímetre.

a) Justifiqueu que, efectivament, aquesta funció permet ajuntar les rajoles de manera contínua i derivable.

[1,25 punts]

b) Justifiqueu que aquesta funció divideix el quadrat esmentat en dues parts que tenen la mateixa superfície.

[1,25 punts]

20. PAU 2019 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 1

1. Considereu les rectes $y = x$ i $y = 2x$, i la paràbola $y = x^2$.

a) Calculeu els punts d'intersecció entre les gràfiques de les diferents funcions i feu un esbós de la regió delimitada per les gràfiques.

[1 punt]

b) Calculeu l'àrea de la regió de l'apartat anterior.

[1 punt]

21. PAU 2019 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 6

6. Considereu la funció $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

a) Calculeu el domini de la funció *f*, els punts de tall de la gràfica de *f* amb els eixos de coordenades, i els intervals de creixement i decreixement de *f*.

[1 punt]

b) Calculeu l'àrea de la regió del pla determinada per la gràfica de la funció *f*, les rectes $x = 1$ i $x = \mathrm{e}$, i l'eix de les abscisses.

[1 punt]

22. PAU 2019 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 6

6. Considereu les funcions $f(x) = x^2$ i $g(x) = \dfrac{1}{x}$, i la recta $x = \mathrm{e}$.

a) Feu un esbós de la regió delimitada per les seves gràfiques i l'eix de les abscisses. Calculeu les coordenades del punt de tall de $y = f(x)$ amb $y = g(x)$.

[1 punt]

b) Calculeu l'àrea de la regió descrita en l'apartat anterior.

[1 punt]

23. PAU 2019 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 4

4. Considereu la funció $f(x)$, que depèn dels paràmetres reals n i m i és definida per

$$f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{4}+n & \text{si } 0 < x \le 2 \\ \dfrac{3x}{2}+m & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Calculeu els valors de n i m perquè la funció sigui contínua a tot el conjunt dels nombres reals.

[1 punt]

b) Per al cas $n = -4$ i $m = -6$, calculeu l'àrea de la regió limitada per la gràfica de $f(x)$, l'eix de les abscisses i les rectes $x = 0$ i $x = 4$.

[1 punt]

24. PAU 2018 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 6

6. Siguin les funcions $f(x) = x^2 - 1$ i $g(x) = 3 - x^2$.

a) Feu un esbós de les gràfiques de les paràboles $y = f(x)$ i $y = g(x)$ en un mateix sistema d'eixos cartesians i trobeu els punts de tall amb l'eix de les abscisses, els vèrtexs i els punts de tall entre les dues gràfiques.

[1 punt]

b) Calculeu l'àrea de la regió del semiplà $y \ge 0$ compresa entre les gràfiques de $f(x)$ i $g(x)$.

[1 punt]

25. PAU 2018 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 5

5. Sigui la funció $f(x) = \sqrt{x} + x - 2$.

a) Comproveu que la funció $f(x)$ compleix l'enunciat del teorema de Bolzano a l'interval $[0, 2]$ i que, per tant, l'equació $f(x) = 0$ té alguna solució a l'interval $(0, 2)$. Comproveu que $x = 1$ és una solució de l'equació $f(x) = 0$ i raoneu, tenint en compte el signe de $f'(x)$, que la solució és única.

[1 punt]

b) A partir del resultat final de l'apartat anterior, trobeu l'àrea limitada per la gràfica de la funció $f(x)$, l'eix de les abscisses i les rectes $x = 0$ i $x = 1$.

[1 punt]

26. PAU 2017 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 6

6. Sigui la funció $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$.

a) Calculeu una primitiva de la funció $f(x)$.

[1 punt]

b) Calculeu l'àrea limitada per la funció $f(x)$ i l'eix de les abscisses entre les abscisses $x=0$ i $x=\dfrac{\pi}{4}$.

[1 punt]

27. PAU 2017 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 3

3. Responeu a les qüestions següents:

a) Comproveu que la recta tangent a la corba $y=x^2$ en el punt d'abscissa $x=2$ és la recta $y=4x-4$ i calculeu els punts d'intersecció d'aquesta recta amb els eixos de coordenades.

