Matemàtiques aplicades a les ciències social

Programació lineal

Solucions · 91 exercicis

Proves d'accés a la universitat (PAU) de Catalunya. Ordenats del més recent al més antic.
Retalls dels exàmens i pautes oficials (selecat.cat / universitats.gencat.cat).

1. PAU 2023 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 3

3.

a) Denotem per x el nombre de caixes tipus A i per y el nombre de caixes tipus B.
El sistema d'inequacions donat per les restriccions del problema és el següent:

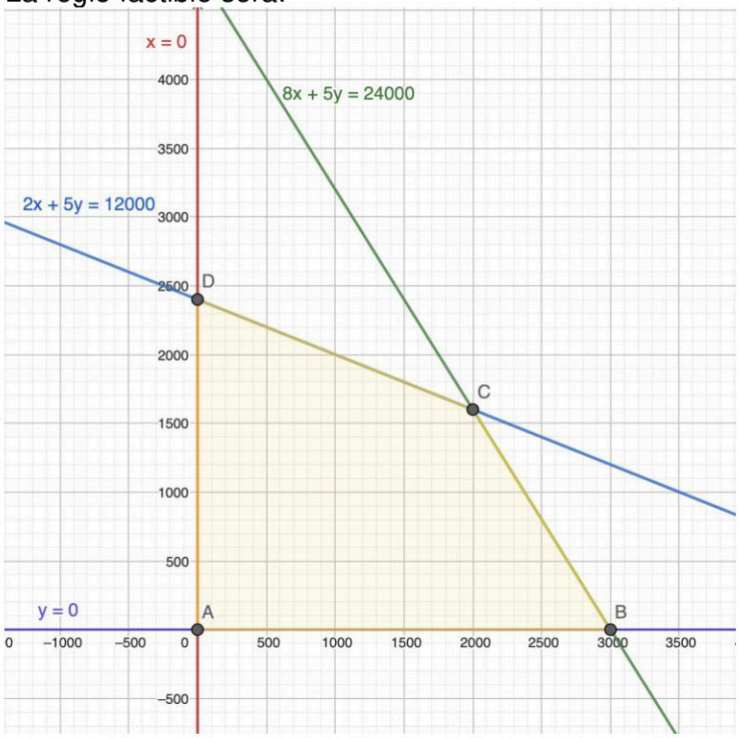
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 8x + 5y \leq 24000 \\ 2x + 5y \leq 12000 \end{cases}$$

Els ingressos per la venda d'una caixa del tipus A és: $8 \cdot 0{,}60 + 2 \cdot 0{,}70 = 6{,}2$ €, i els ingressos per la venda d'una caixa del tipus B és: $5 \cdot 0{,}60 + 5 \cdot 0{,}70 = 6{,}5$ €.

Per tant, la funció objectiu, que ens dona els ingressos per la venda de les caixes, és:

$$F(x, y) = 6{,}2x + 6{,}5y$$

La regió factible serà:



b) Els vèrtexs de la regió factible són: $(0{,}0)$, $(3000{,}0)$, $(2000{,}1600)$ i $(0{,}2400)$.
Si avaluem la funció objectiu als quatre vèrtexs obtenim:

$$F(0{,}0) = 0$$
$$F(3000{,}0) = 18600$$
$$F(2000{,}1600) = 22800$$
$$F(0{,}2400) = 15600$$

Per tant, els ingressos màxims s'obtenen venent 2.000 caixes del tipus A i 1.600 caixes del tipus B i són de 22.800 €.

a) Càlcul de les restriccions: 0,5 punts. Dibuix de la regió factible: 0,5 punts. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 punts.

b) Obtenció dels vèrtexs: 0,5 punts. Obtenció del punt en què s'assoleix el màxim: 0,5 punts. Obtenció del benefici màxim: 0,25 punts.

---

2. PAU 2023 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4

4.

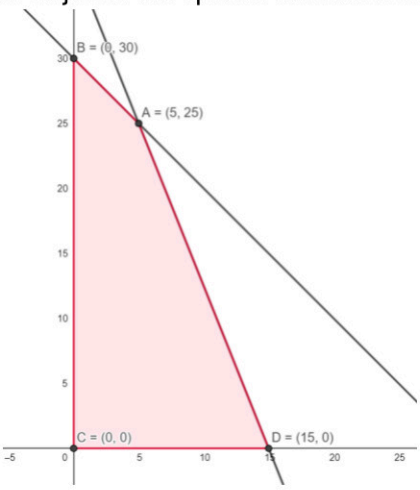
a) Denotem per x el nombre de barques que faran bateigs de submarinisme i per y el nombre de barques que faran excursions per la costa per banyar-se en cales. Les restriccions provenen de la limitació en el nombre d'instructors i d'embarcacions. El sistema d'inequacions determinat per les restriccions és:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 5x + 2y \leq 75 \\ x + y \leq 30 \end{cases}$$

La regió factible serà:

I la funció objectiu és: $F(x, y) = 60 \cdot 10x + 18 \cdot 25y = 600x + 450y$

b) Els vèrtexs de la regió factible són: $A = (5{,}25), B = (0{,}30), C = (0{,}0)$ i $D = (15{,}0)$. Avaluant la funció objectiu als quatre vèrtexs s'obté:



$F(A) = 14\,250$, $F(B) = 13\,500$, $F(C) = 0$ i $F(D) = 9\,000$.

Deduïm, per tant, que per obtenir el màxim d'ingressos caldria fer 5 bateigs de submarinisme i 25 excursions per la costa. Amb aquestes sortides ingressarien 14 250 euros diaris.

a) Càlcul de les restriccions: 0,5 punts. Dibuix de la regió factible: 0,5 punts. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 punts.

b) Obtenció dels vèrtexs: 0,5 punts. Obtenció del punt en què s'assoleix el màxim: 0,5 punts. Obtenció del màxim d'ingressos: 0,25 punts.

---

3. PAU 2023 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 6

6.

a) Sabem que $2y + x = 64$. Per tant, aïllant, obtenim que: $y = \frac{64-x}{2}$

D'altra banda, si $x = 28$, substituint obtenim que: $y = \frac{64-28}{2} = 18$ cm

Per tant, la longitud ideal de la contrapetja és de 18 cm.

b) Les inequacions que estableix la normativa són les següents:

$$\begin{cases} x \geq 28 \\ 13 \leq y \leq 18{,}5 \\ 54 \leq 2y + x \leq 70 \end{cases}$$

Així doncs, si $x = 40$, es compleix la primera condició. Pel que fa a la tercera, d'una banda tenim que $2y + 40 \leq 70$, que ens dona que $y \leq 15$. D'altra banda, cal que $2y + 40 \geq 54$, que ens dona que $y \geq 7$.

També sabem que cal que $13 \leq y \leq 18{,}5$. Per tant, ajuntant totes les condicions, sabem que cal que la contrapetja estigui entre 13 i 15 cm.

a) Escriure la condició en forma d'equació: 0,25 punts. Obtenir *y* en funció de x: 0, 5 punts. Trobar la longitud de la contrapetja: 0,25 punts.

b) Obtenció de les inequacions: 0,25 punts cadascuna. Treballar bé les desigualtats en el cas concret que $x = 40$: 0, 5 punts. Resultat final: 0,25 punts.

---

4. PAU 2023 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 2

2.

a) Denotem per x el nombre de coques sense farcir i per y el nombre de coques farcides de crema. El sistema d'inequacions donat per les restriccions del problema és el següent:

$$\begin{cases} x \geq 60 \\ y \geq 30 \\ 500x + 400y \leq 60000 \\ 300x + 120y \leq 30000 \end{cases} \quad \text{o també} \quad \begin{cases} x \geq 60 \\ y \geq 30 \\ 0{,}5x + 0{,}4y \leq 60 \\ 0{,}3x + 0{,}12y \leq 30 \end{cases}$$

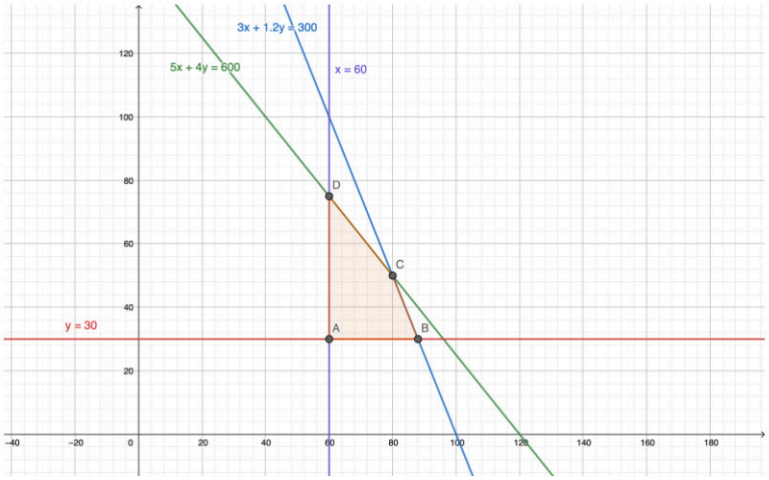
Si simplifiquem el sistema podem treballar amb el següent:

$$\begin{cases} x \geq 60 \\ y \geq 30 \\ 5x + 4y \leq 600 \\ 3x + 1{,}2y \leq 300 \end{cases}$$

La funció objectiu, que ens dona els ingressos per la venda de les coques, és:

$$F(x, y) = 15x + 25y$$

La regió factible serà:



b) Els vèrtexs de la regió factible són: $A(60{,}30)$, $B(88{,}30)$, $C(80{,}50)$ i $D(60{,}75)$.
Si avaluem la funció objectiu als quatre vèrtexs obtenim:

$$F(A) = 15 \cdot 60 + 25 \cdot 30 = 1650$$
$$F(B) = 15 \cdot 88 + 25 \cdot 30 = 2070$$
$$F(C) = 15 \cdot 80 + 25 \cdot 50 = 2450$$
$$F(D) = 15 \cdot 60 + 25 \cdot 75 = 2775$$

El màxim d'ingressos s'obtenen venent 60 coques sense farcir i 75 coques farcides de crema. En aquest cas, s'ingressen 2775 €.
Calculem la quantitat de sucre i de farina necessaris per veure si en sobra:
Farina: $60 \cdot 0{,}5 + 75 \cdot 0{,}4 = 60$ kg
Sucre: $60 \cdot 0{,}3 + 75 \cdot 0{,}12 = 27$ kg
Veiem que de farina no en sobra, es gasten els 60 kg dels que es disposava, però de sucre en sobren $30 - 27 = 3$ kg.

