Matemàtiques aplicades a les ciències social

Sistemes

Solucions · 90 exercicis

Proves d'accés a la universitat (PAU) de Catalunya. Ordenats del més recent al més antic.
Retalls dels exàmens i pautes oficials (selecat.cat / universitats.gencat.cat).

Exercici 2

a) Considerem les variables x, y i z, que corresponen al nombre d'alumnes que han anat a Roma, que han anat a Londres i que no han marxat enlloc, respectivament. Obtenim el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + y + z = 84 \\ 3y - z = 0 \end{cases}$$

Apliquem el mètode de Gauss prenent les variables en l'ordre x, y i z i obtenim la matriu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 84 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Clarament, es tracta d'un sistema compatible indeterminat, ja que tenim dues equacions i tres incògnites. Per tant, no és possible determinar quants alumnes han anat a cada viatge i quants no han marxat.

b) Resolem el sistema anterior fent servir com a paràmetre la variable y, obtenim $z = 3y$ i $x = 84 - y - z = 84 - 4y = 4(21 - y)$. Veiem clarament que, efectivament, el nombre d'alumnes que no han marxat enlloc, z, és múltiple de 3 i que el nombre d'alumnes que han anat a Roma, x, és múltiple de 4.

c) Ara afegim la informació nova. El sistema que obtenim és:

$$\begin{cases} x + y + z = 84 \\ 3y - z = 0 \\ x + 4 = 2(y + z - 4) \end{cases}$$

Que és equivalent a:

$$\begin{cases} x + y + z = 84 \\ 3y - z = 0 \\ x - 2y - 2z = -12 \end{cases}$$

Si apliquem el mètode de Gauss, tenim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 84 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & -12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 84 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -96 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 84 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -96 \end{array}\right)$$

Observem que es tracta d'un sistema compatible determinat. Resolent-lo, s'obté la solució $z = 24$, $y = 8$ i $x = 52$.

Per tant, obtenim que 52 alumnes han anat a Roma, 8 han anat a Londres i 24 no han marxat enlloc.

Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara.

a) Escriure el sistema: 0,25 punts per equació correcta. Resposta a la pregunta: 0,25 punts.

b) Resolució del sistema en funció de y: 0,25 punts. Justificació del fet que z és múltiple de 3: 0,25 punts. Justificació del fet que x és múltiple de 4: 0,25 punts.

c) Obtenció de l'equació addicional: 0,25 punts. Resolució del sistema: 0,5 punts. Obtenció de la solució final: 0,25 punts.

2. PAU 2026 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2

2.

2.1. Anomenem x, y i z els preus d'una caixa de maduixes, d'albercocs i de cireres, respectivament. A partir de la informació de l'enunciat obtenim les dues equacions següents:

$$5x + 3y + 4z = 120$$
$$2x + y + 3z = 56$$

Si el resolem utilitzant el mètode de Gauss, obtenim:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 120 \\ 2 & 1 & 3 & 56 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 120 \\ 0 & -1 & 7 & 40 \end{pmatrix}$$

Per tant, tenim el següent:

$$-y + 7z = 40 \Rightarrow y = 7z - 40$$

i

$$x = \frac{120 - 3y - 4z}{5} = -5z + 48$$

L'import d'aquesta nova comanda serà:

$$6x + 4y + 2z = 6(-5z + 48) + 4(7z - 40) + 2z = 128$$

Per tant, aquesta comanda tindrà un cost de 128 €.

2.2. Sabem ara que $y = 12{,}5$. Per tant, $7z - 40 = 12{,}5$, i d'aquí deduïm que

$$z = \frac{52{,}5}{7} = 7{,}5.$$

D'altra banda, sabem que

$$x = -5z + 48 = -5 \cdot 7{,}5 + 48 = 10{,}5$$

Per tant, el preu d'una caixa de maduixes és de 10,50 €, i el d'una caixa de cireres és de 7,50 €.

Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprar la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressar la solució de manera clara.

2.1. Escriure el sistema: 0,25 punts per equació correcta. Obtenció de x en funció de z: 0,25 punts. Obtenció de y en funció de z: 0,25 punts. Obtenció del preu de la nova comanda: 0,5 punts.

2.2. Procediment de resolució: 0,5 punts. Obtenció dels preus de les caixes de maduixes i de cireres: 0,25 punts per cada preu.

3. PAU 2026 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4 (Opció B)

OPCIÓ B

4.1. Considerem els esdeveniments

G = l'estudiant cursa un grau,

M = l'estudiant cursa un màster,

D = l'estudiant cursa un doctorat.

Considerem també els esdeveniments

C = l'estudiant és de la Facultat de Ciències,

E = l'estudiant és de la Facultat d'Enginyeria,

L = l'estudiant és de la Facultat de Lletres.

Per calcular la probabilitat que l'estudiant escollit a l'atzar sigui un estudiant de màster de la Facultat de Ciències, apliquem la regla de Laplace:

$$P(\mathrm{M} \cap \mathrm{C}) = \frac{\text{Nombre d'estudiants de màster de la F. de Ciències}}{\text{Total d'estudiants}} = \frac{172}{2.000} = \frac{43}{500} = 0{,}086$$

Per tant, la probabilitat que l'estudiant escollit a l'atzar sigui un estudiant de màster de la Facultat de Ciències és de 0,086.

Calcularem ara la probabilitat que un estudiant de la Facultat d'Enginyeries estigui cursant un màster. Es tracta d'una probabilitat condicionada:

$$P(\mathrm{M} \mid E) = \frac{\text{Nombre d'estudiants de màster de la F. d'Enginyeries}}{\text{Total d'estudiants de la F. d'Enginyeries}} = \frac{178}{668} = \frac{89}{334} \approx 0{,}2665$$

Per tant, la probabilitat que un estudiant de la Facultat d'Enginyeries estigui cursant un màster és de 0,2665.

4.2. Considerem

x = nombre d'estudiants becats de grau.

y = nombre d'estudiants becats de màster.

z = nombre d'estudiants becats de doctorat.

Sabem que en total hi ha 1.036 estudiants becats; per tant:

$$x + y + z = 1.036$$

Sabem també que, si considerem conjuntament els estudiants de grau i màster, la meitat estan becats. És a dir,

$$x + y = \frac{1}{2}(1.333 + 533) = 933$$

També sabem que hi ha el mateix nombre d'estudiants becats de màster que de doctorat. Això és: $y = z$.

El sistema d'equacions que hem obtingut és:

$$\begin{cases} x + y + z = 1036 \\ x + y = 933 \\ y = z \end{cases}$$

El podem resoldre fàcilment aplicant, per exemple, el mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1036 \\ 1 & 1 & 0 & 933 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1036 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 103 \end{array}\right)$$

Obtenim, $z = 103$, $y = 103$ i, finalment, $x = 1.036 - 2 \cdot 103 = 830$.

Per tant, hi ha 830 estudiants de grau, 103 estudiants de màster i 103 estudiants de doctorat que gaudeixen d'una beca.

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprar la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressar la solució de manera clara.

4.1. Assignació d'esdeveniments: 0,25 punts. Càlcul de la probabilitat que l'estudiant escollit a l'atzar sigui un estudiant de màster de la Facultat de Ciències: 0,5 punts. Càlcul de la probabilitat que un estudiant de la Facultat d'Enginyeries estigui cursant un màster: 0,5 punts.

4.2. Escriure el sistema: 0,25 punts per cada equació correcta. Resolució: 0,25 punts. Solució final: 0,25 punts.

4. PAU 2026 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 1

1.

1.1. Anomenarem x, y i z la quantitat d'aigua emmagatzemada als embassaments de Boadella, Sau i la Baells, respectivament.

Sabem que entre els tres hi ha emmagatzemats $112\ hm^3$ d'aigua, per tant

$$x + y + z = 112.$$

D'altra banda, l'embassament de la Baells conté la mateixa quantitat que els embassaments de Sau i Boadella, per tant,

$$z = x + y.$$

Aplicant el mètode de reducció de Gauss al sistema de dues equacions amb tres incògnites obtenim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 112 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 112 \\ 0 & 0 & 2 & 112 \end{array}\right) \Rightarrow 2z = 112 \Rightarrow z = 56.$$

Observem que el sistema plantejat és compatible indeterminat per haver-hi més incògnites que equacions. Per tant no podem conèixer l'aigua embassada a cada embassaments. Però sí que sabem que la quantitat d'aigua embassada a la Baells és de $56\ hm^3$.

1.2 Amb la informació addicional obtenim la següent equació addicional

$$0{,}1x + 0{,}2y + 0{,}3z = 27{,}2$$

multiplicant l'equació per 10 obtenim

$$x + 2y + 3z = 272.$$

Tenim un sistema de tres equacions i tres incògnites que podem resoldre

$$\left.\begin{array}{c} x + y + z = 112 \\ x + 2y + 3z = 272 \\ z = 56 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x + y = 112 - 56 \\ x + 2y = 272 - 3 \cdot 56 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c} x + y = 56 \\ x + 2y = 104 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c} x + y = 56 \\ y = 48 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 56 - 48 = 8.$$

Així doncs, la quantitat d'aigua a l'embassament de Boadella és de $8\ hm^3$, la quantitat d'aigua a l'embassament de Sau és de $48\ hm^3$ i la quantitat d'aigua a l'embassament de les Baells és de $56\ hm^3$.

Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara. Si no és el cas es pot descomptar fins a un màxim de 0,25 punts.

1.1 Plantejament del sistema: 0,25 punts per cada equació. Resolució del sistema i raonament de que és un sistema compatible indeterminat: 0,5 punts. Determinar la quantitat d'aigua de l'embassament de la Baells: 0,25 punts.

1.2 Plantejament de l'equació addicional: 0,25 punts. Resolució del sistema: 0,5 punts. Determinar la quantitat d'aigua a Sau i Boadella: 0,5 punts.

5. PAU 2026 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 4 (Opció A)

4.

OPCIÓ A

4.1. Anomenem x al nombre de paraigües bastó venuts, i y al nombre de paraigües plegables venuts. Podem escriure un sistema d'equacions tenint en compte els guanys totals (primera equació) i els metres quadrats de tela usats (segona equació), de la següent manera:

$$\begin{cases} 15x + 25y = 42500 \\ 1{,}5x + y = 2375 \end{cases}$$

Per trobar les dades demanades, només hem de solucionar aquest sistema. De la segona equació, podem aïllar la variable y

$$y = 2375 - 1{,}5x$$

I substituint a la primera equació ens queda

$$15x + 25(2375 - 1{,}5x) = 42500.$$

Que si la resolem obtenim $x = 750$.

Substituint aquesta variable, trobem el valor de y

$$y = 2375 - 1{,}5x = 2375 - 1{,}5 \cdot 750 = 1250.$$

Per tant, s'han venut un total de 750 paraigües bastó i 1250 paraigües plegables.

4.2. Per saber els beneficis obtinguts si fabriquem 100 paraigües de cada tipus hem de substituir en les funcions que ens donen els beneficis la variable x per 1:

$$p(1) = 2$$

$$b(1) = -\frac{2}{5} + 2 = \frac{8}{5}.$$

Per tant, obtenim un benefici de 2000 euros amb els paraigües plegables i $\frac{8}{5} \cdot 1000 = 1600$ euros pels paraigües bastó. En total obtenim un benefici de 3600 euros.

Per saber entre quins valors no tenim pèrdues hem de buscar els valors de x pels quals les funcions són positives.

Comencem pels paraigües plegables. Tenint en compte que x representa el nombre de paraigües fabricats, la funció $p(x) = x(3 - x)$ està definida per valors de x més grans o iguals que zero. Per tant, per tal que la funció sigui

positiva cal $(3-x) \geq 0$, és a dir, cal que $x \leq 3$. Així doncs, per no tenir pèrdues, en el cas dels paraigües plegables, cal que $x \in [0,3]$.

En el cas dels paraigües bastó, la funció de beneficis és $b(x) = -\frac{2}{5}x^2 + 2x = x(-\frac{2}{5}x + 2)$. Per tant, per tal de no tenir pèrdues, cal que $-\frac{2}{5}x + 2 \geq 0$, és a dir, $x \leq 5$. Així doncs, cal que $x \in [0,5]$.

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara. Si no és el cas es pot descomptar fins a un màxim de 0,25 punts.

4.1 Escriure cada equació: 0,25 punts cadascuna. Resolució i obtenció del resultat final: 0,75 punts.

4.2 Càlcul dels beneficis per la fabricació de 100 paraigües de cada tipus: 0.75 punts. Càlcul dels valors de la variable x per als quals no hi ha pèrdues: 0,25 punts per cada tipus de paraigües.

6. PAU 2025 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 2

2.

Anomenarem x, y i z el nombre de sabates que es van vendre al preu original, amb un descompte del 20% i amb un descompte del 50%, respectivament.

El preu original era de 90 euros; el preu amb un 20% de descompte és de 0,8·90=72 euros, i el preu amb un 50% de descompte és de 0,5·90=45 euros.

A partir de l'enunciat obtenim el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x + y + z = 820.000 \\ y - 2z = 0 \\ 90x + 72y + 45z = 63.837.000 \end{cases}$$

La tercera equació la podem simplificar dividint-la per 9 i obtenim:

$$10x + 8y + 5z = 7.093.000$$

Resolem el sistema utilitzant el mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 820.000 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 10 & 8 & 5 & 7.093.000 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 820.000 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1.107.000 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 820.000 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 1.107.000 \end{array}\right)$$

Resolent-lo s'obté la solució $z = 123.000$, $y = 246.000$ i $x = 451.000$.

Així doncs, es van vendre 451.000 parells de sabates al preu original, 246.000 amb un descompte del 20% i 123.000 al 50%.

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara.

a) Plantejament del sistema: 0,25 punts per cada equació. Resolució del sistema: 1 punt. Determinar el nombre de sabates venudes a cada preu: 0,75 punts.