[1 punt]

b) Calculeu l'àrea limitada per la corba de l'apartat anterior, la recta tangent en $x=2$ i l'eix de les abscisses.

[1 punt]

28. PAU 2016 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 4

4. Sigui la funció $f(x)=\sin(x)$.

a) Calculeu l'equació de les rectes tangents a la funció f en els punts d'abscissa $x=0$ i $x=\pi$, respectivament. Trobeu les coordenades del punt en què es tallen les dues rectes.

[1 punt]

b) Calculeu l'àrea de la regió limitada per la gràfica de la funció f i les rectes tangents de l'apartat anterior (en cas de no haver resolt l'apartat anterior, suposeu que les rectes són $y=x$ i $y=-x+\pi$, respectivament).

[1 punt]

29. PAU 2016 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 6

6. Siguin les paràboles $f(x)=x^2+k^2$ i $g(x)=-x^2+9k^2$.

a) Calculeu les abscisses, en funció de k, dels punts d'intersecció entre les dues paràboles.

[1 punt]

b) Calculeu el valor del paràmetre k perquè l'àrea compresa entre les paràboles sigui de 576 unitats quadrades.

[1 punt]

Proves d'accés a la universitat

Convocatòria 2016

Matemàtiques

30. PAU 2015 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 3

3. Responeu a les qüestions següents:

***a*)** Determineu l'equació de la recta tangent a la corba $y = x^3$ en el punt d'abscissa $x = 2$.
[1 punt]

***b*)** Calculeu l'àrea de la regió plana finita limitada per la corba $y = x^3$ i la recta $y = 3x - 2$.
[1 punt]

31. PAU 2015 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 4

4. Sigui f la funció $f(x) = x \cdot \sin(x)$. Calculeu la primitiva de la funció f que passa pel punt $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ (unitats en radians).

[2 punts]

32. PAU 2014 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 4

4. Calculeu l'àrea de la regió del pla limitada en el primer quadrant per les gràfiques de les funcions $y = x^2$, $y = 4x^2$ i $y = 9$.
[2 punts]

33. PAU 2013 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 2

2. De la funció polinòmica $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ sabem que
— té un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = -3$;
— la integral definida en l'interval $[0, 1]$ val $-\frac{5}{4}$.

Calculeu el valor dels paràmetres a i b.
[2 punts]

34. PAU 2013 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 3

3. Donada la funció $f(x)=\sqrt{x-1}$ i la recta horitzontal $y = k$, amb $k > 0$,

a) Feu un esbós del recinte limitat per les gràfiques de la funció i la recta, i els eixos de coordenades.

b) Trobeu el valor de k sabent que l'àrea d'aquest recinte és igual a 14/3.

[0,5 per l'apartat *a*; 1,5 per l'apartat *b*]

35. PAU 2013 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 2

2. La corba $y = x^2$ i la recta $y = k$, amb $k > 0$, determinen una regió plana.

a) Calculeu el valor de l'àrea d'aquesta regió en funció del paràmetre k.

b) Trobeu el valor de k perquè l'àrea limitada sigui $\sqrt{6}\ u^2$.

[1,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*]

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

36. PAU 2013 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 4

4. Per a $x \geq 1$, considereu la funció $f(x)=+\sqrt{x-1}$.

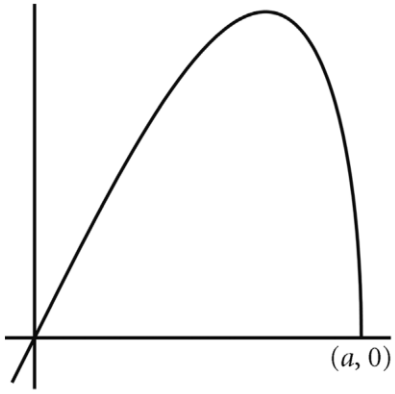
a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en el punt d'abscissa igual a 10.

b) Calculeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de $f(x)$, la recta d'equació $x = 5$ i l'eix OX.