Criteris de correcció:

a) Càlcul de les restriccions: 0,5 p. Dibuix de la regió factible: 0,5 p. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 p.

b) Càlcul dels vèrtexs: 0,5 p. Obtenció del punt on s'assoleix el màxim d'ingressos: 0,25 p. Obtenció del valor màxim: 0,25 p. Càlcul de la quantitat de sucre i farina que sobra: 0,25 p.

---

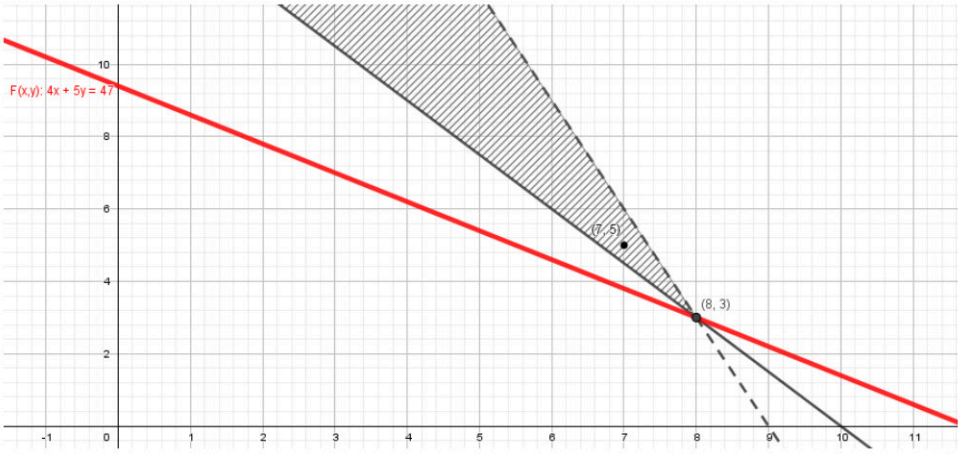
5. PAU 2022 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 4

4.

a) La funció objectiu, que volem minimitzar, és $F(x, y) = 4x + 5y$. Les inequacions que defineixen la regió factible són:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + y \leq 27 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 6x + 4y \geq 60 \end{array}\right\}$$

Aquestes equacions defineixen la regió factible següent:



Observem en el gràfic que aquesta funció no té màxim, ja que el recinte de validesa és infinit i la funció objectiu pot créixer indefinidament. En canvi, assoleix el mínim en el vèrtex (8, 3). Per tant, la solució és 8 grays de raigs de cobalt i 3 grays de raigs de cesi.

b) El punt (7, 5) compleix totes les inequacions, ja que $3 \cdot 7 + 5 = 26 < 27$ i $6 \cdot 7 + 4 \cdot 5 = 62 > 60$ i, a més a més, 7 i 5 són valors positius. Però $F(7,5) = 4 \cdot 7 + 5 \cdot 5 = 53$ és més gran que $F(8,3) = 4 \cdot 8 + 5 \cdot 3 = 47$, que és el valor de la funció objectiu al punt solució de l'apartat *a*.

Criteris de correcció: a) Identificació de la funció objectiu: 0,25 punts. Identificació de les restriccions: 0,5 punts. Dibuix de la regió factible: 0,5 punts. Obtenció del mínim: 0,25 punts. b) Comprovació que el punt (7, 5) satisfà les restriccions: 0,5 punts. Justificació que és un tractament pitjor: 0,5 punts.

---

6. PAU 2022 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 3

3.

a)

[1,75 punts]

Resumim la informació en la taula següent:

Tipus de panera	Pernils per panera	Ampolles de cava per panera	Barres de torró per panera	Quantitat de paneres que hem de fer
A	1	1	5	x
B	2	3	2	y

Les condicions que tenim són:

x indica la quantitat de paneres de tipus A que hem de fer: $x \geq 0$

y indica la quantitat de paneres de tipus B que hem de fer: $y \geq 0$

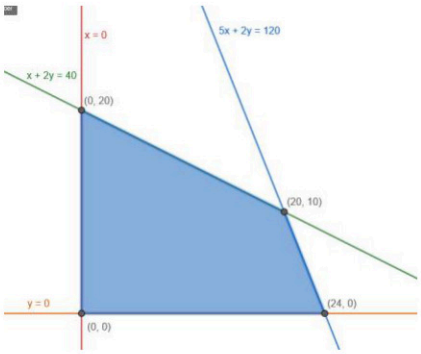
Disposem de 40 pernils, per tant: $x + 2y \leq 40$

Disposem de 120 barres de torró, per tant: $5x + 2y \leq 120$

Es vol fer la màxima la quantitat de paneres possible. Per tant, la funció objectiu és: $f(x, y) = x + y$, amb les restriccions següents:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 40 \\ 5x + 2y \leq 120 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Obtenim de la regió factible:



La regió factible està delimitada pels punts:

$$(0,0), (24,0), (20,10), (0,20)$$

Sabem que la funció objectiu assolirà el seu màxim en algun vèrtex de la regió factible. La taula següent recull el valor de la funció objectiu sobre cadascun dels vèrtexs:

Punts	$f(x,y) = x + y$
$(0,0)$	0
$(24,0)$	24
$(20,10)$	30
$(0,20)$	20

La funció objectiu $f(x,y) = x + y$ assoleix el valor màxim en el vèrtex $(20,10)$. Per tant, per maximitzar la quantitat de paneres, cal fer-ne 20 de tipus A i 10 de tipus B. D'aquesta manera obtindrem 30 paneres per als treballadors.

b)

[0,75 punts]

En aquest cas hem d'imposar que el nombre de paneres de cada tipus ha de ser igual. Per tant, ara tenim:

Tipus de panera	Pernils per panera	Ampolles de cava per panera	Barres de torró per panera	Quantitat de paneres que hem de fer
A	1	1	5	x
B	2	3	2	x

Si anomenem x la mateixa quantitat de paneres de cada tipus, ara tenim:

$$\begin{cases} x + 2x \leq 40 \\ 5x + 2x \leq 120 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 40/3 \\ x \leq 120/7 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 13{,}3 \\ x \leq 17{,}1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Per tant, es podran fer només 13 paneres de cada tipus i hi haurà paneres només per a 26 treballadors.

Criteris de correcció: a) Obtenció de les restriccions: 0,5 p. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 p. Dibuix de la regió factible: 0,25 p. Obtenció dels vèrtex: 0,5 p. Obtenció del màxim: 0,25 p. b) Plantejament: 0,25 p. Resolució: 0,5 p.

7. PAU 2022 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 4

4.

a)

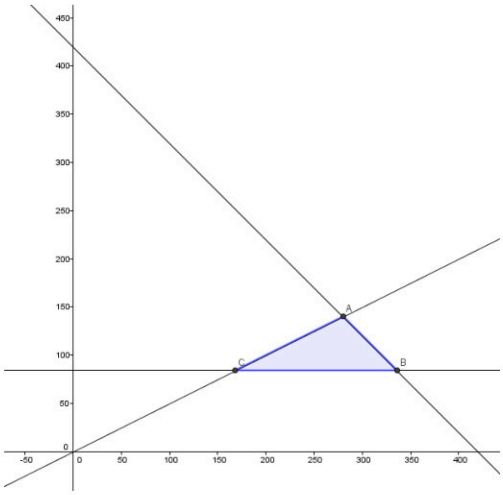
[1,25 punts]

Denotem per x el nombre d'habitacions reservades amb la tarifa estàndard i per y el nombre d'habitacions reservades amb la tarifa reduïda. El sistema d'inequacions donat per les restriccions és

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 84 \\ x + y \leq 420 \\ x \geq 2y \end{cases}$$

La funció objectiu és $F(x, y) = 120x + 90y$

i la regió factible serà:



b)

[1,25 punts]

Els vèrtexs de la regió factible són $A = (280{,}140)$, $B = (336{,}84)$ i $C = (168{,}84)$. Avaluant la funció objectiu als tres vèrtexs s'obté $F(A) = 46.200, F(B) = 47.880$ i $F(C) = 27.720$. Deduïm, per tant, que el benefici màxim s'obté reservant 336 habitacions a la tarifa estàndard i 84 a la reduïda i aquest benefici és de 47.880 euros.