7. PAU 2025 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

1.

a) Si anomenem respectivament x, y i z els preus de les habitacions individual, doble i triple, podem plantejar el sistema següent:

$$\begin{cases} 6x + 2y = 702 \\ x + 3z = 2y + 2z \end{cases}$$

Obtenim, per tant,

$$\begin{cases} 6x + 2y = 702 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 351 - 3x \\ z = 2y - x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 351 - 3x \\ z = 702 - 7x \end{cases}$$

Per tant, si anomenem x el preu de l'habitació individual, l'habitació doble valdrà $351 - 3x$ i la triple $702 - 7x$.

b) Amb la nova informació sabem que $z = 2x$. Per tant, igualant al valor de z que hem trobat abans, obtenim que $2x = 702 - 7x$, és a dir, $9x = 702$ i, per tant, el preu de l'habitació individual serà $x = 78$ euros. L'habitació doble valdrà $y = 351 - 3 \cdot 78 = 117$ euros i la triple $z = 2 \cdot 78 = 156$ euros.

Sabíem que si reservàvem 6 habitacions individuals i dues de dobles havíem de pagar 702 euros. Si en reservem una d'individual i tres de triples haurem de pagar $78 + 3 \cdot 156 = 546$ euros. Si en reservem dues de dobles i dues de triples haurem de pagar també $2 \cdot 117 + 2 \cdot 156 = 546$ euros.

Per tant, entre aquestes opcions, el preu mínim per allotjar les 10 persones és de 546 euros, i l'obtenim tant si reservem una habitació individual i tres de triples com si reservem dues habitacions dobles i dues de triples.

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara.

a) Escriure el sistema: 0,25 punts per equació correcta. Procediment de resolució: 0,25 punts. Trobar el valor correcte de y i de z en funció de x: 0,5 punts.

b) Escriure l'equació addicional: 0,25 punts. Obtenció del preu dels tres tipus d'habitació: 0,75 punts. Trobar el preu mínim que cal pagar: 0,25 punts.

8. PAU 2024 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 2

2.

a) Anomenem x, y i z la inversió en BTC, ETH i LNK, respectivament. Obtenim les dues equacions següents

$$\begin{cases} x = y + z \\ 1{,}15x + 1{,}1y + 1{,}13z = 1{,}13(x + y + z) \end{cases}$$

Si substituïm la primera igualtat en la segona equació obtenim

$$1{,}15(y + z) + 1{,}1y + 1{,}13z = 1{,}13(y + z + y + z)$$
$$2{,}25y + 2{,}28z = 2{,}26y + 2{,}26z; \quad -0{,}01y = -0{,}02z; \quad y = 2z$$

Per tant, la inversió en ETH ha de ser el doble que en LNK.

b) Si hi afegim la nova condició, obtenim el sistema

$$\begin{cases} x = y + z \\ 1{,}15x + 1{,}1y + 1{,}13z = 1{,}13(x + y + z) \\ x + y + z = 150000 \end{cases}$$

Si substituïm la primera relació en la tercera equació, obtenim

$$y + z + y + z = 150000; \quad 2y + 2z = 150000; \quad y + z = 75000$$

Si fem servir la relació obtinguda a l'apartat *a)*, obtenim

$$2z + z = 75000; \quad 3z = 75000; \quad z = \frac{75000}{3} = 25000;$$
$$y = 2z = 2 \cdot 25000 = 50000; \quad x = y + z = 50000 + 25000 = 75000$$

Per tant, la inversió és de 75000 € en BTC, 50000 € en ETH i 25000 € en LNK.

a) Assignació d'incògnites: 0,25 punts. Plantejament: 0,25 punts cada equació correcta. Trobar la relació entre ETH i LNK: 0,5 punts.

b) Escriure la nova equació: 0,25 punts. Resoldre el sistema: 0,5 punts. Escriure la inversió realitzada en cada criptomoneda: 0,5 punts.

9. PAU 2024 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2

2.

a)

Anomenarem x, y i z la producció de sofàs del mes passat de la primera, segona i tercera fàbrica, respectivament. Tenim el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x + y + z = 1260 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Utilitzant el mètode de Gauss en l'ordre x, y, z, s'obté el sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1260 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1260 \\ 0 & 2 & 0 & 1260 \end{array}\right)$$

Es tracta d'un sistema compatible indeterminat, ja que només tenim dues equacions i en canvi tenim tres incògnites, i, per tant, no es pot determinar quants sofàs van produir cadascuna de les tres fàbriques. Tanmateix, observem que podem trobar la producció de la segona fàbrica a partir de la segona equació, i obtenim $y = 630$ sofàs.

b)

Ara tenim el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x + y + z = 1260 \\ x - y + z = 0 \\ 0{,}1\,x + 0{,}3\,y + 0{,}2\,z = 284 \end{cases}$$

Fem un canvi entre la primera i la segona fila i multipliquem l'última fila per 10. S'obté:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + z = 1260 \\ x + 3y + 2z = 2840 \end{cases}$$

Utilitzant el mètode de Gauss, prenent les variables en l'ordre x, y, z, obtenim la matriu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1260 \\ 1 & 3 & 2 & 2840 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1260 \\ 0 & 4 & 1 & 2840 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 630 \\ 0 & 0 & 1 & 320 \end{array}\right)$$

Podem concloure que és un sistema compatible determinat. Resolent-lo s'obté la solució $z = 320, y = 630$ i $x = 310$. Així doncs, la primera fàbrica va produir 310 sofàs el mes passat, la segona 630 i la tercera 320.

Criteris de correcció:

a) Plantejament del sistema: 0,25 punts cada equació. Resolució del sistema: 0,5 punts. Obtenció del nombre de sofàs produïts per la segona fàbrica: 0,25 punts.

b) Plantejament de l'equació addicional: 0,25 punts. Resolució del sistema: 0,5 punts. Obtenció del nombre de sofàs produïts per la primera i la tercera fàbrica: 0,5 punts.

10. PAU 2023 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 1

1.

a) Si anomenem x el nombre de persones que han practicat esquí aquàtic, y el nombre de persones que han pràcticat caiac i z el nombre de persones que han practicat moto aquàtica obtenim les equacions següents:

$$x + y + z = 45$$
$$40x + 20y + 60z = 1700$$
$$x = 3y$$

b) Dividim la segona equació per 20 i obtenim el sistema de tres equacions lineals amb tres incògnites següent:

$$\begin{cases} x + y + z = 45 \\ 2x + y + 3z = 85 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

Resolem el sistema pel mètode de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 2 & 1 & 3 & 85 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 45 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 25 \end{array}\right)$$

Per tant, tenim que $5z = 25$, és a dir, $z = 5$, $y - 5 = 5$, per tant $y = 10$ i, finalment, $x + 10 + 5 = 45$, és a dir, $x = 30$.

Així doncs 30 persones han fet esquí aquàtic, 10 han fet caiac i 5 moto aquàtica.

a) Assignació d'incògnites: 0,25 punts. Plantejament: 0,25 punts cada equació correcta.

b) Procediment de resolució del sistema: 1 punt. Obtenció del resultat correcte de les tres incògnites: 0,5 punts.

---

11. PAU 2023 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3

3.

a) Si anomenem respectivament *x*, *y* i *z* els resultats de cadascuna de les tres proves, podem plantejar el sistema següent:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y+z}{3} = 6 \\ z = \dfrac{x+y}{2} \end{cases}$$

Escrivint el sistema sense fraccions, i aplicant el mètode de Gauss obtenim:

$$\begin{cases} x+y+z=18 \\ -x-y+2z=0 \end{cases} \xrightarrow{f_1+f_2} \begin{cases} x+y+z=18 \\ 3z=18 \end{cases}$$

Obtenim, per tant, el valor de $z = 6$. Així doncs, la nota de la tercera prova ha estat un 6.

b) Afegint la nova informació, el sistema queda:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y+z}{3} = 6 \\ z = \dfrac{x+y}{2} \\ \dfrac{y+z}{2} = 7 \end{cases}$$

Escrivint el sistema sense fraccions i aplicant el mètode de Gauss, ens queda:

$$\begin{cases} x+y+z=18 \\ -x-y+2z=0 \\ y+z=14 \end{cases} \xrightarrow{f_1+f_2} \begin{cases} x+y+z=18 \\ 3z=18 \\ y+z=14 \end{cases}$$

Com que tenim un sistema esglaonat, podem resoldre'l fàcilment i obtenim $z = 6, y = 8$ i $x = 4$.
Així doncs, ha obtingut un 4 a la primera prova, un 8 a la segona i un 6 a la tercera.

a) Escriure el sistema: 0,25 punts per cada una de les dues equacions. Procediment de resolució: 0,5 punts. Trobar el valor correcte de z: 0,25 punts.

b) Escriure l'equació addicional: 0,25 punts. Procediment de resolució: 0,5 punts. Trobar els valors correctes de x i y: 0,5 punts.

---

12. PAU 2023 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 3

3.

a) Denotem per x el preu d'un termòmetre, per y el preu d'una mascareta i per z el preu d'un test d'antígens. Obtenim el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} 5x + 30y + 10z = 550 \\ x + 15y + 20z = 200 \end{cases}$$

Aplicant el mètode de Gauss obtenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 30 & 10 & 550 \\ 1 & 15 & 20 & 200 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 2 & 110 \\ 1 & 15 & 20 & 200 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 2 & 110 \\ 0 & 9 & 18 & 90 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 2 & 110 \\ 0 & 1 & 2 & 10 \end{array}\right)$$

Observem que hi ha dues files amb algun element diferent de zero, per tant el rang de la matriu del sistema és 2 i el rang de la matriu ampliada també és 2.
Com que el rang de la matriu és 2, el de l'ampliada també és 2 i hi ha 3 incògnites, el sistema és compatible indeterminat, és a dir, té infinites solucions. Per tant, no és possible donar un únic valor al preu del termòmetre, de la mascareta i del test.
Hem arribat a les equacions:

$$\begin{cases} x + 6y + 2z = 110 \\ y + 2z = 10 \end{cases}$$

Si aïllem y de la segona equació obtenim: $y = 10 - 2z$
I substituint a la primera equació

$$x + 6(10 - 2z) + 2z = 110$$

És a dir,

$$x = 50 + 10z$$

Per tant les infinites solucions es poden expressar, en funció del preu del test d'antígens z, com

$$\begin{cases} x = 50 + 10z \\ y = 10 - 2z \\ z = z \end{cases}$$

b) Si el preu del test d'antígens és de 4 €, tenim:

$$x = 50 + 10 \cdot 4 = 90$$
$$y = 10 - 2 \cdot 4 = 2$$

És a dir, el termòmetre té un preu de 90 € i la mascareta val 2 €.

a) Plantejament: 0,25 p. cada equació. Classificació del sistema: 0,25p. Resolució del sistema en funció de z: 1p.

b) Càlcul del preu de la mascareta i del termòmetre: 0,75 p.

---

13. PAU 2022 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 2

2.

a) Anomenem x, y i z la quantitat de quilòmetres recorreguts en autocar, a peu i en taxi, respectivament.

L'enunciat planteja tres condicions que es tradueixen en les equacions següents:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x+y+z}{2} \\ y = \dfrac{x+y+z}{20} \\ x = z+5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-y-z=0 \\ x-19y+z=0 \\ x-z=5 \end{cases}$$

a) Resolent pel mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -19 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 18 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 45 \end{array}\right)$$

Per tant, obtenim $z = 45$, $y = 5$ i $x = 50$. Així doncs, va fer 50 km en autocar, 5 km a peu i 45 km en taxi.

b) Sabem que l'autocar circulava a 100 km/h, en Martí caminava a 5 km/h i el taxi anava a 90 km/h. Per tant, per saber el temps total que va trigar hem de calcular:

$$50 \cdot \frac{1}{100} + 5 \cdot \frac{1}{5} + 45 \cdot \frac{1}{90} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 2 \text{ hores.}$$

En total, va trigar dues hores a completar el trajecte.

Criteris de correcció: a) Plantejament: 0,25 punts cada equació. Resolució: 1 punt. b) Plantejament: 0,5 punts. Càlcul: 0,25 punts.

---

14. PAU 2022 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 1

1.

a)

[1,75 punts]

Anomenem x, y i z les unitats elaborades de l'opció clàssica, de rams petits i de rams grans, respectivament.

A partir de les condicions de l'enunciat s'obté el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x + 3y + 6z = 200 \\ x + 2y + 3z = 135 \\ x + y + z = 85 \end{cases}$$

Aplicant el mètode de Gauss tenim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 200 \\ 1 & 2 & 3 & 135 \\ 1 & 1 & 1 & 85 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 85 \\ 1 & 2 & 3 & 135 \\ 1 & 3 & 6 & 200 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 85 \\ 0 & 1 & 2 & 50 \\ 0 & 2 & 5 & 115 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 85 \\ 0 & 1 & 2 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{pmatrix}$$

S'obté que $z = 15$, $y = 20$ i $x = 50$.

Per tant, s'han elaborat 50 unitats de l'opció clàssica, 20 rams petits i 15 rams grans.

b)

[0,75 punts]

Per saber els diners que ingressaran amb la venda de tots els rams hem de fer el producte $50 \cdot 3 + 20 \cdot 5 + 15 \cdot 10 = 150 + 100 + 150 = 400$.

S'obtindran, per tant, 400 euros de la venda de tots els rams.

Criteris de correcció: a) Plantejament del sistema: 0,25 p. cada equació. Resolució del sistema: 1 p. b) Obtenció del diners que ingressaran: 0,75 p.

15. PAU 2022 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 2

2.

a)

[1,25 punts]

Anomenem x, y, z la quantitat de monedes que hi ha a la caixa de cinquanta cèntims, d'un euro i de dos euros, respectivament.

Plantegem el sistema d'equacions lineals que es desprèn de modelitzar el que diu l'enunciat:

$$\begin{cases} x + y + z &= 40 \\ x &= 2z \end{cases}$$

Aquest sistema d'equacions lineals és compatible indeterminat amb solucions:

$$x = 2z$$

$$y = 40 - 3z$$

z paràmetre

El sistema és indeterminat i, per tant, no es pot determinar la quantitat exacta de monedes que hi ha de cada tipus.

b)

[1,25 punts]

El valor total de les monedes de la caixa és $0{,}5x + y + 2z$. Si substituïm pels valors que hem trobat a l'apartat anterior tenim $0{,}5 \cdot 2z + (40 - 3z) + 2z = 40$ euros.