[1 punt per cada apartat]

37. PAU 2012 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2

2. La gràfica de la funció $f(x)=x\sqrt{9-x^2}$ és la següent:



a) Trobeu el punt de tall, $(a, 0)$, de la funció amb la part positiva de l'eix OX.

b) Calculeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de $f(x)$ i l'eix OX en el primer quadrant.

[0,5 punts per l'apartat *a*; 1,5 punts per l'apartat *b*]

38. PAU 2011 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3

3. Definim les funcions $f(x)=a(1-x^2)$ i $g(x)=\dfrac{x-1}{a}$, en què $a>0$.

a) Comproveu que l'àrea del recinte limitat per les gràfiques de les funcions és:

$$\frac{4(1+a^2)}{3a}$$

b) Calculeu el valor del paràmetre a perquè aquesta àrea sigui mínima.

[1 punt per cada apartat]

39. PAU 2011 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 1

1. Calculeu l'àrea del recinte limitat per les corbes d'equació $f(x)=x^2-x+2$ i $g(x)=5-3x$.

[2 punts]

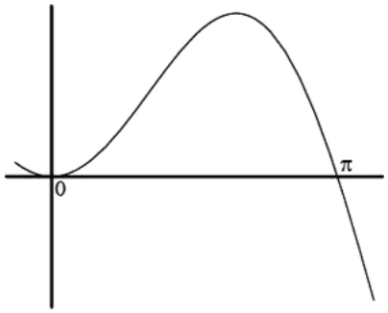
40. PAU 2010 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 5

5. Sigui $f(x)=\dfrac{8x}{2x+1}$. Trobeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica d'aquesta funció, l'eix OX i les rectes $x=0$ i $x=2$.

[2 punts]

41. PAU 2010 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 5

5. La gràfica de la funció $f(x)=x\cdot\sin(x)$ és la següent:



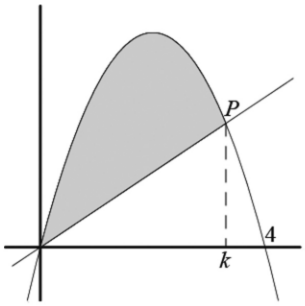
a) Trobeu-ne una primitiva.

b) Aplicant el resultat de l'apartat anterior, calculeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció $f(x)$ i l'eix d'abscisses des de $x=0$ fins a $x=\pi$.

[1,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*]

42. PAU 2010 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 6

3. En la figura es mostra la corba $y = x(4 - x)$ i una recta r que passa per l'origen i talla la corba en un punt P d'abscissa k, amb $0 < k < 4$.



a) Trobeu l'àrea ombrejada, delimitada per la corba i la recta, en funció de k.

b) Trobeu per a quin valor de k l'àrea de la regió ombrejada és la meitat de l'àrea del recinte limitat per la corba i l'eix OX.

[1 punt per apartat]

43. PAU 2009 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 2

2. Considereu les corbes $y = 4x - x^2$ i $y = x^2 - 6$.

a) Trobeu-ne els punts d'intersecció.

b) Representeu les dues corbes en una mateixa gràfica, on es vegi clarament el recinte que limiten entre elles.

c) Trobeu l'àrea d'aquest recinte limitat per les dues corbes.

[0,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*; 1 punt per l'apartat *c*]

44. PAU 2009 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 3

3. Considereu la funció $f(x) = \dfrac{x(a - x)}{a^3}$, amb $a > 0$.

a) Trobeu els punts de tall de la funció $f(x)$ amb l'eix OX.

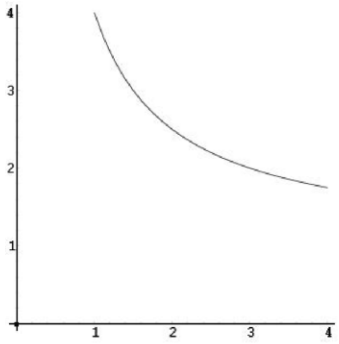
b) Comproveu que l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció $f(x)$ i l'eix d'abscisses no depèn del valor del paràmetre a.