Criteris de correcció: a) Càlcul de les restriccions: 0,5 p. Dibuix de la regió factible: 0,5 p. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 p. b) Obtenció dels vèrtexs: 0,75 p. Obtenció del punt en què s'assoleix el màxim: 0,25 p. Obtenció del benefici màxim: 0,25 p.

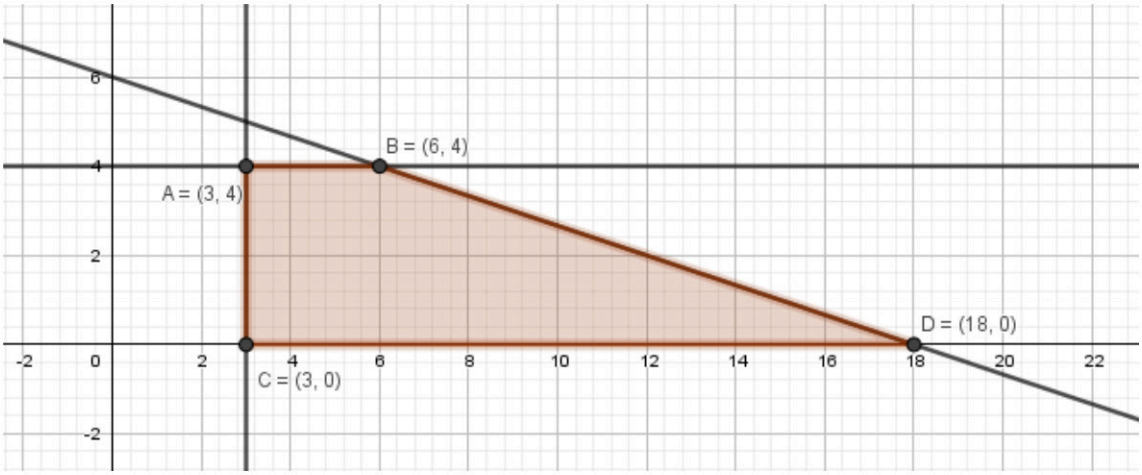
8. PAU 2021 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 3

3.

a) Si anomenem x el nombre d'anuncis a la ràdio i y el nombre d'anuncis a la televisió tenim les inequacions següents.

$$\left.\begin{array}{c} 1.000x + 3.000y \leq 18.000 \\ x \geq 3 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c} x + 3y \leq 18 \\ x \geq 3 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{array}\right\}$$

La regió factible és



La funció objectiu que ens dona el nombre de clients nous és

$$F(x, y) = 10x + 60y.$$

b) Si avaluem la funció en els vèrtex de la regió factible tenim

$$F(3, 0) = 10 \cdot 3 + 60 \cdot 0 = 30$$

$$F(18, 0) = 10 \cdot 18 + 60 \cdot 0 = 180$$

$$F(3, 4) = 10 \cdot 3 + 60 \cdot 4 = 270$$

$$F(6, 4) = 10 \cdot 6 + 60 \cdot 4 = 300$$

Si es fan 6 anuncis a la ràdio i 4 a la televisió s'obtindran 300 clients nous que correspon al nombre màxim de clients que es pot obtenir amb aquestes restriccions.

Criteris de correcció: a) Càlcul de les restriccions: 0,5 p. Dibuix de la regió factible: 0,5 p. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 p. b) Obtenció dels vèrtexs: 0,5 p. Obtenció del punt en què s'assoleix el màxim: 0,5 p. Obtenció del benefici màxim: 0,25 p.

9. PAU 2021 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 2

2.

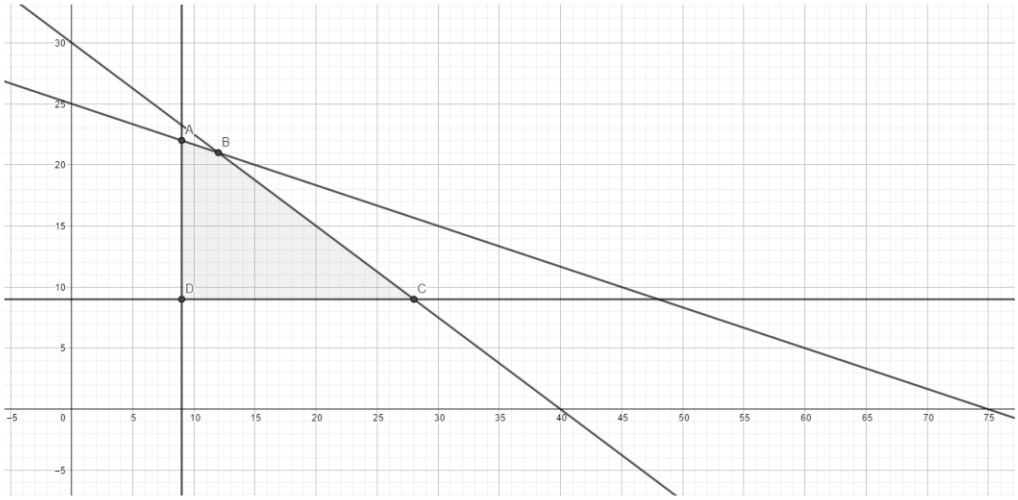
a) Denotem per x el nombre de capsetes del primer tipus, i per y, el nombre de capsetes del segon tipus. El sistema d'inequacions donat per les restriccions és:

$$\begin{cases} x \geq 9 \\ y \geq 9 \\ 3x + 4y \leq 120 \\ 2x + 6y \leq 150 \end{cases}$$

Podem simplificar una mica el sistema i treballar amb el sistema següent:

$$\begin{cases} x \geq 9 \\ y \geq 9 \\ 3x + 4y \leq 120 \\ x + 3y \leq 75 \end{cases}$$

La funció objectiu és $F(x, y) = x + y$, que ens dona el nombre total de capsetes, i la volem maximitzar. La regió factible serà:



---

b) Els vèrtexs de la regió factible són: $A = (9{,}22)$, $B = (12{,}21)$, $C = (28{,}9)$ i $D = (9{,}9)$. Avaluant la funció objectiu als quatre vèrtexs s'obté:

$F(A) = 31$, $F(B) = 33$, $F(C) = 37$ i $F(D) = 18$.

Deduïm, per tant, que per disposar del nombre màxim de capsetes possibles per obsequiar els clients hauran de fer-ne 28 del primer tipus i 9 del segon tipus. En aquest cas, veiem que s'utilitzen tots els panellets de pinyons, ja que $3 \cdot 28 + 4 \cdot 9 = 120$. Dels panellets de coco, en canvi, en fem servir $2 \cdot 28 + 6 \cdot 9 = 110$. Per tant sobren 40 panellets de coco.

Criteris de correcció: a) Càlcul de les restriccions: 0,5 p. Dibuix de la regió factible: 0,5 p. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 p. b) Obtenció dels vèrtexs: 0,5 p. Obtenció del punt en què s'assoleix el màxim de capsetes: 0,5 p. Obtenció del nombre de panellets que sobren: 0,25 p.

10. PAU 2021 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 2

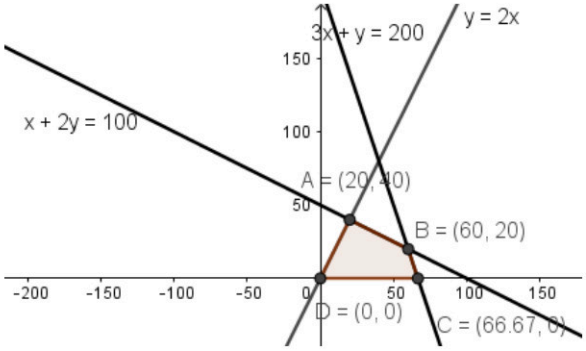
2.

a)

Considerem x = lots venuts de l'oferta *Blava* i y = lots venuts de l'oferta *Groga.*

Tenim les següents restriccions:

$$\begin{cases} 3x + y \leq 200 \\ x + 2y \leq 100 \\ x \geq (\frac{1}{2})y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Finalment, la funció objectiu és $Ingressos(x, y) = 50x + 30y$.

---

b)

Els vèrtexs de la regió factible són (0,0), $(20,40)$, $(60,20)$ i $(\frac{200}{3}, 0)$. Per veure quan obtenim els ingressos màxims calculem el valor de la funció objectiu en els vèrtexs:

$$Ingressos((0,0)) = 0\ €,$$

$$Ingressos((20,40)) = 50 \cdot 20 + 30 \cdot 40 = 2.200\ € ,$$

$$Ingressos((60,20)) = 50 \cdot 60 + 30 \cdot 20 = 3.600\ € ,$$

$$Ingressos((200/3,0)) = 50 \cdot 200/3 + 30 \cdot 0 = 3.333'33\ € .$$

Per tant caldrà vendre 60 lots de l'oferta *Blava* i 20 de l'oferta *Groga* i s'obtindrà uns ingressos màxims de 3.600 euros.

Criteris de correcció: a) Càlcul de les restriccions: 0,5 p. Dibuix de la regió factible: 0.5p. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 p. b) Obtenció dels vèrtexs: 0,5 p. Obtenció del punt pel que s'assoleix el màxim: 0,25 p. Obtenció del benefici màxim: 0,5 p.