Criteris de correcció:
a) Obtenció del sistema: 0,5 p. Resolució i justificació de que és un sistema indeterminat: 0,75 p.
b) Plantejament: 0,5 p. Obtenció del valor total: 0,75 p.

16. PAU 2021 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 2

2.

a) Si definim les incògnites x, y i z com el preu d'una dotzena d'ous, d'una bossa de farina d'ametlla i d'un paquet de sucre morè, respectivament, obtenim el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y = 6{,}5 \\ x + z = 3{,}5 \end{cases}$$

b) El resolem mitjançant el mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 6{,}5 \\ 1 & 0 & 1 & 3{,}5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 2{,}5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Obtenim, per tant, $x = 1{,}5$, $y = 2{,}5$ i $z = 2$. Per tant, la dotzena d'ous costa 1,5 €, la bossa de farina d'ametlla 2,5 € i el paquet de sucre morè 2 €.

Criteris de correcció: Plantejament del sistema d'equacions: 0,25 p. per cada equació. Resolució: 1 p. Obtenció del resultat final 0,75 p.

17. PAU 2021 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 3

3.

a) Denotarem per x, y i z el nombre d'homes, dones i nens, respectivament, que han assistit a la festa. Obtenim el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x + y + z = 20 \\ x + y = 3z \\ y + 1 = x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 20 \\ x + y - 3z = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

b) El resolem mitjançant el mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \\ 0 & 2 & 1 & 19 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 2 & 1 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Els canvis que hem aplicat en el primer pas han estat $(F1, F2, F3) \rightarrow (F1, F1 - F2, F1 - F3)$. Mentre que en el segon pas hem fet $(F1, F2, F3) \rightarrow (F1, F3, \frac{F2}{4})$.

Deduïm, per tant, que $z = 5$, $2y = 19 - 5$, és a dir, $y = 7$ i, finalment, $x = 20 - 5 - 7$, és a dir, $x = 8$. Per tant, han assistit a la festa 8 homes, 7 dones i 5 nens.

Criteris de correcció: Plantejament del sistema: 0,25 p. cada equació. Resolució del sistema: 1 p. Obtenció de la solució final: 0,75 p.

18. PAU 2021 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 3

3.

Considerem les variables següents:

x: import de les vendes a nivell estatal de l'any passat,

y: import de les exportacions a Europa de l'any passat,
z: import de les exportacions a països no comunitaris l'any passat.

S'obté el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + y + z = 1.800.000 \\ y = x + z \\ 0{,}95\,x + 1{,}15\,y + 1{,}1\,z = 1.950.000 \end{cases}$$

El resolem pel mètode de Gauss, multiplicant la tercera equació per 100:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1.800.000 \\ 95 & 115 & 110 & 195.000.000 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 900.000 \\ 0 & 210 & 15 & 195.000.000 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 900.000 \\ 0 & 0 & 15 & 6.000.000 \end{array}\right)$$

Per tant és un sistema compatible determinat i resolent s'obté x=500.000, $y = 900.000\ i\ z = 400.000$.

Finalment, aquest any les vendes a nivell estatal han estat de 475.000 euros, les exportacions a Europa de 1.035.000 euros i les exportacions a països no comunitaris de 440.000 euros.

Criteris de correcció: Plantejament del sistema: 0,75 p. Resolució del sistema: 1 p. Obtenció de les vendes aquest any: 0,75 p.

---

19. PAU 2021 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 5

5.

a)

En la primera prova ha consumit 17 litres per recórrer 300 km, per tant la mitjana és de 0,057 litres per km o, equivalentment, 5,7 litres per 100 km.

En la segona prova ha consumit 17,5 litres per recórrer per 350 km, per tant la mitjana és de 0,05 l per km o, equivalentment, 5 litres per 100 km.

b)

Anomenem x = litres consumits per 100 km per carretera i y = litres consumits per 100 km per ciutat. Volem calcular el consum en litres en 400 km per carretera i 150 per ciutat, per tant volem calcular: $4x + 1{,}5y$.

De les dues primeres voltes sabem que

$$\begin{cases} 2x + y = 17 \\ 3x + 0{,}5y = 17{,}5 \end{cases}$$

Resolent el sistema obtenim que x=4,5 i y=8. Per tant el consum que ens demanen és 4·4,5+1,5·8=30 litres.

Criteris de correcció: a) Plantejament: 0,25 p. Determinació de la mitjana de les dues primeres proves: 0,5 p. cadascuna. b) Plantejament del problema: 0,5 p. Obtenció de la solució: 0,75 p.

---

20. PAU 2020 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 5

5. Un triatló consta de tres segments que cal realitzar practicant tres modalitats d'esport diferents: natació, ciclisme i cursa a peu. La distància total que es recorrerà en el triatló és de 75 km. Sabem que el recorregut en bicicleta és igual a quatre vegades la distància que cal recórrer nedant i corrent conjuntament. Sabem també que si sumem 3 km a la distància que es fa corrent ens dona el mateix que cinc vegades el recorregut que es fa nedant. Determineu la distància recorreguda en cada modalitat. *[2,5 punts]*

   Anomenem x, y i z les distàncies recorregudes nedant, corrent i en bicicleta, respectivament.

   Obtenim el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x+y+z=75 \\ z=4(x+y) \\ y+3=5x \end{cases} \text{ -> } \begin{cases} x+y+z=75 \\ 4x+4y-z=0 \\ 5x-y=3 \end{cases}$$

   El resolem utilitzant el mètode de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 75 \\ 4 & 4 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ -> } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 75 \\ 0 & 0 & -5 & -300 \\ 0 & -6 & -5 & -372 \end{array}\right)$$

   I obtenim $x = 3, y = 12$ i $z = 60$.

   És a dir, les distàncies que cal recórrer són 3 km nedant, 12 km corrent i 60 km en bicicleta.

Criteris de correcció: Plantejament del sistema: 1 p. Resolució del sistema: 0,75 p. Obtenció de la solució final: 0,25 p. per cada variable.

21. PAU 2020 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

1. Un venedor d'una llibreria de vell cobra, a més a més d'un sou fix, diferents comissions depenent del tipus de llibre que ven. Cobra 1 € per cada còmic, 1,5 € per cada revista i 2 € per cada novel·la.
   Ahir, va vendre el doble de revistes que de novel·les, 5 còmics menys que revistes, i va aconseguir en total una comissió de 30 €.
   Quantes publicacions va vendre de cada tipus? *[2,5 punts]*

   Si anomenem x el nombre de còmics venuts, y el nombre de revistes venudes i z el nombre de novel·les venudes, sabem que:

$$\begin{aligned} y &= 2z \\ x &= y - 5 \\ x + 1{,}5y + 2z &= 30 \end{aligned}$$

   Per tant, hem de resoldre el sistema:

$$\begin{aligned} x - y &= -5 \\ y - 2z &= 0 \\ 2x + 3y + 4z &= 60 \end{aligned}$$

   El resolem utilitzant el mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 60 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 70 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 70 \end{array}\right)$$

   D'on obtenim que $x = 5$, $y = 10$ i $z = 5$. És a dir, s'han venut 5 còmics, 10 revistes i 5 novel·les.

Criteris de correcció: Plantejament del sistema: 1 p. Resolució del sistema: 1 p. Obtenció de la solució final: 0,5 p.

22. PAU 2020 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 5

5. En una empresa de tecnologia hi ha un total de 100 empleats dividits en tres seccions: administració, recerca i publicitat. Tots els empleats de cada secció cobren el mateix sou mensual: 2.000 euros els d'administració, 2.400 euros els de recerca i 2.800 euros els de publicitat, i la despesa total mensual en salaris de l'empresa és de 228.000 euros.
   a) Plantegeu i estudieu el sistema d'equacions associat. Justifiqueu si es pot determinar el nombre d'empleats de cada secció. *[1,25 punts]*
   b) Una reestructuració recent ha obligat a acomiadar $\frac{1}{10}$ part dels empleats d'administració, $\frac{1}{6}$ part dels de recerca i $\frac{1}{5}$ part dels de publicitat. Aquest fet ha suposat un estalvi mensual en salaris de 33.200 euros. Determineu quants empleats tenia cada secció de l'empresa abans de la reestructuració. *[1,25 punts]*

a) Considerem les variables x, y, z com el número d'empleats de les seccions d'administració, recerca i publicitat, respectivament. Obtenim el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 2.000\,x + 2.400\,y + 2.800\,z = 228.000 \end{cases}$$

que podem reescriure com

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5\,x + 6\,y + 7\,z = 570 \end{cases}$$

Aplicarem el mètode de Gauss. Prenem les variables en l'ordre donat x, y, z. Tenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 5 & 6 & 7 & 570 \end{array}\right)$$

I, aplicant el mètode de Gauss s'obté

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 2 & 70 \end{array}\right)$$

Per tant tenim que la matriu i la matriu ampliada tenen rang 2, mentre que el número d'incògnites és 3, així que es tracta d'un sistema compatible indeterminat i no poden determinar el nombre d'empleats de cada secció.

b) Plantegem el problema com abans però afegint l'equació addicional que ens dona l'enunciat:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5\,x + 6\,y + 7\,z = 570 \\ 2000 \cdot \dfrac{x}{10} + 2400 \cdot \dfrac{y}{6} + 2800 \cdot \dfrac{z}{5} = 33.200 \end{cases}$$

que reescrivim com a:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5\,x + 6\,y + 7\,z = 570 \\ 5\,x + 10\,y + 14\,z = 830 \end{cases}$$

Aplicant el mètode de Gauss tenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 5 & 6 & 7 & 570 \\ 5 & 10 & 14 & 830 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 2 & 70 \\ 0 & 5 & 9 & 330 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 2 & 70 \\ 0 & 0 & -1 & -20 \end{array}\right)$$

Podem concloure que és un sistema compatible determinat ja que, tant el rang de la matriu, com el de la matriu ampliada, com el nombre d'incògnites, és 3.
Resolent-lo s'obté la solució $x = 50$, $y = 30$ i $z = 20$. És a dir, inicialment hi havia 50 empleats d'administració, 30 de recerca i 20 de publicitat.

Criteris de correcció: a) Plantejament: 0,5 p. Justificació de que no podem determinar el nombre d'empleats de cada secció: 0,75 p. b) Plantejament: 0,25 p. Resolució i obtenció de la solució final: 1 p.

---

23. PAU 2019 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 4

4. En tres sortejos consecutius de la Lotto 6/49 hi ha hagut 51 persones que han encertat els 6 números de la combinació guanyadora en algun dels tres sortejos. El nombre de persones que van encertar la combinació guanyadora en el tercer sorteig és la meitat del total de persones que la van encertar en els dos primers sortejos junts. També sabem que el nombre de persones que van encertar la combinació guanyadora en el primer sorteig supera en 11 el total de persones que van encertar-la en el segon i en el tercer sortejos junts. Amb aquestes dades, calculeu quantes persones van encertar la combinació guanyadora de la Lotto 6/49 en cada un dels tres sortejos. [2 punts]

Anomenem x, y i z al nombre de persones que han encertat la combinació guanyadora en el primer, el segon i el tercer sorteig, respectivament.
El sistema que obtenim és el següent:

$$\begin{cases} x + y + z = 51 \\ z = \dfrac{x + y}{2} \\ x - 11 = y + z \end{cases}$$

És a dir,

$$\begin{cases} x + y + z = 51 \\ x + y - 2z = 0 \\ x - y - z = 11 \end{cases}$$

Si el resolem aplicant el mètode de Gauss tenim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 51 \\ 1 & -1 & -1 & 11 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 51 \\ 0 & 2 & 2 & 40 \\ 0 & 0 & 3 & 51 \end{array}\right),$$

d'on deduïm que $z = 17$, $y = 3$ i $x = 31$. Per tant, en el primer sorteig van encertar la combinació guanyadora 31 persones; en el segon, 3, i en el tercer, 17.

Criteris de correcció: Plantejament del sistema: 0,75 p. Resolució del sistema:1 p. Obtenció de la solució final: 0,25 p.

---

24. PAU 2019 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

1. En un estudi de mercat, 500 participants han tastat tres cafès diferents, presentats com a producte A, producte B i producte C, i han escollit quin dels tres els ha agradat més. Sabem que el producte B ha estat escollit pel doble de persones que el producte A i que el producte B l'han escollit 32 persones més que els productes A i C junts. Calculeu quantes persones han escollit cada producte. *[2 punts]*

Considerem les variables x, y i z, que representen el nombre de participants que escullen el producte A, B i C, respectivament.

Obtenim el sistema d'equacions següent

$$\begin{cases} x + y + z = 500 \\ y = 2x \\ y = x + z + 32 \end{cases}$$

que podem reescriure com

$$\begin{cases} x + y + z = 500 \\ 2x - y = 0 \\ x - y + z = -32 \end{cases}$$

Apliquem per resoldre'l el mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 500 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -32 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 500 \\ 0 & 3 & 2 & 1.000 \\ 0 & 2 & 0 & 532 \end{array}\right).$$

Es veu clarament que és suficient intercanviar la segona i la tercera columnes per tenir la matriu diagonalitzada i, per tant, podem concloure que és un sistema compatible determinat. En la resolució s'obté $x = 133$, $y = 266$ i $z = 101$.

Criteris de correcció: Plantejament del sistema: 0,75 p. Resolució del sistema: 1 p. Obtenció de la solució final: 0,25 p.

---

25. PAU 2019 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 4

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

26. PAU 2018 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 3

3. Un inversor ha obtingut un benefici de 1.500 € després d'invertir un total de 40.000 € en tres empreses diferents. Aquests beneficis es desglossen de la manera següent: la quantitat invertida en l'empresa A li ha reportat un 2 % de beneficis, la quantitat invertida en l'empresa B, un 5 %, i la quantitat invertida en l'empresa C, un 7 %. Els diners invertits en l'empresa B han estat els mateixos que en les altres dues empreses juntes. Quina va ser la quantitat invertida en cada una de les tres empreses?
[2 punts]

Anomenem x la quantitat invertida en l'empresa A, y la quantitat invertida en l'empresa B i z la quantitat invertida en l'empresa C. A partir de les condicions de l'enunciat, obtenim el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + y + z = 40.000 \\ x + z = y \\ 0{,}02x + 0{,}05y + 0{,}07z = 1.500 \end{cases}$$

Que és equivalent al sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 40.000 \\ x - y + z = 0 \\ 2x + 5y + 7z = 150.000 \end{cases}$$

El resolem mitjançant el mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 40.000 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 150.000 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 40.000 \\ 0 & -2 & 0 & -40.000 \\ 0 & 3 & 5 & 70.000 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 40.000 \\ 0 & 1 & 0 & 20.000 \\ 0 & 0 & 5 & 10.000 \end{array}\right).$$

A partir d'aquí, obtenim que $z = 2.000$ €, $y = 20.000$ € i $x = 18.000$ €.