[0,5 punts per l'apartat *a*; 1,5 punts per l'apartat *b*]

45. PAU 2009 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 5

PROBLEMES

5. La gràfica de la funció $f(x) = \dfrac{3+x}{x}$, des de $x = 1$ fins a $x = 4$, és la següent:



a) Calculeu l'equació de les rectes tangents a aquesta funció en els punts d'abscissa $x = 1$ i $x = 3$.

b) Dibuixeu el recinte limitat per la gràfica de la funció i les dues rectes tangents que heu calculat.

c) Trobeu els vèrtexs d'aquest recinte.

d) Calculeu la superfície del recinte damunt dit.

[1 punt per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*; 1 punt per l'apartat *c*; 1,5 punts per l'apartat *d*]

46. PAU 2008 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 1

QÜESTIONS

1. Se sap que certa funció derivable $F(x)$ verifica les condicions següents:

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \text{ i } F(1) = 3$$

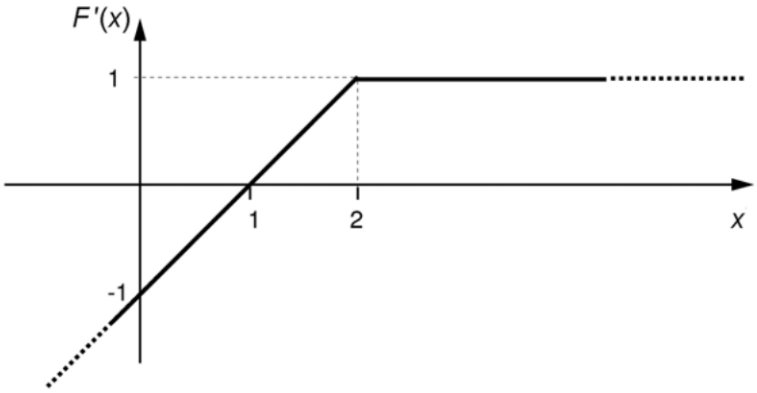
a) Trobeu $F(x)$.

b) Calculeu l'àrea compresa entre $F(x)$ i l'eix OX des de $x = 0$ fins a $x = 1$.

[1 punt per cada apartat]

47. PAU 2007 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 4

4. La funció derivada $F'(x)$ d'una funció contínua F: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ que passa per l'origen és una funció a trossos formada per les semirectes del dibuix.



Escriviu l'expressió de la funció $F(x)$ com una funció a trossos.

[2 punts]

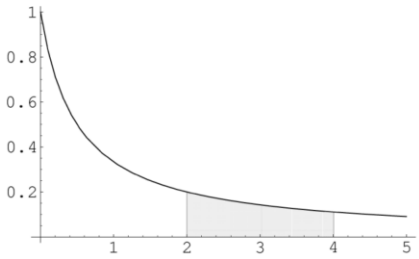
48. PAU 2007 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3

3. Busqueu els extrems relatius i els punts de tall amb els eixos, i feu una representació aproximada de la corba d'equació $y = x^4 - x^2$. A continuació, calculeu l'àrea del recinte tancat per aquesta corba i l'eix d'abscisses.

[1 punt pel càlcul d'extrems, els punts de tall i la gràfica; 1 punt pel càlcul de l'àrea]

49. PAU 2006 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 2

2. El gràfic de la funció $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$, quan $x > 0$, és com segueix:



a) Trobeu una primitiva de la funció f.
b) Calculeu l'àrea de la regió ombrejada.

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. Total: 2 punts]

50. PAU 2005 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 6

6. Considereu la funció

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + b & \text{si } x < 0 \\ ae^{bx} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

on a i b són nombres reals.
a) Quina condició han de complir a i b per tal que f sigui contínua a tot $\mathbb{R}$?
b) Trobeu els valors de a i b per als quals f sigui contínua però no derivable a tot $\mathbb{R}$.

c) Per a $a = 1$ i $b = 1$, calculeu $\int_{-1}^{1} f(x)\ dx$.

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt; apartat c) 2 punts. Total: 4 punts]

51. PAU 2005 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 6

6. Considereu la funció $f(x) = 4x - x^2$.

a) Calculeu l'equació de les rectes tangents a la gràfica de f en els punts d'abscisses $x = 0$ i $x = 4$.
b) Feu un gràfic dels elements del problema.
c) Calculeu l'àrea compresa entre la gràfica de f i les rectes tangents que heu trobat a l'apartat a).