11. PAU 2020 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 3

3. Una coneguda marca fabrica dues versions d'una mateixa fragància: el perfum, que és més concentrat i que es ven en ampolles petites que costen 70 euros, i la colònia, que és més diluïda i que es ven en ampolles més grans a 82 euros. En la fabricació cal barrejar dos ingredients: l'ingredient A (que conté l'aroma concentrat) i l'ingredient B (que conté alcohol i altres substàncies). En aquests moments el fabricant disposa de 5.000 ml de l'ingredient A i de 30.000 ml de l'ingredient B. Per a fabricar una ampolla de perfum calen 10 ml de l'ingredient A i 40 ml de l'ingredient B, i per a fabricar-ne una de colònia calen 10 ml de l'ingredient A i 90 ml de l'ingredient B. Les comandes actuals obliguen a fabricar almenys 120 unitats de perfum i 70 unitats de colònia.
   a) Determineu la funció objectiu i les restriccions. Dibuixeu la regió factible. *[1,25 punts]*
   b) Quantes unitats cal produir de cada versió per a obtenir, un cop venudes, uns ingressos màxims? Quins són aquests ingressos? *[1,25 punts]*

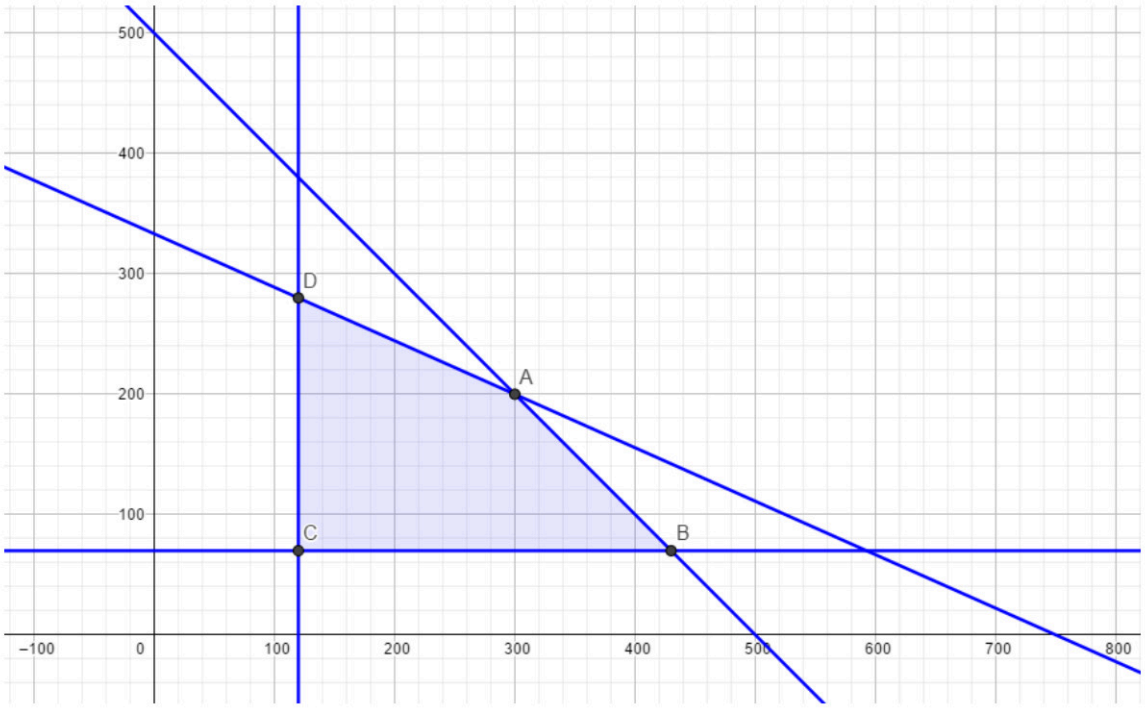
a) Denotem per a x el nombre d'unitats produïdes de perfum i per a y, el nombre d'unitats de colònia. El sistema d'inequacions donat per les restriccions és

$$\begin{cases} x \geq 120 \\ y \geq 70 \\ 10\,x + 10\,y \leq 5.000 \\ 40\,x + 90\,y \leq 30.000 \end{cases}$$

Clarament el podem simplificar i treballar amb el sistema següent:

$$\begin{cases} x \geq 120 \\ y \geq 70 \\ x + y \leq 500 \\ 4\,x + 9\,y \leq 3.000 \end{cases}$$

La funció objectiu és $F(x, y) = 70\,x + 82\,y$ i la regió factible serà:



b) Els vèrtexs de la regió factible són: $A = (300{,}200)$, $B = (430{,}70)$, $C = (120{,}70)$ i $D = (120{,}280)$. Avaluant la funció objectiu als quatre vèrtexs s'obté:

$F(A) = 37.400, \quad F(B) = 35.840\,,\ F(C) = 14.140 \ \ i \ \ F(D) = \ \ 31.360$

Deduïm, per tant, que el benefici màxim s'obté fabricant 300 unitats de perfum i 200 unitats de colònia. El benefici que s'obtindria en aquest cas és de 37.400 euros.

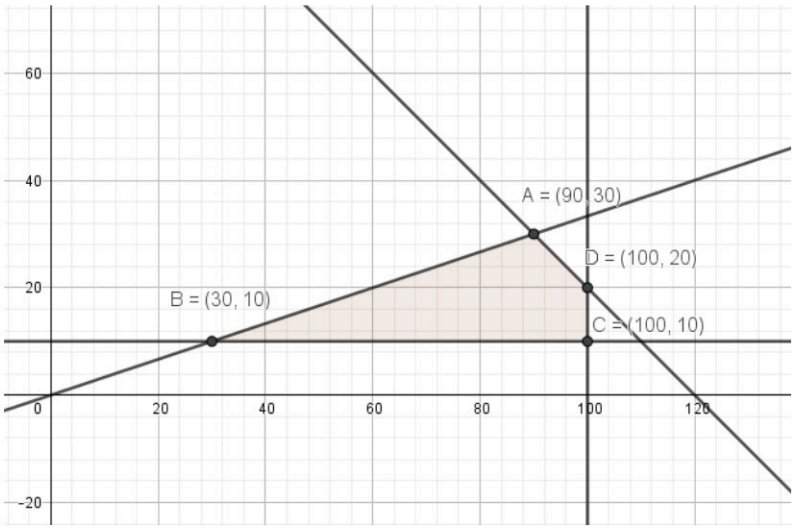
Criteris de correcció: a) Càlcul de les restriccions: 0,5 p. Dibuix de la regió factible: 0,5 p. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 p. b) Obtenció dels vèrtexs: 0,5 p. Obtenció del punt en què s'assoleix el màxim i del benefici màxim: 0,75 p.

12. PAU 2020 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4

4. Un fabricant de mobles de jardí fabrica cadires i taules de fusta d'exterior. Cada cadira li aporta un benefici de 20 € i cada taula un de 25 €. Sabem que cada mes pot produir com a màxim un total de 120 mobles entre els dos productes. També sabem que, com a màxim, pot fabricar 100 cadires i que ha de fabricar un mínim de 10 taules. D'altra banda, el nombre de cadires fabricades ha de ser igual o superior al triple de taules fabricades.
   a) Determineu la funció objectiu i les restriccions. Dibuixeu la regió factible. *[1,25 punts]*
   b) Quina és la producció mensual que li aporta el màxim benefici un cop venuda? Quin és aquest benefici? *[1,25 punts]*

a) Anomenem x el nombre de cadires fabricades i y el nombre de taules fabricades en un mes.
L'enunciat del problema ens dona les restriccions següents:

$$\begin{cases} x + y \leq 120 \\ x \leq 100 \\ y \geq 10 \\ 3y \leq x \end{cases}$$



Els beneficis venen donats per la funció $F(x, y) = 20x + 25y$.

b) Si avaluem la funció en els quatre vèrtexs, tenim que:

$$F(90{,}30) = 2.550\ €$$
$$F(30{,}10) = 850\ €$$
$$F(100{,}10) = 2.250\ €$$
$$F(100{,}20) = 2.500\ €$$

Per tant, la funció objectiu assoleix en la regió factible el seu valor màxim en el punt $(90{,}30)$ i aquest màxim pren el valor 2.550 €.
Així doncs, per maximitzar els beneficis, cal vendre una producció de 90 cadires i 30 taules. Amb aquesta producció s'aconseguiran 2.550 € de benefici.

Criteris de correcció: a) Càlcul de les restriccions: 0,5 p. Dibuix de la regió factible: 0,5 p. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 p. b) Obtenció dels vèrtexs: 0,5 p. Obtenció del punt en què s'assoleix el màxim: 0,5 p. Obtenció del benefici màxim: 0,25 p.