Criteris de correcció: Plantejament del sistema: 0,5 p. Resolució del sistema: 1 p. Obtenció de la solució final: 0,5 p.

27. PAU 2018 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3

3. En Pol va quedar ahir amb uns amics en un bar i van prendre 4 refrescos, 3 entrepans i 5 boles de gelat. Tot plegat els va costar 19,50€. Dies enrere, havia anat al mateix bar amb el seu cosí Martí i per 2 refrescos, 1 entrepà i 2 boles de gelat havien pagat 8,10€. En aquest bar tots els refrescos valen el mateix, tots els entrepans tenen el mateix preu i les boles de gelat es venen també a preu únic.
   a. Avui en Pol hi ha tornat amb uns altres amics i han pres 6 refrescos, 5 entrepans i 8 boles de gelat. Expliqueu raonadament quant han pagat en total. *[1 punt]*
   b. Si 1 refresc, 1 entrepà i 1 bola de gelat costen 5,10€, quant val el refresc, l'entrepà i la bola de gelat separadament? *[1 punt]*

a) Si anomenem x, y i z respectivament el preu d'un refresc, d'un entrepà i d'una bola de gelat sabem que es compleixen les dues equacions següents:

$$\begin{Bmatrix} 4x + 3y + 5z = 19{,}50 \\ 2x + y + 2z = 8{,}10 \end{Bmatrix}$$

Ara necessitem calcular el valor de $6x + 5y + 8z$, però observem que podem descompondre $6x + 5y + 8z$ en

$$2 \cdot (4x + 3y + 5z) - 1 \cdot (2x + y + 2z) = 6x + 5y + 8z$$

Per tant, el preu serà $2 \cdot 19{,}50 - 1 \cdot 8{,}10 = 30{,}90$€.

Una altra opció és buscar la solució del sistema $\begin{Bmatrix} 4x + 3y + 5z = 19{,}50 \\ 2x + y + 2z = 8{,}10 \end{Bmatrix}$, que és un sistema compatible indeterminat amb solució:

$\begin{Bmatrix} x = 2{,}40 - \frac{t}{2} \\ y = 3{,}30 - t \\ z = t \end{Bmatrix}$ i, per tant, $6x + 5y + 8z = 6 \cdot \left(2{,}40 - \frac{t}{2}\right) + 5 \cdot (3{,}30 - t) + 8t =$
$14{,}40 - 3t + 16{,}50 - 5t + 8t = 30{,}90$€.

b) En aquest cas, tenim el sistema de tres equacions amb tres incògnites:
$\begin{Bmatrix} x + y + z = 5{,}10 \\ 4x + 3y + 5z = 19{,}50 \\ 2x + y + 2z = 8{,}10 \end{Bmatrix}$ que, si el resolem, per exemple, pel mètode de Gauss obtenim $x = 1{,}80$€, $y = 2{,}10$€ i $z = 1{,}20$€.

Criteris de correcció: a) Plantejament del sistema: 0,25 p. Obtenció de la solució per qualsevol dels mètodes possibles: 0,75 p. b) Plantejament del sistema: 0,25 p. Obtenció de la solució: 0,75 p.

28. PAU 2018 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 4

4. Considereu el sistema d'equacions $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ -x - y + 2 = 0 \end{cases}$

Justifiqueu si les afirmacions següents són certes:

a) Aquest sistema d'equacions representa dues rectes paral·leles perquè totes dues tenen pendent -1. *[1 punt]*

b) Aquest sistema és compatible determinat i la solució és $x = 1, y = 1$. *[1 punt]*

a) Les rectes son $y = 2x - 1$ que té pendent 2 i $y = -x + 2$ que té pendent -1. Per tant no són paral·leles.

b) Si resolem el sistema format per les dues equacions obtenim la solució $x = 1, y = 1$. Alternativament podem comprovar que $x = 1, y = 1$ satisfà les dues equacions.

Criteris de correcció: a) Raonament que no poden ser paral·leles: 1 p. b) Raonament que aquesta és la solució:1 p.

29. PAU 2017 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 4

4. Un grup inversor vol invertir 6.000 euros en lletres, bons i accions que tenen una rendibilitat del 10%, del 8% i del 4%, respectivament. Tenint en compte que vol obtenir una rendibilitat global del 7%:
   a. Trobeu la quantitat que ha d'invertir en lletres i en bons en funció de la quantitat invertida en accions. Quins valors pot prendre la quantitat invertida en accions sabent que les quantitats invertides en cadascun dels productes han de ser sempre més grans o iguals que zero? *[1 punt]*
   b. Quant ha d'invertir en cadascuna de les tres opcions si vol invertir en lletres tant com en els altres dos productes junts? *[1 punt]*

a) Anomenem x els euros invertits en lletres, y els euros invertits en bons i z els invertits en accions. Sabem que aquests productes tindran una rendibilitat del 10%, el 8% i el 4% respectivament. D'altra banda, si volem una rendibilitat global del 7%, tenim que el 7% de 6.000 euros = 420 euros.
Així doncs, tenim el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + y + z = 6.000 \\ 0{,}1 \cdot x + 0{,}08 \cdot y + 0{,}04 \cdot z = 420 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6.000 \\ 10 & 8 & 4 & 42.000 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6.000 \\ 0 & 2 & 6 & 18.000 \end{pmatrix}$$

Tenim, per tant, un sistema compatible indeterminat que té per solucions en funció de z: $x = -3.000 + 2z$; $y = 9.000 - 3z$; $z = z$.
Per tal que la inversió no sigui mai negativa cal que

$x \geq 0 \rightarrow z \geq 1.500$; $y \geq 0 \rightarrow z \leq 3.000$; $z \geq 0$

Per tant, la inversió en accions ha d'estar en l'interval [1.500, 3.000].

b) Si addicionalment sabem que hem d'invertir en lletres tant com en els altres dos productes junts. Tenim el sistema d'equacions

$$\begin{cases} x + y + z = 6.000 \\ 0{,}1 \cdot x + 0{,}08 \cdot y + 0{,}04 \cdot z = 420 \\ x = y + z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6.000 \\ 10 & 8 & 4 & 18.000 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6.000 \\ 0 & 2 & 6 & 18.000 \\ 0 & 0 & 4 & 12.000 \end{pmatrix}$$

Per tant, la solució del sistema ve donada per $x = 3.000$, que són els euros que hem d'invertir en lletres, $y = 0$, no hem d'invertir res en bons i, finalment, $z = 3.000$, que són els euros que hem d'invertir en accions.

Criteris de correcció: a) Resolució del sistema: 0,5 p. Determinació de l'interval de les accions: 0,5 p. b) Plantejament del sistema: 0,5 p. Resolució del sistema: 0,5 p.

30. PAU 2017 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4

4. Tenim unes quantes monedes d'un euro distribuïdes en tres piles. Passem dotze monedes de la tercera pila a la segona i, a continuació, en passem deu de la segona a la primera. Un cop fet això, les tres piles tenen la mateixa quantitat de monedes.
   a) Amb aquestes dades, podem determinar la quantitat de monedes que hi havia inicialment en cada pila? Raoneu la resposta. *[1 punt]*
   b) Esbrineu la quantitat de monedes que hi havia inicialment a cada pila si sabem que en total hi ha 51 monedes. [1 punt]

Anomenem x la quantitat de monedes que hi havia inicialment en la primera pila, y la quantitat de monedes que hi havia inicialment en la segona pila i, finalment, z la quantitat de monedes que hi havia inicialment en la tercera pila.
Un cop fet el traspàs de monedes descrit en l'enunciat, el contingut de cada pila és:
Primera pila: $x + 10$ monedes.
Segona pila: $y + 2$ monedes.
Tercera pila: $z - 12$ monedes.

a) Sabem que la quantitat de monedes de cada pila és la mateixa, per tant:

$$\begin{cases} x + 10 = y + 2 \\ x + 10 = z - 12 \end{cases}$$

Ordenant el sistema tenim:

$$\begin{cases} x - y = -8 \\ x - z = -22 \end{cases}$$

I resolent-lo pel mètode de Gauss tenim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & -8\\ 1 & 0 & -1 & -22\end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & -8\\ 0 & 1 & -1 & -14\end{array}\right)$$

Es tracta, per tant, d'un sistema compatible indeterminat. La solució ve expressada en funció d'un paràmetre. Prenent z com a paràmetre i aïllant adequadament, la solució és:

$$\begin{cases} x = z - 22 \\ y = z - 14 \\ z \end{cases}$$

Per tant, no podem determinar la quantitat de monedes que hi havia inicialment.

b) Si a més sabem que en total hi ha 51 monedes, aleshores tenim una equació més:

$$\begin{cases} x - y = -8 \\ x - z = -22 \\ x + y + z = 51 \end{cases}$$

Resolent per Gauss tenim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & -8\\ 1 & 0 & -1 & -22\\ 1 & 1 & 1 & 51\end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & -8\\ 0 & 1 & -1 & -14\\ 0 & 2 & 1 & 59\end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & -8\\ 0 & 1 & -1 & -14\\ 0 & 0 & 3 & 87\end{array}\right)$$

De la tercera equació, $3z = 87$, és a dir, $z = 29$.
De la segona equació, $y - z = -14$, és a dir, $y = 15$.
De la primera equació, $x - y = -8$, és a dir, $x = 7$.
Per tant, inicialment en la primera pila hi havia 7 monedes, en la segona pila hi havia 15 monedes i en la tercera pila hi havia 29 monedes.

Alternativament, com que les tres piles tenen la mateixa quantitat de monedes, a cada una n'hi haurà 17 i poden obtenir la solució resolent

$$\begin{cases} x + 10 = 17 \\ y + 2 = 17 \end{cases}$$

sistema compatible indeterminat: 0,5 p. b) Plantejament del sistema: 0,25 p. Resolució

31. PAU 2017 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 2

Roc, en Martí i en Guiu decideixen fer la feina entre tots tres: en Martí reparteix un

20 % del total; en Guiu reparteix 100 fulls més que en Roc, i entre en Roc i en Martí en reparteixen 850.

a. Calculeu el nombre de fulls que ha repartit cadascun d'ells. [1 punt]
b. Un cop acabada la feina, decideixen dividir els guanys entre tots tres, proporcionalment als fulls repartits. Segons aquest criteri, quants diners cobrarà en Guiu, quants en cobrarà en Roc i quants en Martí? [1 punt]

a) Suposem que x, y i z són respectivament el nombre de fulls repartits per en Roc, en Martí i en Guiu.

Les dades del problema es tradueixen algebraicament en el sistema d'equacions:

$$\left.\begin{array}{l} y = 0{,}2 \cdot (x + y + z) \\ z = x + 100 \\ x + y = 850 \end{array}\right\}$$

Ara resolem per Gauss, arreglant i simplificant les equacions:

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}2x - 0{,}8y + 0{,}2z = 0 \\ x \quad - \quad z = -100 \\ x + y \quad = 850 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x - 4y + z = 0 \\ x \quad - \quad z = -100 \\ x + y \quad = 850 \end{array}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -100 \\ 1 & 1 & 0 & 850 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \rightarrow f_2 - f_1 \\ \rightarrow f_3 - f_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -100 \\ 0 & 5 & -1 & 850 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow 4f_3 - 5f_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -100 \\ 0 & 0 & 6 & 3900 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x - 4y + z = 0 \\ 4y - 2z = -100 \\ 6z = 3900 \end{array}\right\}$$

I obtenim $z = 650 \quad y = 300 \quad x = 550$

Per tant, en Roc va repartir 550 fulls, en Martí en va repartir 300 i en Guiu, 650.

b) En total han repartit $x + y + z = 550 + 300 + 650 = 1500$ fulls. L'empresa ha pagat per la feina 225 euros.

Calculem a quant es paga el full repartit: $225€ : 1500\ fulls = 0{,}15\ {}^{€}/_{full}$

Per tant, en Roc cobrarà 550 · 0,15 = 82,5 euros, en Martí cobrarà 300 · 0,15 = 45 euros i, finalment, en Guiu 650 · 0,15 = 97,5 euros.

Criteris de correcció: a) Plantejament del sistema: 0,5 p. Resolució: 0,5 p. b) Càlcul del preu obtingut per full repartit: 0,5 p. Solució final: 0,5 p.

32. PAU 2016 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 1

1. La Maria té el doble dels diners que tenen en Pol i la Júlia junts. En Pol té la sisena part de diners que la Maria. La Júlia té el doble de diners que en Pol. La Maria té el triple dels diners que la Júlia.

   (a) Amb aquestes dades, podem saber quants diners tenen cadascun d'ells? Trobeu el conjunt de solucions possibles. (1,5 punts)

   Si anomenem x als diners que té la Maria, y els que té en Pol i z els de la Júlia, les condicions del problema es tradueixen per

   $$\left.\begin{array}{rcl} x & = & 2(y+z) \\ y & = & x/6 \\ z & = & 2y \\ x & = & 3z \end{array}\right\}$$

   que, en resoldre'l per qualsevol mètode, dóna com a solució $x = 6y$, $z = 2y$. Per tant, el sistema té infinites solucions.

   (b) Si en Pol té 35 euros, quants diners tenen la Maria i la Júlia? (0,5 punts)

   Substituint y per 35, obtenim que la Maria té 210 euros i la Júlia en té 70.

33. PAU 2016 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 4

4. (a) La matriu ampliada d'un sistema de tres equacions amb tres incògnites és:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

   Justifiqueu, sense resoldre'l, si el sistema és incompatible, compatible indeterminat, o determinat. (1 punt)

   La matriu és de rang 3 perquè és triangular. Per tant, el sistema és compatible determinat.