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt; apartat c) 2 punts. Total: 4 punts]

2

52. PAU 2005 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 2

2. Donada la funció $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{5x^2 - 4}}$:

a) Calculeu la integral $\int f(x)dx$.

b) Trobeu la primitiva F de f que compleixi $F(1) = 1$.

sitat

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. Total: 2 punts]

53. PAU 2004 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 1

1. Calculeu el valor de la integral següent:

$$\int_0^3 \frac{x + 1 + \sqrt{x + 1}}{x + 1} dx$$

[2 punts]

54. PAU 2004 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 5

PROBLEMES

5. Considereu la funció $f(x) = x^3 + mx^2 + 1$, $m \geq 0$.

   a) Calculeu el valor de m per tal que l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció, l'eix OX i les rectes $x = 0$ i $x = 2$ sigui de 10 unitats quadrades.
   b) Per a $m = 1$, indiqueu el punt o els punts on la recta tangent a la gràfica de la funció forma un angle de 45° amb el semieix positiu de OX.

[Puntuació: apartat a) 2 punts; apartat b) 2 punts. Total: 4 punts]

55. PAU 2004 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 2

2. Donada la funció $f(x) = \cos x - \cos^3 x$:

   a) trobeu la seva integral indefinida;

   b) quina és la primitiva de $f(x)$ que passa pel punt $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$?

Indicació: recordeu que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

[Puntuació: apartat a) 1,5 punts; apartat b) 0,5 punts. Total 2 punts]

56. PAU 2003 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 1 (Qüestions)

QÜESTIONS

1. Donada $f(x) = (2x + 1)\, e^{(x^2+x)}$, determineu la funció $g(x)$ tal que $g'(x) = f(x)$ (és a dir, una primitiva de $f(x)$) i que el seu gràfic passa pel punt $(0, 2)$.

[2 punts]

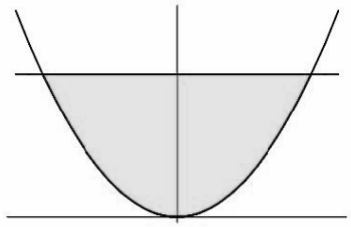
57. PAU 2003 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 2 (Qüestions)

2. Calculeu $\int_1^e \frac{2\ln^3(x)}{x}\, dx$ [2 punts]

e Catalunya
ó de les PAU de Catalunya

58. PAU 2003 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 3 (Qüestions)

3. Considerem la regió S del pla limitada per la paràbola $y = 3x^2$ i la recta $y = 3$ representada en l'esquema següent:



Siguin A i B els punts d'intersecció de la recta i la paràbola, i T el triangle que té per vèrtexs A, B i l'origen de coordenades (0, 0). Calculeu l'àrea de la regió que resulta quan es treu el triangle T a la regió S. [2 punts]

59. PAU 2002 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 1 (Qüestions)

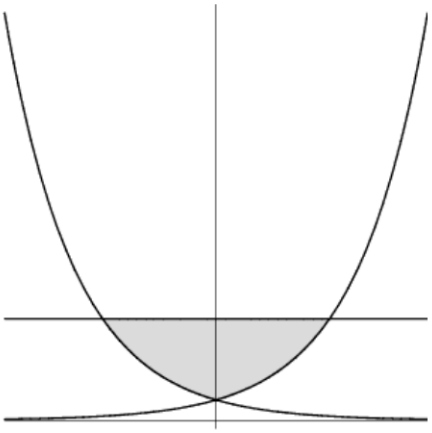
QÜESTIONS

1. Calculeu el valor positiu de a que fa que l'àrea compresa entre la recta d'equació $y = ax + 2a$ i la paràbola $y = ax^2$ valgui 18. [2 punts]

60. PAU 2002 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 1 (Qüestions)

QÜESTIONS

1. Calculeu l'àrea compresa entre les gràfiques de les corbes $y = e^{2x}$ i $y = e^{-2x}$ i la recta $y = 5$ representada en l'esquema següent:



[2 punts]

61. PAU 2002 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 1 (Qüestions)

QÜESTIONS

1. Calculeu la primitiva de la funció $f(x) = x\sqrt{x^2 - 1}$ que s'anul·la en el punt d'abscissa $x = 2$. [2 punts]

62. PAU 2001 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 4 (Qüestions)

4. Sabeu que la gràfica de la funció $f(x)$ passa pel punt $(1, -4)$ i que la seva funció derivada és $f'(x) = 2x - 2$.

   a) Determineu l'expressió de $f(x)$.
   b) Calculeu l'àrea de la regió limitada per la gràfica de $f(x)$ i l'eix d'abscisses OX.