13. PAU 2020 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 3

3. Una fàbrica especialitzada en roba d'esport té problemes amb el subministrament de les fibres. Per satisfer una comanda de samarretes i malles només disposa de 90 km de fibra de polipropilè, 3,2 km de fibra de poliamida i 6,8 km de fibra d'elastà. Ha de fabricar com a mínim 80 samarretes i 50 malles.
Per fabricar cada peça de roba, tant si és una samarreta com si és una malla, calen en total 200 metres de fibra dels quals el 90% són de polipropilè en ambdós casos. En la composició de les samarretes hi ha, a més a més, un 6% de poliamida i un 4% d'elastà i en la composició de les malles hi ha un 2% de poliamida i un 8% d'elastà.
El benefici que el fabricant obté per cada samarreta que fabrica és de 5 € i per cada malla obté un benefici de 3 €.
   a) Determineu la funció objectiu, les restriccions, i dibuixeu la regió de les possibles opcions que té el fabricant per satisfer la comanda amb les fibres disponibles. *[1,25 punts]*
   b) Calculeu quantes samarretes i quantes malles s'han de fabricar perquè el benefici sigui màxim. Quin és aquest benefici? *[1,25 punts]*

a) Les dades del problema són :

		Polipropilè		Poliamida		Elastà
x nombre de samarretes que cal fabricar	90%	180 m	6%	12 m	4%	8 m
y nombre de malles que cal fabricar	90%	180 m	2%	4 m	8%	16 m
Total	$180x + 180y$		$12x + 4y$		$8x + 16y$	

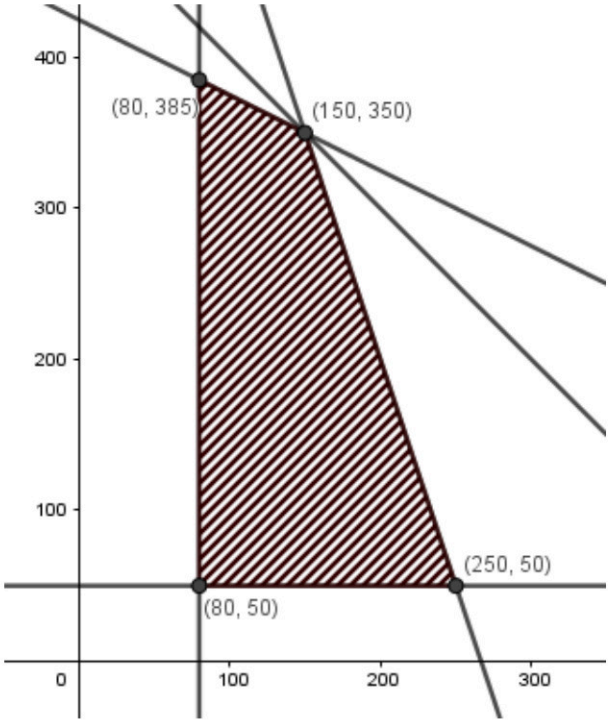
Per tant, les restriccions són:

$$\begin{cases} x \geq 80 \\ y \geq 50 \\ 180x + 180y \leq 90.000 \\ 12x + 4y \leq 3.200 \\ 8x + 16y \leq 6.800 \end{cases}$$

Que simplificant ens queden:

$$\begin{cases} x \geq 80 \\ y \geq 50 \\ x + y \leq 500 \\ 3x + y \leq 800 \\ x + 2y \leq 850 \end{cases}$$

La regió factible és la següent:



I la funció objectiu, que ens dona el benefici, ve donada per $F(x, y) = 5x + 3y$

b) El benefici màxim s'assoleix en un dels vèrtex de la regió factible. Calculem en quin:

A = (80, 50) $F(A) = 550$ €
B = (250, 50) $F(B) = 1.400$ €
C = (80, 385) $F(C) = 1.555$ €
D = (150, 350) $F(D) = 1.800$ €

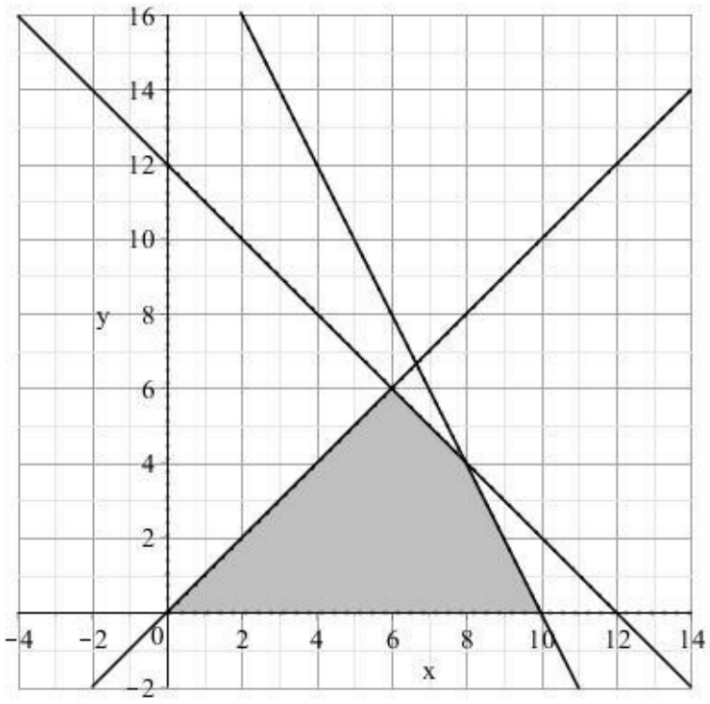
Per tant el benefici màxim és de 1.800 € i s'obté fabricant 150 samarretes i 350 malles.

Criteris de correcció: a) Càlcul de les restriccions: 0,5 p. Dibuix de la regió factible: 0,5 p. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 p. b) Obtenció dels vèrtexs: 0,5 p. Obtenció del punt en què s'assoleix el màxim: 0,25 p. Obtenció del benefici màxim: 0,5 p.

14. PAU 2019 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 6

6. Un forn artesà fa dos tipus de panets, els integrals i els de cereals. En l'elaboració, a més a més de la farina corresponent, es fa servir llevat de massa mare i aigua. La quantitat de llevat de massa mare i d'aigua que s'utilitza en l'elaboració de cada panet depèn de si es tracta d'un panet integral o de cereals.

Volem saber quants panets de cada tipus es poden fer. Després de comprovar la quantitat de massa mare i d'aigua de què es disposa, i tenint en compte que la quantitat de panets de cereals no pot superar la de panets integrals, s'obté la regió següent amb totes les possibilitats.



En el gràfic, l'eix de les x representa el nombre de panets integrals, i el de les y, el nombre de panets de cereals.

a) Escriviu les inequacions que donen lloc a aquesta regió factible. [1 punt]

b) Si els panets integrals es venen a 8 € cada unitat i els de cereals a 10 €, quants panets de cada tipus cal vendre per a obtenir els màxims ingressos? Quins són aquests màxims ingressos? [1 punt]

a) Les rectes que limiten la regió factible són:

- Recta que passa per $(10,0)$ i $(8,4)$. Té una pendent de $m = \frac{4-0}{8-10} = -2$. Per tant, és de la forma $y = -2x + n$. Sabent que passa pel punt $(10,0)$ trobem que $n = 20$ i que, per tant, la recta és $y = -2x + 20$.
- Recta que passa per $(12,0)$ i $(6,6)$. Té una pendent de $m = \frac{6-0}{6-12} = -1$. Per tant, és de la forma $y = -x + n$. Sabent que passa pel punt $(12,0)$ trobem que $n = 12$ i que, per tant, la recta és $y = -x + 12$.
- La recta que passa per $(0,0)$ i $(1,1)$ és $y = x$.
- L'eix d'abscisses $y = 0$ i l'eix d'ordenades $x = 0$.

Substituint algun dels punts de la regió factible a les rectes, s'obtenen les inequacions següents:

$$\begin{cases} y \leq -2x + 20 \\ y \leq -x + 12 \\ y \leq x \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

b) La recaptació és la funció objectiu i és de la forma $R(x, y) = 8x + 10y$. La recaptació màxima s'assoleix en un dels vèrtex de la regió factible. Calculem la recaptació en cadascun dels vèrtex per veure en quin s'assoleix el màxim:

$A = (0, 0)$ Recaptació $R(A) = 0$ €
$B = (6, 6)$ Recaptació $R(B) = 108$ €
$C = (8, 4)$ Recaptació $R(C) = 104$ €
$D = (10, 0)$ Recaptació $R(D) = 80$ €

La recaptació màxima és de 108 € i s'obté amb 6 panets integrals i 6 panets de cereals.

Criteris de correcció: a) Obtenció del sistema d'inequacions: 1 p. b) Obtenció de la funció objectiu: 0,25 p. Obtenció dels vèrtexs: 0,25 p. Obtenció dels valors de la funció objectiu en els vèrtexs: 0,25 p. Obtenció de la recaptació màxima: 0,25 p.