   (b) Considereu ara la matriu d'un altre sistema de tres equacions amb tres incògnites:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

   Justifiqueu si és incompatible o compatible i, en aquest darrer cas, resoleu-lo. (1 punt)

   El rang de la matriu associada i el de la matriu ampliada és 2. Per tant, el sistema és compatible indeterminat, i la solució és $x = 2 - z, \quad y = 2z - 1, \quad z = z$.

34. PAU 2016 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 3

3. Sigui el sistema d'equacions

$$\left.\begin{array}{rcl} x-y+z &=& 0 \\ 3x+4y-5z &=& 6 \\ x-y &=& 2 \end{array}\right\}$$

(a) Justifiqueu si és compatible determinat. (1 punt)

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -8 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$. Tant la matriu associada com l'ampliada són de rang 3. Per tant, el sistema és compatible determinat.

(b) Resoleu el sistema format per les dues primeres equacions. (1 punt)

De $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -8 & 6 \end{array}\right)$ obtenim $x = \dfrac{y+6}{8}$, $y = y$, $z = \dfrac{7y-6}{8}$. Si parametritzem per z obtenim $x = \dfrac{z+6}{7}$, $y = \dfrac{8z+6}{7}$, $z = z$.

35. PAU 2016 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 5

5. La butlleta guanyadora d'una loteria està formada per tres nombres. Sabem que la suma del primer i el segon excedeix en dues unitats al tercer; que el primer nombre menys el doble del segon és deu unitats menor que el tercer, i que la suma dels tres nombres és 24. Quina és la butlleta guanyadora? (2 punts)

Si anomenem als tres nombres x, y i z respectivament, les dades del problema es tradueixen com:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y-2 &=& z \\ x-2y+10 &=& z \\ x+y+z &=& 24 \end{array}\right\}$$

que, resolt per qualsevol mètode, dóna com a solucions $x = 9$, $y = 4$, $z = 11$.

36. PAU 2016 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 2

2. Dues famílies van a una cafeteria. La primera família pren 1 refresc, 3 cafès i 7 magdalenes, i paga un total d'11,75 €. La segona família demana 1 refresc, 4 cafès i 10 magdalenes, i paga per tot plegat 15,5 €.

a. Digueu, raonadament, si és possible saber el preu d'un cafè, el que costa un refresc i el que val una magdalena. [1 punt]

Si anomenem R el preu del refresc, C el que costa un cafè i M el preu de la magdalena, les dades del problema es tradueixen en les equacions següents:

$$\left.\begin{array}{l} R+3C+7M=11{,}75 \\ R+4C+10M=15{,}5 \end{array}\right\},$$

En tenir menys equacions que incògnites, el sistema serà indeterminat. Per tant, amb aquestes dades no n'hi ha prou per a determinar els preus.

b. Calculeu quant ha de pagar una família que prengui un refresc, un café i una magdalena. [1 punt]

Si resolem el sistema, per qualsevol mètode, obtenim

$$M=\lambda, C=3{,}75-3\lambda, R=0{,}5+2\lambda.$$

Per tant, sumant les tres equacions tenim que M + C + R = 4,25

Un cafè, un refresc i una magdalena costaran per tant, 4,25 €.

---

37. PAU 2015 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 1

1. Una persona decideix invertir un total de 60000 € repartits en tres entitats d'estalvi diferents: A, B i C. Aquesta persona decideix que la quantitat invertida a l'entitat A sigui la meitat de la quantitat total invertida a les entitats B i C. A més, sabem que l'entitat A li ha assegurat una rendibilitat del 5%, l'entitat B una rendibilitat del 10% i l'entitat C una rendibilitat del 2%. Calculeu les quantitats invertides a cada entitat d'estalvi si sabem que aquest inversor obtindrà uns beneficis totals de 4200 €. [2 punts]

   Si anomenem x, y, z les quantitats invertides respectivament en les entitats A, B i C, les dades de l'enunciat es tradueixen en

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=60000 \\ x=\dfrac{y+z}{2} \\ 0{,}05x+0{,}1y+0{,}02z=4200 \end{array}\right\} \text{ o bé } \left.\begin{array}{r} x+y+z=60000 \\ 2x-y-z=0 \\ 5x+10y+2z=420000 \end{array}\right\}$$

   que, en resoldre'l per qualsevol mètode, ens dóna x = 20000, y = 30000, z = 10000. Ha invertit 20000 € a l'entitat A, 30000 € a la B i 10000 € a la C.

---

38. PAU 2015 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 2

2. En resoldre un sistema lineal de tres equacions amb tres incògnites, *x, y, z*, hem trobat que les solucions compleixen les condicions següents:
   - La suma de les solucions és 6.
   - La segona és la mitjana aritmètica de les altres dues.
   - El valor de la tercera és la suma dels valors de les altres dues.

   Escriviu el sistema d'equacions que satisfà les condicions anteriors, resoleu-lo i indiqueu si és compatible determinat o indeterminat. *[2 punts]*

   El sistema és aquest: $\left.\begin{array}{r} x+y+z=6 \\ y=\dfrac{x+z}{2} \\ z=x+y \end{array}\right\}$. Es pot resoldre directament, o pel mètode de Gauss, i obtenim x = 1, y = 2, z = 3. Per tant, el sistema és compatible determinat.

39. PAU 2015 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 1

1. El mes de gener passat, en Joan, la Carla i la Laura van invertir en borsa. La Carla va invertir el doble que la Laura. Aquell mes, en Joan i la Carla van tenir uns guanys del 30 %, mentre que la Laura va tenir unes pèrdues del 10 %. De resultes d'això, van obtenir conjuntament uns guanys del 20 %. Van acordar tornar a invertir el febrer, incrementant cadascú un 10 % les seves inversions inicials. Si el mes de febrer van invertir entre tots tres 770 €, quina quantitat havia invertit cadascú el mes de gener? [2 punts]

   Anomenarem x, y z, les inversions al mes de gener d'en Joan, la Carla i la Laura, respectivament. Les dades del problema es tradueixen, doncs, en el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{array}{rcl} y & = & 2z \\ 0,3x+0,3y-0,1z & = & 0,2(x+y+z) \\ 1,1(x+y+z) & = & 770 \end{array}\right\}$$

   que, en resoldre'l per qualsevol mètode, ens dóna x = 175, y = 350, z = 175. Per tant, en Joan va invertir 175 €, la Carla 350 € i la Laura 175 €.

---

40. PAU 2014 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 1

1. Si un venedor d'articles de luxe descompta el 20% sobre el preu de venda d'un article, guanya 1.848 € sobre el preu de cost; si descompta el 50%, perd 420 €.
   a. Calculeu el preu de cost i el preu de venda de l'article. *[1 punt]*
   b. Quin percentatge aplica sobre el preu de cost per a calcular el preu de venda? *[1 punt]*

   a. Anomenarem x al preu de venda de l'article, i y al preu de cost. Les dades del problema es tradueixen com:

$$\left.\begin{array}{l} 0.8x = y + 1848 \\ 0.5x = y - 420 \end{array}\right\}$$

   que dóna com a solució x = 7560, y = 4200; el preu de cost va ser 4200 €, mentre que el preu de venda va ser de 7560 €.

   b. $\dfrac{7560-4200}{4200} = 0.8$ Aplica un percentatge del 80%.

---

41. PAU 2014 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 4

4. El propietari d'un bar ha comprat refrescos, cervesa i vi per un total de 5000 €, sense impostos. El vi val 600 € menys que els refrescos i la cervesa plegats. Si tenim en compte que pels refrescos ha de pagar un IVA del 6%, per la cervesa d'un 12% i pel vi d'un 30% aleshores la factura total, amb impostos inclosos, puja a un valor de 5924 €. Calculeu quant ha pagat, sense IVA, per cada tipus de beguda. *[2 punts]*

Si anomenem *x* la inversió en refrescos, *y* la inversió en cervesa i *z* la inversió en vi, les condicions de l'enunciat permeten escriure el sistema d'equacions següents:

$$\begin{cases} x+y+z=5000 \\ z=x+y-600 \\ 0{,}06x+0{,}12y+0{,}3z=924 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=5000 \\ x+y-z=600 \\ x+2y+5z=15400 \end{cases}$$

Que si el resolem per Gauss ens dóna la solució:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 5000 \\ 1 & 1 & -1 & 600 \\ 1 & 2 & 5 & 15400 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 5000 \\ 0 & 0 & 2 & 4400 \\ 0 & 1 & 4 & 10400 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=5000 \\ 2z=4400 \\ y+4z=10400 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1200\,€ \\ y=1600\,€ \\ z=2200\,€ \end{cases}$$

---

42. PAU 2014 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 1

1. En Pol, la Júlia i la Maria han comprat un regal. La Júlia ha gastat la meitat que la Maria, i en Pol n'ha gastat el triple que la Júlia.
   a. Expliqueu raonadament si amb aquestes dades en tenim prou per a determinar quant ha gastat cadascun d'ells. *[1 punt]*
   b. Si a més ens diuen que entre tots tres han gastat 63 €, quant ha gastat cadascú? *[1 punt]*

a. Anomenarem x als diners que ha gastat en Pol, y als que ha gastat la Júlia i z als que ha gastat la Maria. Les dades es tradueixen amb el sistema

$$\begin{cases} y=\dfrac{z}{2} \\ x=3y \end{cases}.$$

Tenim tres incògnites i dues equacions. Per tant, no podem determinar el que ha gastat cadascú.

b. Ara el sistema d'equacions es converteix en:

$$\begin{cases} y=z/2 \\ x=3y \\ x+y+z=63 \end{cases},$$

que té com a solucions x = 31,5 , y = 10,5 , z = 21. Per tant, en Pol ha gastat 31,5 €, la Júlia ha gastat 10,5 € i la Maria ha gastat 21 €.

---

43. PAU 2014 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 6

6. Un botiguer vol determinar la quantitat de bitllets de 5 €, 10 € i 20 € que ha de tenir a la seva botiga per atendre millor els seus clients. En total vol tenir 90 bitllets i 1375 € a la caixa. A més, s'ha adonat que li convé tenir el doble de bitllets de 20 € que de 5 € i 10 € junts. Quants bitllets haurà de tenir de cada classe? *[2 punts]*

   Si anomenem x al nombre de bitllets de 5 €, y al nombre de bitllets de 10 € i z al nombre de bitllets de 20 €, les dades del problema es tradueixen en el sistema:

$$\left.\begin{array}{c} x+y+z=90 \\ 5x+10y+20z=1375 \\ z=2(x+y) \end{array}\right\}$$

   que, resolt pel mètode que vulguem, ens dóna x = 25, y = 5, z = 60. Per tant, caldrà que tingui 25 bitllets de 5 €, 5 bitllets de 10 € i 60 bitllets de 20 €,

---

44. PAU 2013 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 2

2. La Júlia, en Pol i la Maria han anat a comprar fruita. La Júlia ha comprat un kilograms de pomes, dos de préssecs i tres de taronges, i ha pagat 9 €. En Pol ha comprat dos kilograms de pomes i quatre de préssecs, i ha pagat 12 €. La Maria, en canvi, ha comprat quatre kilograms de pomes i dos de taronges, i ha pagat 8 €. Calculeu el preu del kilogram de cadascuna de les fruites. *[2 punts]*

Anomenarem x al preu per quilo de pomes, y al de préssecs i z al de taronges. La traducció algebraica de l'enunciat serà el sistema d'equacions:

$$\left.\begin{array}{c} x+2y+3z=9 \\ 2x+4y=12 \\ 4x+2z=8 \end{array}\right\}$$

En resoldre'l per qualsevol mètode obtenim x = 1.5, y = 2.25, z = 1. Per tant, les pomes van a 1.50 €/Kg, els préssecs a 2.25 €/Kg i les taronges a 1 €/Kg.

Criteris de correcció: Plantejar el problema: 1 p. Resolució: 0.5 p. Resposta al problema: 0.5 p.

45. PAU 2013 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 1

1. He anat a una botiga i he decidit comprar un pantaló, una camisa i unes sabates. Si faig la compra avui, em costarà tot plegat 120 €. A més, actualment, la camisa i les sabates costen, plegades, el doble del pantaló. Si m'espero una setmana, el pantaló i les sabates tindran un descompte del 20%, mentre que la camisa només en tindrà del 10%. D'aquesta manera pagaré 99 €. Quin és el preu inicial de cada article? *[2 punts]*

Anomenarem x al preu inicial del pantaló, y al de la camisa i z al de les sabates. Les dades del problema ens porten al sistema;

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=120 \\ y+z=2x \\ 0.8x+0.9y+0.8z=99 \end{array}\right\}$$

que, una vegada resolt per qualsevol mètode, dóna com a solució x = 40, y = 30, z = 50.
Per tant, el preu inicial del pantaló era de 40€, el de la camisa era de 30€ i les sabates valien 50€.

---

46. PAU 2012 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 3

3. Una botiga ven llaunes de beguda a 0,6 € la llauna, però si comprem un paquet de sis llaunes ens cobren 3 €.
   a. Quin és el percentatge d'estalvi en comprar un paquet respecte a la compra de sis llaunes soltes? *[1 punt]*
   b. En una setmana la botiga ha venut 240 llaunes, i ha ingressat 132,6 €. Quants paquets de sis llaunes ha venut? *[1 punt]*

a. 6 llaunes per separat costen 6 · 0,6 = 3,6 €. L'estalvi per cada paquet és, per tant, de 0,6 € respecte de 3,6 €. En tant per cent, $\frac{0,6 \cdot 100}{3,6} = 16,6\%$.

b. Suposem que ha venut x paquets i y llaunes. Aleshores el sistema serà:

$$\left.\begin{array}{r} 6x+y=240 \\ 3x+0,6y=132,6 \end{array}\right\}.$$

que, una vegada resolt, ens dóna x = 19, y = 126. Per tant, han venut 19 paquets i 126 llaunes soltes.