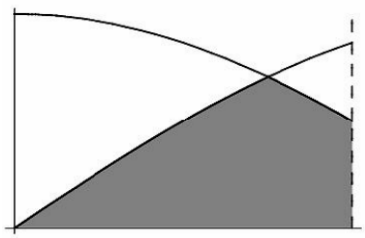
[2 punts]

63. PAU 2001 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 1 (Qüestions)

QÜESTIONS

1. a) Quin és l'angle x en radians $(0 < x < \frac{\pi}{2})$ tal que $\sin(x) = \cos(x)$?

   b) Considereu les funcions $f(x) = \sin(x)$ i $g(x) = \cos(x)$. Calculeu la superfície del recinte delimitat superiorment per les gràfiques d'aquestes funcions, inferiorment per l'eix d'abscisses i lateralment per les rectes verticals $x = 0$ i $x = \frac{\pi}{3}$ representat en l'esquema següent:



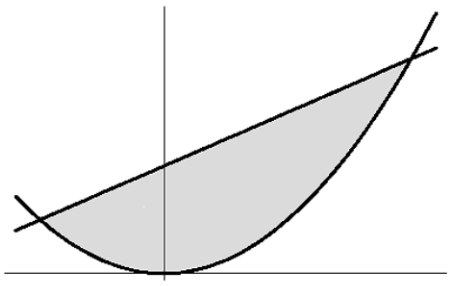
[2 punts]

64. PAU 2001 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 4 (Qüestions)

4. Calculeu l'àrea de la regió limitada per la gràfica de la funció $f(x) = xe^x$ per a $x \geq 0$, l'eix d'abscisses i la recta vertical $x = 1$. [2 punts]

65. PAU 2000 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 2 (Qüestions)

2. Calculeu per integració la superfície del recinte delimitat per les corbes $y = x^2$ i la recta d'equació $y - x - 6 = 0$ representat en el dibuix següent:



[2 punts]

66. PAU 2000 · Setembre · Sèrie 6 · Exercici 1 (Qüestions)

1. D'una funció $y = f(x)$ sabem

   a) El seu domini de definició és tot **R**.
   b) La seva funció derivada és

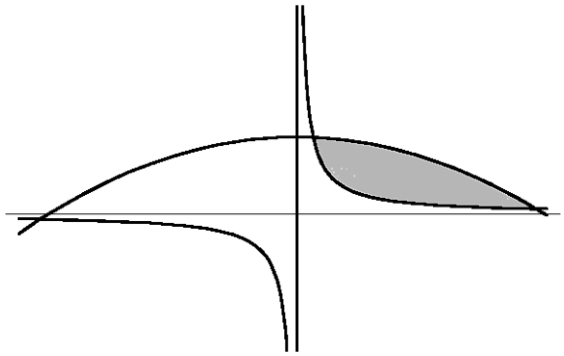
$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

   c) *f(x)* és contínua en tot punt i $f(-1) = 2$.

   Determineu el valor de $f(1)$ i dibuixeu la gràfica de la funció *f(x).* [2 punts]

67. PAU 2000 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2 (Qüestions)

2. Calculeu l'àrea que té l'únic recinte tancat limitat per les gràfiques de les funcions $y = -x^2 + 7$ i $y = \frac{6}{x}$ representat en el dibuix següent:



[2 punts]

68. PAU 2000 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 1 (Qüestions)

QÜESTIONS

1. El polinomi $p(x) = x^2 + ax + b$ s'anul·la per a $x = 2$ i compleix $\int_0^2 p(x)\,dx = 4$.
   Calculeu raonadament *a* i *b*. [2 punts]