15. PAU 2019 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 5

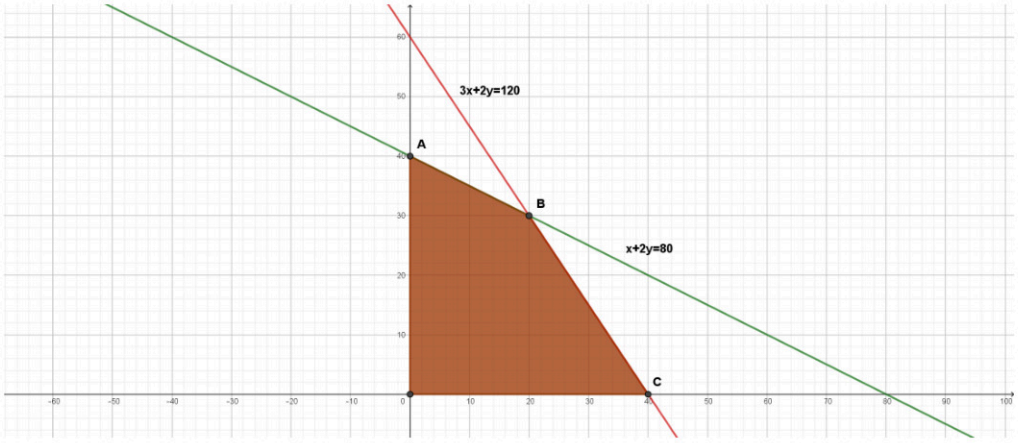
5. En una fàbrica es disposa de 80 kg d'acer i 120 kg d'alumini per fabricar bicicletes de muntanya i de passeig que es vendran a 200 € i 150 €, respectivament. Per a fabricar una bicicleta de muntanya són necessaris 1 kg d'acer i 3 kg d'alumini, i per a fabricar-ne una de passeig, 2 kg de cada un dels dos metalls.
   a) Determineu la funció objectiu i les restriccions, i dibuixeu la regió factible. *[1,25 punts]*
   b) Calculeu quantes bicicletes de cada tipus s'han de fabricar per a obtenir el màxim benefici i digueu quin és aquest benefici. *[0,75 punts]*

Segons l'enunciat el sistema d'inequacions és

$$\begin{cases} x + 2y \leq 80 \\ 3x + 2y \leq 120 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

on x representa el nombre de bicicletes de muntanya que cal fabricar i y el nombre de bicicletes de passeig.

La regió del pla solució del sistema d'inequacions és:



Es tracta d'una regió tancada del pla amb vèrtexs als punts $A = (0,40)$, $B = (20,30)$, $C = (40,0)$ i $D = (0,0)$.

La funció que dona el benefici és: $B(x, y) = 200x + 150y$.

El màxim s'assoleix en un dels vèrtexs de la regió solució. Si avaluem la funció anterior en cada un dels vèrtexs:

$B(0,0) = 0$
$B(0,40) = 6.000$
$B(20,30) = 8.500$
$B(40,0) = 8.000$

Per tant, el benefici màxim és de 8.500 € i s'obté si es fabriquen 20 bicicletes de muntanya i 30 de passeig.

Criteris de correcció: a) Càlcul de les restriccions: 0,5 p. Dibuix de la regió factible: 0,5 p. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 p. b) Obtenció dels vèrtexs: 0,25 p. Obtenció del punt en què s'assoleix el màxim: 0,25 p. Obtenció del benefici màxim: 0,25 p.

---

16. PAU 2019 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 2

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

17. PAU 2018 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 2

2. En acabar un curs de pintura, els alumnes reben com a obsequi un estoig amb retoladors i colors. Es regalen dos tipus d'estoigs: els vermells, que contenen 1 retolador i 2 colors i costen 9 €, i els verds, que porten 3 retoladors i 1 color i costen 15 €. L'escola disposa de 200 retoladors i 100 colors per a omplir els estoigs. Necessita preparar almenys 40 estoigs i que el nombre d'estoigs vermells no superi el nombre d'estoigs verds. Amb aquestes dades, l'escola vol calcular el preu que haurà de pagar per aquests obsequis.

a) Determineu la funció objectiu i les restriccions, i dibuixeu la regió de les possibles opcions de l'escola.
[1,25 punts]

b) Calculeu quants estoigs de cada tipus cal preparar perquè la despesa sigui mínima i digueu quina és aquesta despesa mínima.
[0,75 punts]

a) Les dades del problema són:

	Retoladors	Colors	Preu
x = nombre d'estoigs vermells	1	2	9
y = nombre d'estoigs verds	3	1	15
Total	$x + 3y$	$2x + y$	$9x + 15\,y$

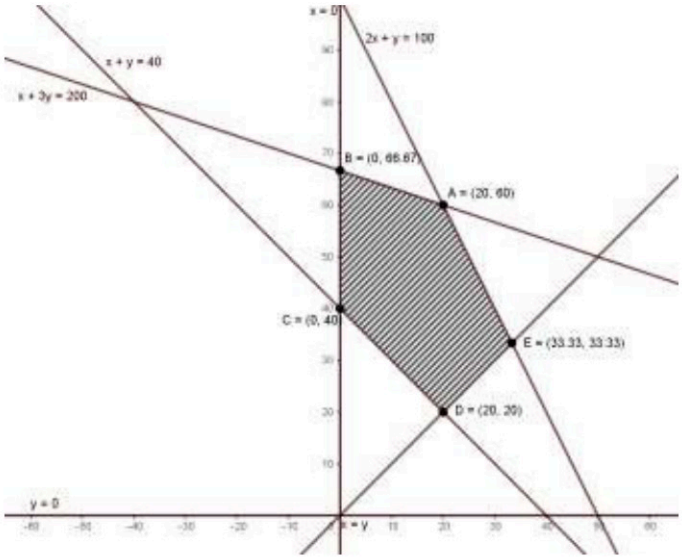
Les restriccions venen donades per

$$\begin{cases} x + y \geq 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La funció objectiu ve donada per l'expressió: Despesa $(x, y) = 9x + 15y$.

I la regió factible és:



b) Tenim quatre vèrtexs i sabem que la despesa mínima s'assoleix en un dels vèrtexs de la regió factible. Calculem en quin:

A = (20, 60), despesa (A) = 1.080 €
B = $(0, \frac{200}{3})$, despesa (B) = 1.000 €
C = (0, 40), despesa (C) = 600 €
D = (20, 20), despesa (D) = 480 €
E = $(\frac{100}{3}, \frac{100}{3})$, despesa (E) = 800 €

Per tant, la despesa mínima possible és de 480 € i correspon a fer 20 estoigs vermells i 20 de verds.

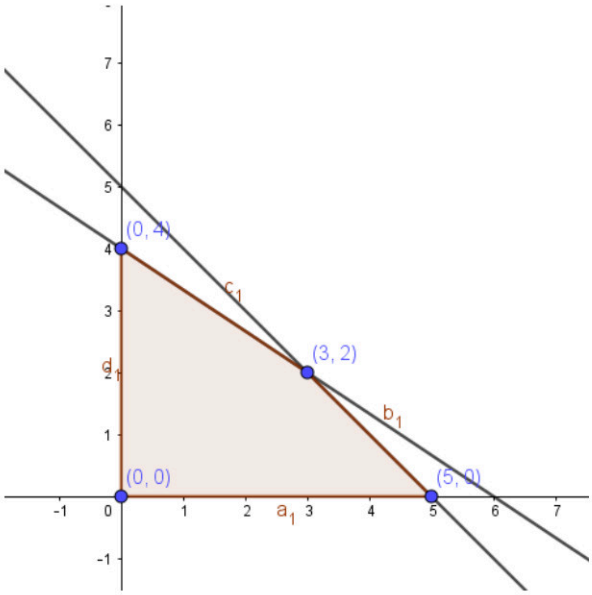
Criteris de correcció: a) Càlcul de les restriccions: 0,5 p. Dibuix de la regió factible: 0,5 p. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 p. b) Obtenció dels vèrtexs: 0,25 p. Obtenció del punt en què s'assoleix el mínim: 0,25 p. Obtenció de la despesa mínima: 0,25 p.

18. PAU 2018 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4

4. Una empresa de materials per a cotxes fabrica dos models d'una peça determinada, que anomenarem A i B. Cada model es fabrica en una hora, mitjançant un procés que consta de dues fases. En la primera fase del procés s'hi destinen 5 treballadors, i en la segona, 12. Per a fabricar cada model, en la primera fase es necessita un treballador per a cada peça. En canvi, en la segona fase es necessiten dos treballadors per al model A i 3 treballadors per al model B. El benefici que s'obté és de 40€ pel model A i 50€ pel model B.
   a. Determineu la funció objectiu i les restriccions, i dibuixeu la regió factible. *[1,25 punts]*
   b. Quantes peces de cada model per hora s'hauran de fabricar per tal que el benefici sigui màxim? Quin és aquest benefici màxim? *[0,75 punts]*

a) Anomenem x la quantitat de peces del model A i y la quantitat de peces del model B.
L'enunciat del problema ens condueix a les restriccions següents:

$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ 2x + 3y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Els beneficis venen donats per la següent funció objectiu: $B(x, y) = 40x + 50y$.

b) Si avaluem la funció objectiu en els quatre vèrtexs obtenim:
$B(0,0) = 0€$,
$B(5,0) = 200€$,
$B(0,4) = 200€$ i
$B(3,2) = 220€$.

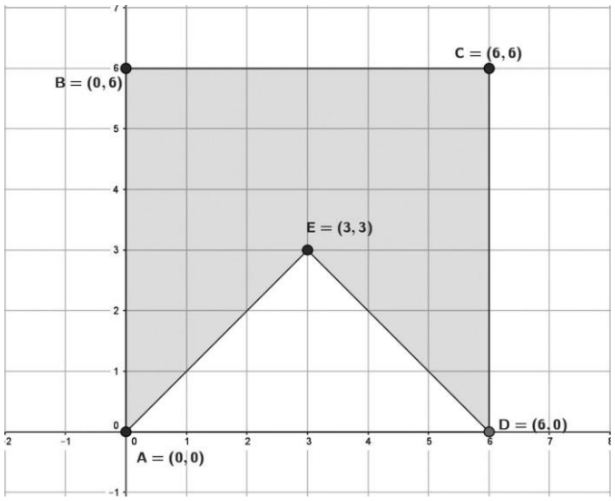
Per tant, la funció objectiu assoleix en la regió factible el seu valor màxim en el punt (3,2) i aquest màxim pren el valor 220€. Així doncs, per a maximitzar els beneficis cal fabricar 3 peces del model A i 2 peces del model B. Amb aquesta fabricació l'empresa aconseguirà 220 euros de beneficis.