47. PAU 2012 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4

5. Una empresa cinematogràfica disposa de tres sales, A, B i C. Els preus d'entrada a aquestes sales són de 7, 8 i 9 €, respectivament. Un dia determinat la recaptació conjunta de les tres sales va ser de 1520 €, i el nombre total d'espectadors va ser de 200. Si s'haguessin intercanviat els espectadors de les sales A i B, la recaptació total s'hauria incrementat en 20 €. Calculeu el nombre d'espectadors que va acudir a cada una de les sales. *[2 punts]*

Si anomenem x, y, z el nombre d'espectadors de les sales A, B i C respectivament, obtindrem el sistema:

$$\left.\begin{array}{c} 7x+8y+9z=1520 \\ x+y+z=200 \\ 8x+7y+9z=1540 \end{array}\right\}$$

que, una vegada resolt per qualsevol mètode, dóna com a solució x = 100, y = 80, z = 20. Per tant, la sala A va estar ocupada per 100 espectadors, la B per 80 i la C per 20 espectadors.

48. PAU 2012 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 6

6. En Joan, en Pere i en Marc tenen, entre els tres, seixanta-tres anys. Si en Joan tingués tres anys menys, la seva edat seria el doble de les edats d'en Pere i en Marc junts. Si en Pere tingués un any més, la seva edat seria la meitat de la d'en Marc. Quina és l'edat actual de cadascun d'ells? *[2 punts]*

El sistema que es dedueix de les dades és, si anomenem J, P, M les respectives edats:

$$\left.\begin{array}{l} J+P+M=63 \\ J-3=2(P+M) \\ P+1=\dfrac{1}{2}M \end{array}\right\}.$$

Ordenant les incògnites i resolent el sistema pel mètode de Gauss obtindrem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 63 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 63 \\ 0 & -3 & -3 & -60 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 63 \\ 0 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -3 & -42 \end{array}\right).$$

D'aquí obtenim de seguida J = 43, P = 6, M = 14, que són les edats respectives d'en Joan, en Pere i en Marc.

49. PAU 2011 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 3

3.

a. Per qualsevol de les maneres obtenim les equacions següents de les tres rectes:

i. Recta AB: $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$.

ii. Recta BC: $y = -\frac{4}{3}x + \frac{20}{3}$.

iii. Recta AC: x = 2

b. Com que les tres rectes formen un triangle, no hi ha cap valor comú a les tres: el sistema és incompatible. En conseqüència, el rang de la matriu associada és 2 i el rang de la matriu ampliada és 3.

50. PAU 2011 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

1.

Anomenarem x, y, z als preus de compra de cada immoble. Amb aquestes incògnites, les dades dels problema es tradueixen algebraicament en el sistema:

$$\left.\begin{array}{c} x+y+z=2 \\ 0{,}2x+0{,}5y+0{,}25z=0{,}6 \\ 0{,}8x+0{,}9y+0{,}85z=1{,}7 \end{array}\right\}.$$

Per a facilitar la resolució del sistema multiplicarem per 10 la segona i la tercera equacions. El sistema queda així:

$$\left.\begin{array}{c} x+y+z=2 \\ 2x+5y+2{,}5z=6 \\ 8x+9y+8{,}5z=17 \end{array}\right\},$$

que resoldrem pel mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 2{,}5 & 6 \\ 8 & 9 & 5{,}5 & 17 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0{,}5 & 2 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0{,}5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{c} x+y+z=2 \\ 3y+0{,}5z=2 \\ z=1 \end{array}\right\}$$

que, substituint, ens dóna la solució del sistema: x = 1/2, y = 1/2, z = 1. La resposta a la pregunta és que els preus de compra dels immobles han estat de 500.000 euros els dos primers i 1 milió d'euros el tercer immoble.

51. PAU 2011 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 5

5.

a. Aplicant Gauss tindrem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 3 & -4 & -5 \end{array}\right)$$

On ja es veu que les matrius associada i ampliada són de rang 2. Per tant, el sistema és compatible indeterminat. La seva solució és:

$$x = \frac{4+z}{3}, y = \frac{4z-5}{3}, z = z \ .$$

b. $x + y + z = 5 \to z = 2, y = 1, x = 2$.

52. PAU 2010 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 1

1. Quan sumem 2 unitats al denominador d'una fracció, la nova fracció val 1 unitat. En canvi, si a la fracció original sumem 3 unitats al seu numerador, la fracció val 2 unitats. Determineu la fracció original.

Anomenarem la fracció cercada $\frac{x}{y}$. Les condicions del problema significaquen

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{y+2} = 1 \\ \dfrac{x+3}{y} = 2 \end{array}\right\}$$ que, una vegada resolt el sistema, ens dóna x = 7, y = 5. Per tant, la fracció que ens demanaven és $\frac{7}{5}$.

53. PAU 2010 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3

Pregunta 3

Cada llapis A costa 50 €. Per tant, cada llapis B costa $\frac{90}{100} \cdot 50 = 45$ €, i cada llapis C costa $\frac{60}{100} \cdot 50 = 30$ €. Si anomenem x al nombre de llapis de tipus A que han venut, y al nombre de llapis de tipus B i z al nombre de llapis de tipus C, les dades del problema es tradueixen algebraicament com:

$$\left.\begin{array}{c} x+y+z=225 \\ 50x+45y+30z=10.500 \\ x=2(y+z) \end{array}\right\}$$ o bé, $$\left.\begin{array}{c} x+y+z=225 \\ 50x+45y+30z=10.500 \\ x-2y-2z=0 \end{array}\right\}$$. Dividint per 5 la segona equació i resolent pel mètode de Gauss tindrem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 225 \\ 10 & 9 & 6 & 2100 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 40 \\ 0 & 1 & 4 & 150 \\ 0 & 3 & 3 & 225 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 225 \\ 0 & 1 & 4 & 150 \\ 0 & 0 & 9 & 225 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{c} x+y+z=225 \\ y+4z=150 \\ 9z=225 \end{array}\right\}$$

d'on obtenim z = 25, y = 50, x = 150. Per tant, la botiga ha venut 150 llapis de tipus A, 50 de tipus B i 25 de tipus C.

54. PAU 2010 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 6

Pregunta 6

a.
Si el sistema ha de ser incompatible, la recta r' ha de ser de la forma $x+2y=k$. Si ha de passar per l'origen, cal que sigui k = 0. Les rectes r i r' són paral·leles.

b.
Si el sistema és compatible indeterminat significa que té tota una recta de solucions: les rectes r i s són, per tant, la mateixa recta.

55. PAU 2010 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 1

Pregunta 1

Anomenarem x al nombre d'ampolles d'aigua, y al nombre d'ampolles de llet i z al nombre d'ampolles de suc que hem comprat. Aleshores les dades del problema es tradueixen en:

$$\left.\begin{array}{c} x+y+z=40 \\ 0{,}5x+y+1{,}5z=38 \\ x+0{,}5y+1{,}5z=34 \end{array}\right\}.$$

Resolent-lo:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 40 \\ 0{,}5 & 1 & 1{,}5 & 38 \\ 1 & 0{,}5 & 1{,}5 & 34 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 40 \\ 0 & 1 & 2 & 36 \\ 0 & -0{,}5 & 0{,}5 & -6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc} 1 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 36 \\ 0 & 0 & 3 & 24 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{c} x+5y+2z=2 \\ y+2z=36 \\ 3z=24 \end{array}\right\}$$

que, una vegada resolt, ens dóna x = 12, y = 20 , z = 8, és a dir, hem comprat 12 ampolles d'aigua, 20 de llet i 8 de suc de fruites.

56. PAU 2010 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 1

Pregunta 1

a.

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc} 1 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc} 1 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{c} x+5y+2z=2 \\ -6y-3z=0 \end{array}\right\}.$$

Aïllant obtenim la solució general en funció de z:

$$\left.\begin{array}{c} x=\frac{1}{2}z+2 \\ y=-\frac{1}{2}z \end{array}\right\}.$$

b.
Si fem z = 2 obtenim x = 3, y = -1.

57. PAU 2009 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 2

2. Digueu si un sistema de dues equacions amb tres incògnites pot ser incompatible. Justifiqueu la resposta i, si escau, exemplifiqueu-ho. [2 punts]

Puntuació: Posar un bon exemple 1.5 punts; raonament 0.5 punts. Total 2 punts.

Solució:

Un sistema amb més d'una equació pot ser incompatible, independentment del nombre d'incògnites. Només cal que hi hagi, per exemple, dues equacions amb termes de les incògnites iguals i els termes independents deferents. Aleshores, cap valor de les incògnites satisfarà ambdues equacions.

Exemple:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ x+y+z & = & 2 \end{array}\right\}$$

58. PAU 2009 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 4

4. Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{array}{rcl} 3x-y+2z & = & 0 \\ x-2y+z & = & 0 \\ x+3y & = & 0 \end{array}\right\}.$$

a) Expliqueu, raonadament, quantes solucions té. [1 punt]
b) Trobeu una solució amb $z=5$. [1 punt]

Solució:

a) És un sistema homogeni. Per tant sempre té almenys la solució trivial $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. En aquest cas, resolent per Gauss tenim:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -10 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

I per tant té una infinitat de solucions, depenent del valor de z.

$$-5y = -z; \quad y = \frac{1}{5}z;$$

$$x = -3y; \quad x = -\frac{3}{5}z;$$

b) Per $z=5$, resulta $\boxed{y=1, \quad x=-3}$.

59. PAU 2009 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 4

4. Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y & = & 1 \\ px+2y & = & -2 \end{array}\right\}.$$

a) Discutiu el sistema segons els valors del paràmetre p. [1 punt]
b) Resoleu-lo per a $p=5$. [1 punt]

Solució:

a) Resolent per Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ p & 2 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-p & -2-p \end{array}\right).$$

Per tant, si $p=2$ és incompatible i altrament és compatible determinat.

b) Per $p=5$ la matriu esdevé:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -7 \end{array}\right),$$

I per tant la solució és $y=\frac{7}{3},\ x=-\frac{4}{3}$.

60. PAU 2009 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 6

6. Fa un any, una persona va invertir 12000 € en accions de tres empreses, que anomenarem A, B i C. Ara, les accions de l'empresa A han augmentat de valor en un 25%, les de l'empresa B han augmentat en un 10% i, en canvi, les de l'empresa C han perdut un 15% del seu valor. Si ara vengués totes les accions, no obtindria ni pèrdues ni beneficis. Sabent que va invertir en les accions de l'empresa C el mateix que en les altres dues juntes, calculeu la quantitat de diners que va invertir en accions de cada empresa. [4 punts]

Solució:

Anomenant x, y, z les quantitats invertides en les respectives accions A,B,C, les condicions són:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 12000 \\ 0,25x+0,1y-0,15z & = & 0 \\ x+y-z & = & 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 12000 \\ 5x+2y-3z & = & 0 \\ x+y-z & = & 0 \end{array}\right\}$$

Resolent per Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12000 \\ 5 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12000 \\ 0 & -3 & -8 & -60000 \\ 0 & 0 & -2 & -12000 \end{array}\right),$$

D'on resulta $z = 6000$ €, $y = 4000$ €, $x = 2000$ €.

Alternativament, de la primera i tercera equació s'obté directament $z = 6000$, i el sistema llavors és molt més senzill.

61. PAU 2009 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 2

2. Un botiguer compra 10 televisors i 6 equips de música. D'acord amb el preu marcat hauria de pagar 10480 €. Com que paga al comptat, li fan un descompte del 5% en cada televisor i del 10% en cada equip de música, i només ha de pagar 9842 €. Quin és el preu marcat de cada televisor i de cada equip de música? [2 punts]

Solució: Siguin x i y els preus marcats dels televisors i equips de música, respectivament. Traduint les condicions a equacions tenim:

$$\left.\begin{array}{rcl} 10x+6y & = & 10480 \\ 10\cdot 0.95x+6\cdot 0.9y & = & 9842 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{rcl} 10x+6y & = & 10480 \\ 9.5x+5.4y & = & 9842 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{rcl} 5x+3y & = & 5240 \\ 5x+6y & = & 6380 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{rcl} 5x+3y & = & 5240 \\ 0x+3y & = & 1140 \end{array}\right\}$$

D'on resulta $y = 380$ i $x = 820$.

62. PAU 2009 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 4

4. Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{array}{l} x-2y+3z=3 \\ -x+y+2z=1 \\ 7x-10y+z=a \end{array}\right\}$$

a) Digueu per a quins valors del paràmetre a el sistema és incompatible. [1 punt]

b) Resoleu el sistema per al valor de a per al qual el sistema és compatible i trobeu-ne una solució entera. [1 punt]

Solució: Resolent per Gauss tenim:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 7 & -10 & 1 & a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & -20 & a-21 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & a-5 \end{array}\right)$$

a) Per tant, el sistema és incompatible per $a \neq 5$.

b) Per $a=5$ el sistema resultant és:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \end{array}\right).$$

La solució general és $y=-4+5z$, $x=3-3z+2y=-5+7z$. Per a qualsevol valor enter de z s'obté una solució (x,y,z) entera. Per exemple, per a $z=1$ obtenim la solució entera positiva: $(x,y,z)=(2,1,1)$.

63. PAU 2008 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 2

2. Una persona va invertir 6000 € comprant accions de dues empreses, A i B. Al cap d'un any, el valor de les accions de l'empresa A ha pujat un 5 % i, en canvi, el valor de les accions de l'empresa B ha baixat un 10 %. Tot i així, si vengués ara les accions guanyaria 150 €. Determineu quants diners va invertir en accions de cada empresa. [2 punts]

Puntuació: Plantejament 1 punt; solució 1 punt. Total 2 punts.

Solució: Anomenant x, y als imports invertits en accions de les empreses A i B tenim:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y & = & 6000 \\ 0.05x-0.1y & = & 150 \end{array}\right\}$$

Resolent pel mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 6000 \\ 0.05 & -0.1 & 150 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 6000 \\ 0 & -0.15 & -150 \end{array}\right),$$ d'on resulta $y=1000$; $x=5000$.

Evidentment si es resol per un altre mètode puntuarà igual.