Criteris de correcció: Obtenció de les restriccions: 0,5 p. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 p. Obtenció dels vèrtexs i dibuix de la regió factible: 0,5 p. Obtenció del punt pel qual s'assoleix el màxim: 0,5 p. Obtenció del benefici màxim: 0,25 p.

---

19. PAU 2018 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 2

2. Considereu el pentàgon ABCDE de la figura següent:



a) Justifiqueu que la regió ombrejada no es pot representar mitjançant un sistema d'inequacions. *[1 punt]*
b) Escriviu el sistema d'inequacions que determina els punts de la frontera i de l'interior del triangle AED. *[1 punt]*

a) Si considerem la recta que passa pels punts A, E i C, d'equació $y = x$, determina dos semiplans $y < x$ i $y > x$, i cap dels dos pot contenir alhora els punts B i D.

b) La recta AE es $y = x$. La recta ED es $y = -x + 6$. La recta AD es $y = 0$. El sistema d'inequacions es:

$$\begin{cases} y \leq x \\ y \leq -x + 6 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Criteris de correcció: a) Raonament correcte: 1 p. b) Equacions: 0,5 p. Sistema d'inequacions: 0,5 p.

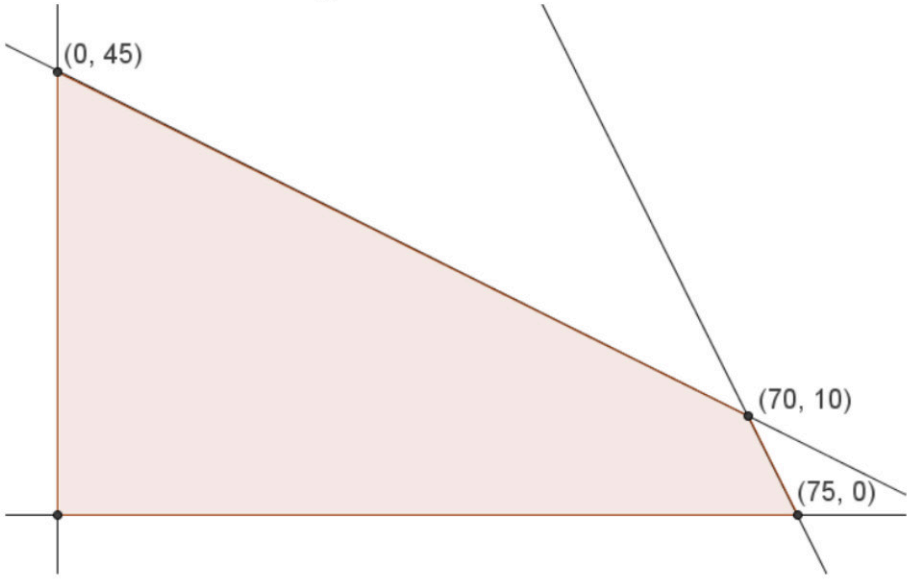
---

20. PAU 2017 · Setembre · Sèria 2 · Exercici 1

1. Una empresa fabrica dos tipus de gelats G1 i G2. En el procés d'elaboració utilitza dos tipus d'ingredients, A i B. Disposa de 90 kg de l'ingredient A i 150 kg de l'ingredient B. Per a fabricar una capsa de gelats del tipus G1, empra 1 kg de l'ingredient A i 2 kg de l'ingredient B. Per a fabricar una capsa de gelats del tipus G2, empra 2 kg de l'ingredient A i 1 kg de l'ingredient B. Si la capsa de gelats del tipus G1 es ven a 10 euros i la de tipus G2 es ven a 15 euros, quantes capses de gelat de cada tipus cal fabricar per a maximitzar els ingressos? *[2 punts]*

Anomenem x la quantitat de capses de gelat del tipus G1 i y la quantitat de capses de gelat del tipus G2 que fabricarà l'empresa.
L'enunciat del problema ens condueix a les restriccions següents:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 90 \\ 2x + y \leq 150 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Els ingressos venen donats per la funció $f(x,y)=10x+15y$. Estudiem el valor que pren la funció objectiu en els vèrtexs de la regió factible:

vèrtexs	$f(x,y)=10x+15y$
$(0,0)$	$f(0,0)=0$
$(0,45)$	$f(0,45)=675$
$(75,0)$	$f(75,0)=750$
$(70,10)$	$f(70,10)=850$

La funció objectiu assoleix en la regió factible el seu valor màxim en el punt $(70,10)$ i aquest màxim pren el valor 850. Així doncs, per a maximitzar els ingressos cal fabricar 70 capses de gelat del tipus G1 i 10 capses de gelat del tipus G2. Amb aquesta fabricació l'empresa aconseguirà 850 euros d'ingressos, que és el valor màxim.

Criteris de correcció: Determinació de les restriccions: 0,5 p. Determinació de la funció objectiu: 0,5 p. Determinació dels vèrtexs: 0,5 p. Determinació del màxim: 0,5 p.

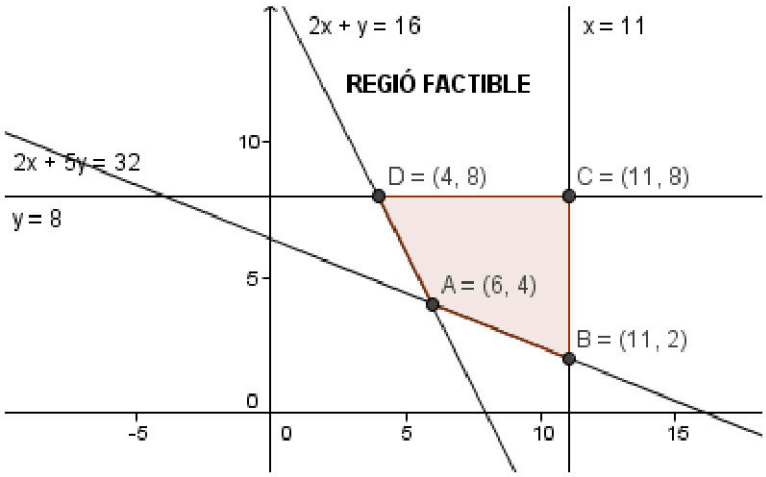
---

21. PAU 2017 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 5

5. Una companyia aèria vol organitzar per aquest estiu un pont aeri entre l'aeroport de Barcelona - el Prat i el de Palma de Mallorca, amb places suficients de passatge i càrrega, per a transportar com a mínim 1.600 persones i 96 tones d'equipatge i mercaderies. Per a fer-ho, té a la seva disposició 11 avions del tipus A, que poden transportar 200 persones i 6 tones d'equipatge i mercaderies cadascun, i 8 avions del tipus B que poden transportar 100 persones i 15 tones cadascun. Si la contractació d'un avió del tipus A costa 4.000 euros i la d'un avió del tipus B en costa 1.000,
   a. Determineu la funció objectiu, les restriccions i dibuixeu la regió de les possibles opcions que té la companyia. *[1 punt]*
   b. Calculeu el nombre d'avions de cada tipus que cal contractar perquè el cost sigui el mínim i determineu quin és aquest cost mínim. *[1 punt]*

a) Taula de dades:

Avions	x= tipus A	y= tipus B	Mínims
Persones	200	100	1600
Tones d'equipatge i mercaderies	6	15	96
Disponibles	11	8	
Preu (euros)	4000	1000	



La funció objectiu ve donada per $\text{Cost}(x, y) = 4000x + 1000y$ i les restriccions venen donades per les inequacions:

$2x + y \geq 16$

b) Veiem on s'assoleix el cost mínim:

$\text{Cost}(A) = 4000 \cdot 6 + 1000 \cdot 4 = 28000$ €

$\text{Cost}(B) = 4000 \cdot 11 + 1000 \cdot 2 = 46000$ €

$\text{Cost}(C) = 4000 \cdot 11 + 1000 \cdot 8 = 52000$ €

$\text{Cost}(D) = 4000 \cdot 4 + 1000 \cdot 8 = 24000$ €

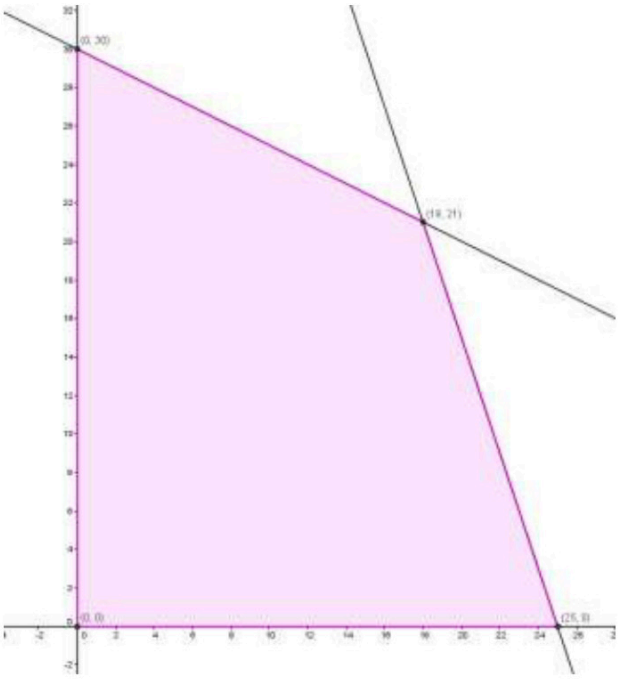
Així doncs, cal contractar 4 avions del tipus A i 8 del tipus B per obtenir un cost mínim de 24.000 euros.