64. PAU 2008 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 5

PROBLEMES

5. Considereu el sistema d'equacions lineals següent

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+3z & = & k \\ 2y+z & = & 0 \\ x+3y+k^2z & = & 2 \end{array}\right\}.$$

a) Discutiu el sistema en funció del paràmetre k. [2 punts]

b) Determineu la solució del sistema pels valors de k que fa que el sistema sigui indeterminat. [1 punt]

c) Doneu la solució per a $k=1$. [1 punt]

Puntuació: Apartat a) 2 punts si es distingeixen correctament els tres casos i el seus caràcters; apartat b) 1 punt; apartat c) 1 punt. Total 4 punts.

Solució: a) Resolent pel mètode de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & k \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & k^2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & k \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & k^2-3 & 2-k \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & k \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k^2-4 & 2-k \end{array}\right)$$

Per a $k \notin \{-2,2\}$ el sistema és compatible determinat.

Per $k=-2$ la darrera equació fa el sistema incompatible.

Per $k=2$ la darrera equació es cancel·la i el sistema esdevé compatible indeterminat.

b) Per $k=2$ la solució és:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$ d'on resulta:

$$\left.\begin{array}{rcl} z & = & z \\ y & = & -\dfrac{z}{2} \\ x & = & 2-3z+\dfrac{z}{2} = 2-\dfrac{5z}{2} \end{array}\right\}.$$

c) Per $k=1$ el sistema és compatible determinat. Tenim,

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$ d'on resulta

$$\left.\begin{array}{rcl} z & = & -\dfrac{1}{3} \\ y & = & \dfrac{1}{6} \\ x & = & 1+1-\dfrac{1}{6} = \dfrac{11}{6} \end{array}\right\}$$

65. PAU 2008 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 4

4. Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 5 \\ 2x+3y+z & = & 3 \\ ax+10y+4z & = & 2 \end{array}\right\}.$$

a) Trobeu els valors de a per als quals el sistema no és compatible determinat. [1 punt]

b) Trobeu el valor de a per al qual el valor de x és 2. Determineu també els valors de y i de z en aquest cas. [1 punt]

Solució:

a) Per Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ a & 10 & 4 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 10-a & 4-a & 2-5a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 14-2a & 72-12a \end{array}\right)$$

Per tant, no és compatible i determinat si $14-2a=0$ o equivalentment per $\boxed{a=7}$.

Alternativament per determinants. El determinant del sistema és:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ a & 10 & 4 \end{vmatrix} = 12+20+a-3a-10-8 = 14-2a\,.$$

Amb la mateixa conclusió.

b) Si $\boxed{x=2}$, el sistema de les dues primeres equacions dóna:

$$\left.\begin{array}{rcl} y+z & = & 3 \\ 3y+z & = & -1 \end{array}\right\}$$ que té per solució $\boxed{y=-2}$, $\boxed{z=5}$.

Substituint ara en la tercera equació, resulta $2a-20+20=2$, d'on $\boxed{a=1}$.

66. PAU 2008 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 5

PROBLEMES

5. Un trajecte de 200 km ha de fer-se combinant taxi, ferrocarril i autobús. El cost del taxi és de 5 €/km; el del ferrocarril de 2 €/km, i el de l'autobús, de 3 €/km. El recorregut ens ha costat 500 € per haver fet el doble de km amb ferrocarril que en taxi i autobús junts. Determineu les distàncies que hem recorregut amb cada mitjà de transport.
[4 punts]

Puntuació: Planteig 2 punts; solució 2 punts. Total 4 punts.

Solució:

Anomenant x, y, z a les distàncies recorregudes respectivament en taxi, ferrocarril i autobús, resulta el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 200 \\ 5x+2y+3z & = & 500 \\ y & = & 2(x+z) \end{array}\right\}$$

Resolent-lo pel mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 5 & 2 & 3 & 500 \\ -2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & -3 & -2 & -500 \\ 0 & 3 & 0 & 400 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & -3 & -2 & -500 \\ 0 & 0 & -2 & -100 \end{array}\right)$$

D'on resulta $\boxed{z = 50 \text{ km},\ y = \frac{400}{3} = 133{,}33 \text{ km i } x = \frac{50}{3} = 16{,}66 \text{ km}}$.

67. PAU 2007 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 2

2. Resoleu el sistema

$$\begin{cases} x+2y-5z=-1 \\ -3x+y-2z=7 \\ 2x-3y+z=-12. \end{cases}$$

Puntuació: Total 2 punts.

Solució: Resolem per Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & -1 \\ -3 & 1 & -2 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & -12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 7 & -17 & 4 \\ 0 & -7 & 11 & -10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 7 & -11 & 10 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \end{array}\right)$$

D'on resulta: $\boxed{z=1;\quad y=(10+11\cdot 1)/7=3;\quad x=-1+5\cdot 1-2\cdot 3=-2}$.

68. PAU 2007 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 6

6. Una persona va a la vinateria i compra tres tipus de vi. En total compra 20 botelles i s'hi gasta 100 €. Compra botelles de tres classes A, B i C, que costen 3 €, 7 € i 8 € respectivament. Trobeu el nombre de botelles de cada classe que ha comprat, sabent que al menys n'ha comprat una de cada classe.

Puntuació: 1.5 punts pel plantejament; 1 per la solució genèrica i 1.5 punts per la discussió amb enters. Total: 4 punts.

Solució: Anomenant respectivament x, y, z als nombres de botelles dels tipus A, B i C el sistema de condicions és:

$$\left.\begin{array}{lcl} x+y+z & = & 20 \\ 3x+7y+8z & = & 100 \\ x & \geq & 1 \\ y & \geq & 1 \\ z & \geq & 1 \end{array}\right\} \text{ d'on per Gauss: } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 3 & 7 & 8 & 100 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 4 & 5 & 40 \end{array}\right)$$

Així: $y = \dfrac{40-5z}{4} = 10 - 5\dfrac{z}{4}$ i $x = 10 + \dfrac{z}{4}$.

Com x, y, z han de ser enters més grans o igual que 1, necessàriament z ha de ser múltiple de 4. El mínim valor de z possible és 4, pel qual corresponen $\boxed{x=11,\ y=5}$ i $\boxed{z=4}$. Aquests són els únics valors possibles de x, y, z, ja que si posem $z=8$ resultaria $y=0$ que ja és incompatible amb les hipòtesis.

69. PAU 2007 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2

2. Una companyia aèria de baix cost realitza vols des de Girona a 3 ciutats A, B i C. Calculeu el preu dels bitllets a cada ciutat amb la informació següent: Si ven 10 bitllets a la ciutat A, 15 a la B i cap a la C ingressa 925 €; si ven 12 bitllets per A, 8 per B i cap per C ingressa 760 €; si ven 6 bitllets per A, 5 per B i 8 per C ingressa 855 €.

Puntuació: 1 punt pel plantejament; 1 per la solució. Total: 2 punts.

Solució: Plantegem el sistema:

$$\left.\begin{array}{lcl} 10A+15B & = & 925 \\ 12A+8B & = & 760 \\ 6A+5B+8C & = & 855 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{lcl} 2A+3B & = & 185 \\ 3A+8B & = & 190 \\ 6A+5B+8C & = & 855 \end{array}\right\}$$

De les dues primeres obtenim $\boxed{A=40}$ i $\boxed{B=35}$. Substituint en la tercera resulta $\boxed{C=55}$.

70. PAU 2007 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 6

6. Tres entitats financeres A B y C ofereixen respectivament, per a dipòsits superiors a 2000 €, un interès anual del 2%, 3% i k % (que no coneixem). La Joana, en Manel i el Dani decideixen invertir els seus estalvis en aquestes entitats durant un any. Sabem que si tots ho fessin a l'entitat A obtindrien en total uns beneficis de 164 €; però si la Joana optés per A, en Manel per C i en Dani per B n'obtindrien 192 €; finalment, si la Joana i en Manel es decidissin per B i el Dani per C n'obtindrien 218 €.

a) Escriviu un sistema d'equacions que descrigui la situació.
b) Sense resoldre el sistema, determineu la quantitat total de diners invertida entre les tres persones.
c) Trobeu, si existeix, un valor de k per al qual hi hagi infinites solucions. Resoleu el sistema per aquest valor de k, i doneu-ne tres solucions diferents.

Puntuació: Apartat a) 1 punt; apartat b) 0.5 punts; apartat c) 1 punt per determinar k=3 i k=2; 1 punt per donar la solució general per k=2; 0.5 per donar tres solucions diferents. Total 4 punts.

Solució: a) Sistema d'equacions:

$$\left.\begin{array}{rcl} 0.02(x+y+z) & = & 164 \\ 0.02x+\dfrac{ky}{100}+0.03z & = & 192 \\ 0.03(x+y)+\dfrac{kz}{100} & = & 218 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 8200 \\ 2x+ky+3z & = & 19200 \\ 3x+3y+kz & = & 21800 \end{array}\right\}$$

b) La primera equació dóna directament que la quantitat total invertida pels tres és 8200 €.

c) Resolem el sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8200 \\ 2 & k & 3 & 19200 \\ 3 & 3 & k & 21800 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8200 \\ 0 & k-2 & 1 & 2800 \\ 0 & 0 & k-3 & -2800 \end{array}\right)$$

Si $k = 3$ el sistema és incompatible. Si $k = 2$ resulta:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8200 \\ 0 & 0 & 1 & 2800 \\ 0 & 0 & -1 & -2800 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8200 \\ 0 & 0 & 1 & 2800 \end{array}\right)$$

que correspon a la solució general:

$$\left.\begin{array}{l} z = 2800 \\ y = y \\ x = 5400 - y \end{array}\right\}$$

Podem donar fàcilment tres solucions diferents, per exemple:

x	2400	2900	3400
y	3000	2500	2000
z	2800	2800	2800

Nota pels correctors: Les tres solucions han de tenir $x \geq 2000$ i $y \geq 2000$ per verificar les condicions de l'enunciat. Altrament els interessos no corresponen. Penalitzeu molt lleugerament el lapsus.

71. PAU 2007 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 1

QÜESTIONS

1. a) Discutiu el sistema següent segons els valors del paràmetre a:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+(a+1)y & = & 1 \\ ax+2y & = & -2 \end{array}\right\}$$

b) Resoleu-lo per al valor de a que el fa indeterminat.

Puntuació: Apartat a) 1 punt si troben els tres casos; 0.5 punts si els classifiquen tots tres be; Apartat b) 0.5 punts. Total 2 punts.

Solució: Discutim per Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & a+1 & 1 \\ a & 2 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc} 1 & a+1 & 1 \\ 0 & 2-a^2-a & -2-a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc} 1 & a+1 & 1 \\ 0 & (a-1)(a+2) & a+2 \end{array}\right)$$

Si $a=1$ el sistema és incompatible.
Si $a=-2$ la darrera línia es fa tota zero i desapareix. El sistema esdevé compatible indeterminat. La solució és: $y=y;\quad x=1+y.$
Si $a\neq 1$ i $a\neq -2$ el sistema és Cramer compatible i determinat.

En aquest cas, la solució (que no es demana) és:

$$y=\frac{a+2}{(a-1)(a+2)} = \frac{1}{a-1}$$

$$x=1-\frac{a+1}{a-1} = \frac{a-1-a-1}{a-1} = \frac{-2}{a-1}.$$

72. PAU 2006 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 2

2. Discutiu en funció del paràmetre a el sistema següent:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 5 \\ 5x+y-z & = & 11 \\ 3x-y+az & = & 2 \end{array}\right\}$$

Puntuació: Total 2 punts.

Solució: Reduint per Gauss resulta:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -1 & 11 \\ 3 & -1 & a & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & -6 & -14 \\ 0 & -4 & a-3 & -13 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & a+3 & 1 \end{array}\right).$$

Discussió:

Cas $a=-3$: Sistema incompatible.
Cas $a\neq -3$: Sistema compatible determinat.

Nota pel corrector: No es demanen les solucions, sinó únicament la discussió.

73. PAU 2006 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3

3. Discutiu en funció del paràmetre p el sistema d'equacions lineals de matriu ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & p+5 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & p-1 & 0 \end{array}\right).$$

Puntuació total: 2 punts.

Solució:
Per $p=1$ el sistema és:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & 6 & 7 & 5 \end{array}\right)$$

que és compatible i indeterminat amb un grau de llibertat.

Per $p=-5$ el sistema és:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

que és incompatible.

Per $p \neq 1$ i $p \neq -5$ el sistema és compatible determinat.

Nota pel corrector: No es demanen les solucions, si no únicament la discussió.

74. PAU 2006 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 3

3. Discutiu en funció del paràmetre m el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + y - z = 2. \end{cases}$$

En el cas que sigui possible doneu també la solució.

Puntuació: discussió 1 punt; solucions 1 punt. Total 2 punts.

Solució: Reduïnt per Gauss la matriu del sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & 0 & -1-m & 1 \end{array}\right)$$

resulten els casos següents:

$m = -1$ sistema incompatible.

$m \neq -1$ compatible indeterminat amb 1 grau de llibertat. La solució és:

$$\left.\begin{array}{rcl} z & = & -\dfrac{1}{1+m} \\ y & = & y \\ x & = & 1 + \dfrac{m}{1+m} - y \quad = \quad \dfrac{1+2m}{1+m} - y \end{array}\right\}$$

75. PAU 2006 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 6

6. La despesa mensual en salaris d'una empresa de 36 treballadors és de 54900 €. Hi ha tres categories de treballadors que indicarem per A, B i C. El salari mensual d'un treballador de la categoria A és de 900 €, el d'un de la B és de 1500 € i el d'un de la C és de 3000 €. Sense acomiadar ningú, l'empresa vol reduir la despesa salarial en un 5%. Per fer-ho ha rebaixat un 5% el salari dels de la categoria A, un 4% els de la B i un 7% els de la C. Esbrineu quants treballadors hi ha de cada categoria.

Puntuació: plantejament 2 punts; resolució 2 punts. Total 4 punts.

Solució: Com hi ha 36 treballadors resulta $a+b+c=36$. Tenint en compte els sous de cada categoria de treballadors resulta $900a+1500b+3000c=54900$, que pot simplificar-se dividint per 300 a $3a+5b+10c=183$. Determinem ara les reduccions que fa:

5% de 54900 = 2745
5% de 900 = 45
4% de 1500 = 60
7% de 3000 = 210.

Així tindrem també: $45a+60b+210c=2745$. Dividint per 15 queda $3a+4b+14c=183$. Obtenim el sistema d'equacions de matriu ampliada següent que reduïm per Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 36 \\ 3 & 5 & 10 & 183 \\ 3 & 4 & 14 & 183 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 36 \\ 0 & 1 & 11 & 75 \\ 0 & 2 & 7 & 75 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 36 \\ 0 & 1 & 11 & 75 \\ 0 & 0 & -15 & -75 \end{array}\right)$$

Resolent obtenim:

$$\left.\begin{array}{rcll} c & = & 5 & \\ b & = & 75-55 & = 20 \\ a & = & 36-5-20 & = 11 \end{array}\right\}$$

Així, els nombres de treballadors per categories són: 11 de classe A, 20 de classe B i 5 de classe C.

76. PAU 2005 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

1. El preu d'un bitllet d'una línia d'autobusos és la suma d'una quantitat fixa i una altra proporcional al nombre de quilòmetres del recorregut. S'han pagat 18 € per un bitllet a una població que dista 500 km., i 33 € per un altre a una ciutat que dista 1000 km. Quant haurem de pagar per un bitllet a una població que està a 250 km?

Puntuació: Plantejament 1 punt; solució 1 punt. Total 2 punts.

Solució: El preu del bitllet ve donat per $p = a + bx$ on x és la distància i a i b són constants a determinar. S'obtenen les equacions següents:

$$\left.\begin{array}{rcl} a + 500b & = & 18 \\ a + 1000b & = & 33 \end{array}\right\}$$

d'on resulta $\boxed{a = 3}$ i $\boxed{b = 0{,}03}$. Així el preu a una població que està a una distància de 250 quilòmetres és: $\boxed{p = 3 + 0{,}03 \cdot 250 = 10{,}50€}$

77. PAU 2005 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 1

1. Resoleu el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \\ x - y + z = -1 \end{array}\right\}$$

Puntuació: Eliminació 1 punt; solució correcta 1 punt. Total 2 punts.

Solució: Resolem per Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 9 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 7 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & 12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

d'on resulta $\boxed{(x, y, z) = (1, 1, -1)}$.

78. PAU 2005 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 6

6. Una marca comercial utilitza tres ingredients A, B i C en l'elaboració de tres tipus de pizzes P1, P2 i P3. La pizza P1 s'elabora amb 1 unitat de A, 2 de B i 2 de C; la P2 s'elabora amb 2 unitats de A, 1 de B i 1 de C; P3 s'elabora amb 2 unitats de A, 1 de B i 2 de C. El preu de venda al públic és de 4,80 € per P1, 4,10 € per P2 i 4,90 € per P3. Sabent que el marge comercial (benefici) és de 1,60 € en cadascuna d'elles, trobeu què li costa a l'esmentada marca comercial cada unitat de A, B i C.

Puntuació: Plantejament 2 punts; solució 2 punts. Total: 4 punts.

Solució: Anomenant x, y i z el que li costa a l'empresa una unitat de A, B i C respectivament, les condicions anteriors es tradueixen en el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x+2y+2z+1.60 = 4.80 \\ 2x+y+z+1.60 = 4.10 \\ 2x+y+2z+1.60 = 4.90 \end{cases}$$

Resolent per Gauss obtenim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3.20 \\ 2 & 1 & 1 & 2.50 \\ 2 & 1 & 2 & 3.30 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3.20 \\ 0 & -3 & -3 & -3.90 \\ 0 & -3 & -2 & -3.10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3.20 \\ 0 & 1 & 1 & 1.30 \\ 0 & 0 & 1 & 0.80 \end{array}\right)$$

d'on resulta $\boxed{(x,y,z)=(0.60,0.50,0.80)}$.

79. PAU 2004 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 3

3. Tenim dues caixes de llibres A i B. Si passem 12 llibres de la caixa A a la B, totes dues caixes tindran la mateixa quantitat de llibres. Si passem 12 llibres de la B a la A, la caixa A tindrà el triple de llibres que la caixa B. Quants llibres conté cada caixa?

Puntuació: plantejament 1 punt; resolució 1 punt. Total: 2 punts.

Solució: Anomenant x al nombre de llibres de la caixa A i y al nombre de llibres de la caixa B, les condicions poden expressar-se mitjançant el sistema lineal següent:

$$\left.\begin{array}{rcl} x-12 &=& y+12 \\ x+12 &=& 3(y-12) \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{rcl} x-y &=& 24 \\ x-3y &=& -48 \end{array}\right\}$$ que té per solució $\boxed{A=60, B=36}$

80. PAU 2004 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 4

4. Discutiu , i en el seu cas resoleu, el sistema següent:

$$\begin{cases} 4x + 6y - 8z = 2 \\ 6x + 9y - 12z = 3 \\ x + 2y + z = 10 \end{cases}$$

Puntuació: 2 punts.

Solució: Eliminant pel mètode de Gauss resulta:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 10 \\ 4 & 6 & -8 & 2 \\ 6 & 9 & -12 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -6 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Per tant el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat, i la solució és:

$$\boxed{(x,y,z) = (-28,19,0) + z(11,-6,1)}$$

81. PAU 2004 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

1. Un venedor té un salari mensual que ve determinat per un sou fix més un cert percentatge sobre el volum de vendes que ha fet durant el mes. Si ven per valor de 2000 €, el seu salari és de 1200 € i, si ven per valor de 2500 €, el salari és de 1300 €. Trobeu el percentatge que guanya sobre el total de vendes i el sou fix.

Puntuació: 2 punts. 1 punt el plantejament i 1 punt la resolució.

Solució: Sigui $a =$ sou fix, $b =$ tant per u sobre vendes, $v =$ volum de vendes. El salari serà $s = a + bv$. Per tant, tenim el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} a + 2000b = 1200 \\ a + 2500b = 1300 \end{array}\right\}$$ d'on resulta $\boxed{b = \frac{1}{5} = 0,2 = 20\%}$ i $\boxed{a = 800}$.

82. PAU 2004 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2

2. En estudiar un sistema lineal depenent del paràmetre k pel mètode de Gauss, hem arribat a la matriu ampliada següent:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & k-2 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \end{array}\right)$$

Discutiu el sistema en funció del paràmetre k.

Puntuació: 2 punts.

Solució: Si $k \neq 1$ i $k \neq 2$ el sistema és de Cramer (amb valor de $z = 0$), i per tant és compatible determinat.
Si $k = 1$, la darrera equació s'elimina i resta un sistema compatible indeterminat amb 1 grau de llibertat.
Si $k = 2$ les dues darreres equacions encara poden reduir-se i queden

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right)$$

resultant el sistema incompatible.

83. PAU 2004 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 5

5. La Joana i la Mercè tenien 20000 € cadascuna per invertir. Cadascuna d'elles fa la mateixa distribució dels seus diners en tres parts P, Q i R i els porta a una entitat financera. Al cap d'un any, a la Joana li han donat un 4% d'interès per la part P, un 5% per la part Q i un 4% per la part R i a la Mercè li han donat un 5% per la part P, un 6% per la part Q i un 4% per la part R. La Joana ha rebut en total 850 € d'interessos, mentre que la Mercè n'ha rebut 950 €. De quants € constava cadascuna de les parts P,Q i R?

Puntuació: plantejament 2 punts; resolució 2 punts. Total: 4 punts.

Solució: Les condicions es tradueixen en el sistema següent:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} P & + & Q & + & R & = & 20000 \\ 0,04P & + & 0,05Q & + & 0,04R & = & 850 \\ 0,05P & + & 0,06Q & + & 0.04R & = & 950 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{rcrcrcl} P & + & Q & + & R & = & 20000 \\ 4P & + & 5Q & + & 4R & = & 85000 \\ 5P & + & 6Q & + & 4R & = & 95000 \end{array}\right\}$$

que té per solució: $\boxed{P = Q = 5000 \text{ €}, \quad R = 10000 \text{ €}}$.

84. PAU 2004 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 6

6. Tres germans tenen edats diferents, però sabem que la suma de les edats dels 3 germans és de 37 anys, i la suma de l'edat del gran més el doble de l'edat del mitjà més el triple de l'edat del petit és de 69 anys.

a) Expresseu les edats dels tres germans en funció de l'edat del germà petit.
b) És possible que el germà petit tingui 5 anys? I 12 anys? Raoneu la resposta.
c) Calculeu les edats dels tres germans.

Puntuació: apartat a) 1,5 punts; apartat b) 1 punt; apartat c) 1,5 punts. Total: 4 punts. Si algú accepta també la solució $x=9, y=14, z=14$, on dos germans tenen la mateixa edat, també es donarà per bona la resposta.

Solució: Designem per x, y, z respectivament les edats dels germans petit, mitjà i gran respectivament. El sistema que tradueix les condicions anteriors és:

$$\left.\begin{array}{c} x+y+z=37 \\ 3x+2y+z=69 \\ x<y<z \end{array}\right\}$$

a) Aïllant y, z en funció de x resulta $\boxed{y=32-2x \text{ i } z=x+5}$.
b) Si posem $x=5$ resulten $y=22$ i $z=10$, i no es compleix $z>y$. Anàlogament, si posem $x=12$ resulten $y=8$ i $z=17$ i no es compleix $y>x$. Per tant, el germà petit no pot tenir ni 5 ni 12 anys. c) Cal que sigui $y=32-2x>x$ i $z=x+5>y=32-2x$. Així, $3x<32$ i $3x>27$, i tenim, $9<x<10,66..$ Per tant, l'única solució entera possible és $x=10$. Conseqüentment, les edats són: $\boxed{x=10, y=12, z=15}$.

85. PAU 2003 · Setembre · Sèrie única · Exercici 4

4. Considereu un sistema de dues equacions lineals amb dues incògnites i amb coeficients reals. És possible que el sistema tingui exactament dues solucions? I exactament tres solucions? Justifiqueu les respostes.

Solució:

No és possible que tingui ni 2 ni 3 solucions exactament, ja que si un sistema lineal amb coeficients reals té més d'una solució, és indeterminat i llavors té infinites solucions.

Puntuació: 2 punts.

86. PAU 2002 · Setembre · Sèrie única · Exercici 3

3. Determineu per a quin valor del paràmetre λ el sistema següent

$$\begin{cases} x-3y+5z=2 \\ 2x-4y+2z=1 \\ 5x-11y+9z=\lambda \end{cases}$$

és compatible i, en aquest cas, resoleu-lo.

Puntuació: Determinació de λ : 1 punt. Resolució del sistema: 1 punt. Total: 2 punts.

Solució: Pel mètode de Gauss resulta:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -3 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 9 & \lambda \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & -8 & -3 \\ 0 & 4 & -16 & \lambda-10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-4 \end{array}\right)$$

Per a tot $\lambda \neq 4$ el sistema és incompatible. Per $\boxed{\lambda = 4}$ és compatible. Calculem la solució:

$$z = z$$

$$y = 4z - \frac{3}{2}$$

$$x = 3y - 5z + 2 = 12z - \frac{9}{2} - 5z + 2 = 7z - \frac{5}{2}$$

que correspon a la solució vectorial:

$$\boxed{(x, y, z) = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right) + z(7, 4, 1)}$$

Nota: S'acceptarà qualsevol mètode de resolució i qualsevol solució completa. Les solucions que no comportin 1 grau de llibertat no es puntuaran (0 punts per la solució del sistema).

87. PAU 2002 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 2

2. En un determinat poble es duen a terme tres espectacles que anomenarem E_1, E_2 i E_3 respectivament, cada un amb un preu diferent.

Calculeu el preu de cada espectacle si sabem el següent:

- Si assistíssim dues vegades a E_1, una vegada a E_2 i també una vegada a E_3 ens costaria 34 €.
- Si anéssim tres vegades a l'espectacle E_1 i una a E_2 ens costaria 46,5 €.
- En el cas d'assistir només una vegada a cada un dels tres espectacles ens costaria 21,5 €.

Puntuació: Plantejament: 1 punt. Solució: 1 punt. Total: 2 punts.

Solució: Siguin x, y, z els preus dels espectacles E_1, E_2, E_3, respectivament. Les condicions donen el sistema:

$$\begin{cases} 2x+y+z=34 \\ 3x+y=46,5 \\ x+y+z=21,5 \end{cases}$$

Aplicant Gauss resulta:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 21,5 \\ 2 & 1 & 1 & 34 \\ 3 & 1 & 0 & 46,5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21,5 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 & -9 \\ 0 & -2 & -3 & -18 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21,5 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

d'on obtenim $\boxed{z=0, y=9, x=12,5}$. Es a dir, que l'espectacle E_1 costa 12,5 €, l'espectacle E_2 costa 9 € i l'espectacle E_3 és gratuït.

88. PAU 2001 · Setembre · Sèrie única · Exercici 4 (Qüestions)

4. Ha de tenir rang 2. Alternativament, una altra resposta correcte és que ha de ser compatible determinat. Per construir-ne un, donem dues equacions linealment independents, i afegim una tercera equació que sigui combinació lineal de les dues anteriors amb coeficients no nuls.

Si volem que el punt sigui $(2,1)$, posem dues equacions que passin per $(2,1)$ no coincidents, com ara

$$\begin{aligned} x+y &= 1 \\ 2x-y &= 5 \end{aligned}$$

i prenem la tercera com a combinació lineal de les dues:

$$(x+y-1)+2(2x-y-5)=0$$

Nota pels correctors: Accepteu com a vàlid qualsevol sistema de tres equacions lineals amb dues incògnites de rang 2. El punt on es tallen serà la solució del sistema, que ha de ser compatible i determinat. Comproveu la correcció del raonament i de les respostes [2 punts]

89. PAU 2000 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 1 (Problemes)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

90. PAU 2000 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3 (Qüestions)

3. El determinant del sistema és $16-a^2$. Si $a \neq \pm 4$ el sistema és compatible determinat. Si $a = 4$ el sistema és compatible indeterminat. Si $a = -4$ el sistema és incompatible. Per tant, l'únic valor de a que fa incompatible el sistema és $a = -4$.

   Compteu 1 punt per arribar a $a = \pm 4$ i 1 punt pel resultat final.