Criteris de correcció: a) Determinació de les restriccions: 0,5 p. Dibuix de les restriccions: 0,25 p. Determinació de la funció objectiu: 0,25 p. b)Determinació dels vèrtexs: 0,5 p. Determinació del mínim: 0,5 p.

22. PAU 2017 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 1

2. [2 punts]

Denotem per a x i y el nombre d'anells produïts dels models A i B, respectivament. La restricció dels grams de plata disponibles s'expressa com $6x + 2y \leq 150$ i la del nombre d'hores com $3x + 6y \leq 180$. A més cal que $x \geq 0,\ y \geq 0$. La regió factible és per tant:

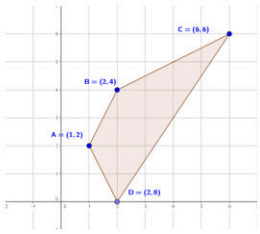


i té vèrtexs: A=(0,0), B=(25,0), C=(18,21) i D=(0,30). La funció objectiu és d'altra banda $F(x, y) = 35x + 55y$. Avaluant-la als quatre vèrtexs s'obté $F(A) = 0, F(B) = 875, F(C) = 1785$ i $F(D) = 1650$. Deduïm, per tant, que el benefici màxim s'obté produint 18 anells del model A i 21 anells del model B i que és de 1.785 euros.

Criteris de correcció. Determinació de les restriccions: 0,5 p. Determinació de la funció objectiu: 0,5 p. Determinació dels vèrtexs: 0,5 p. Determinació del màxim: 0,5 p.

23. PAU 2016 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 6

6. Considereu el quadrilàter de la figura adjunta:



(a) Definiu les condicions que han de complir els punts del quadrilàter ombrejat, incloent-hi la frontera. (1,5 punts)

Les rectes que defineixen els segments són, respectivament: recta AD: $y = -2x + 4$, recta AB: $y = 2x$, recta BC: $y = \frac{1}{2}x + 3$, recta CD: $y = \frac{3}{2}x - 3$. Per tant, els punts del quadrilàter han de verificar:

$$\left.\begin{array}{rcl} y & \geq & -2x + 4 \\ y & \leq & 2x \\ y & \leq & \frac{1}{2}x + 3 \\ y & \geq & \frac{3}{2}x - 3 \end{array}\right\}$$

(b) Justifiqueu analíticament si el punt $P = (4, 3)$ pertany al quadrilàter. (0,5 punts)

Cal comprovar que $(4, 3)$ compleix les quatre condicions.

24. PAU 2016 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 6

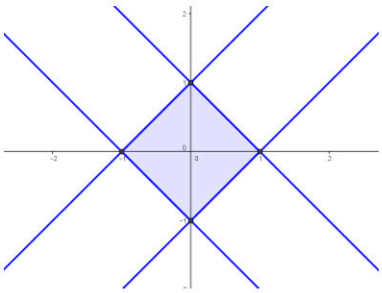
6. Tenim quatre rectes: la recta r_1 passa pels punts $(-1,0)$ i $(0,1)$; la recta r_2 passa per $(-1,0)$ i $(0,-1)$. r_3 passa per $(1,0)$ i per $(0,1)$. Finalment, r_4 passa per $(1,0)$ i $(0,-1)$.

   (a) Escriviu les inequacions que compleixen els punts de la frontera i de l'interior del quadrat que determinen aquestes quatre rectes i dibuixeu-lo. (1 punt)

Les inequacions són:

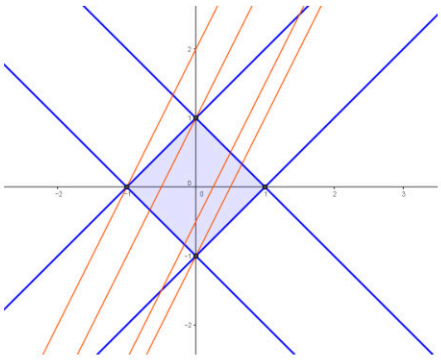
$$\left.\begin{array}{rcl} y & \leq & x+1 \\ y & \geq & x-1 \\ y & \leq & -x+1 \\ y & \geq & -x-1 \end{array}\right\}.$$

Gràficament, el quadrat és:



   (b) Determineu el valor màxim de k que fa que la recta $y = 2x + k$ tingui algun punt en comú amb el quadrilàter anterior. (1 punt)

El valor màxim, i el mínim, de k es donarà en un dels vèrtexs del quadrat. Si posem $k = y - 2x$ Tindrem que $k(-1,0) = 2$, $k(1,0) = -2$, $k(0,1) = 1$, $k(0,-1) = -1$. Per tant, el valor màxim és $k = 2$. També es pot veure gràficament:



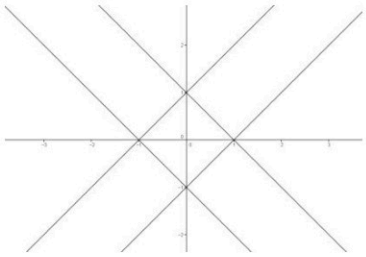
25. PAU 2016 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 5

5. Considereu la regió del pla limitada per les rectes següents:

$$y = x + 1\,,\ y = -x + 1\,,\ y = x - 1\,,\ y = -x - 1$$

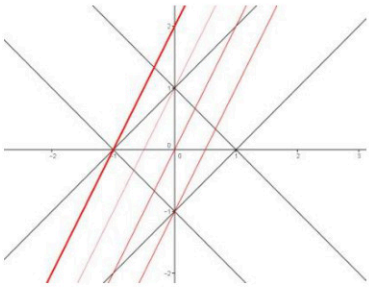
a. Dibuixeu-la i calculeu-ne els vèrtexs. [1 punt]

Els vèrtexs del quadrat resultant són, sense necessitat de càlculs, (1,0), (-1,0), (0,1), (0-1).



b. Considereu ara la família de rectes $y = 2x + k$. Calculeu en quin punt de la regió s'obté el valor més gran de *k*, i determineu aquest valor. [1 punt]

Es pot veure gràficament que correspon al punt (-1,0), on *k* = 2. També es veu substituint els valors dels vèrtexs a la família de rectes.



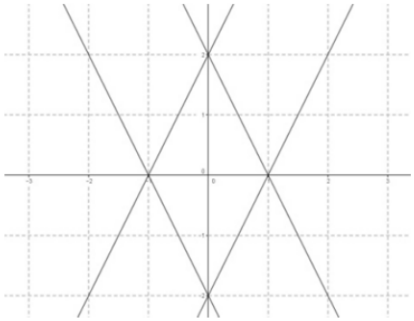
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

26. PAU 2015 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 6

6. Considereu la regió del pla limitada per les rectes

$$y = 2x + 2\,,\ y = -2x + 2\,,\ y = 2x - 2\,,\ y = -2x - 2$$

a. Dibuixeu-la i calculeu-ne els vèrtexs. [1 punt]



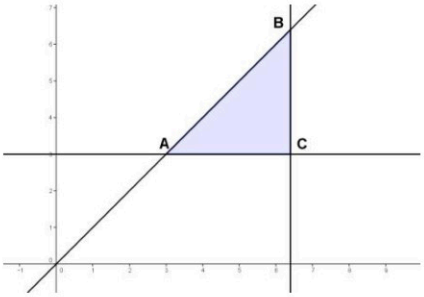
Els vèrtexs són (1,0), (0,2), (-1,0) i (0,-2).

b. Considereu ara la família de rectes $y = x + k$. Calculeu en quin punt de la regió s'obté el valor més gran de k, i determineu aquest valor. [1 punt]

Del dibuix es dedueix que el valor màxim és k = 2.

27. PAU 2015 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 6

6. Una refineria de petroli produeix gasolina i gasoil. En el procés de refinació que s'hi porta a terme s'obté més gasolina que gasoil. A més, per a cobrir la demanda cal produir com a mínim 3 milions de litres de gasoil al dia, mentre que la demanda de gasolina és de 6,4 milions de litres al dia, com a màxim.
La gasolina té un preu d'1,9 €/L, i el gasoil val 1,5 €/L. Tenint en compte que es ven la totalitat de la producció, determineu quants litres de gasolina i de gasoil cal produir al dia per a obtenir el màxim d'ingressos. *[2 punts]*



Anomenarem *x* als milions de litres de gasolina, i *y* als milions de litres de gasoil. Les restriccions són:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq y \\ y \geq 3 \\ x \leq 6,4 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\}$$

. La funció objectiu serà, en milions d'euros, $I(x,y) = 1,9x + 1,5y$. Els vèrtexs són: A(3,3), B(6.4,6.4) i C(6.4,3). Els ingressos respectius són: $I(A) = 10,2$, $I(B) = 21,76$, $I(C) = 16,6$. Per tant, el màxim benefici s'obtindrà amb la producció de 6,4 milions de litres de cada tipus de carburant.

Una altra interpretació és considerar $x > y$. En aquest cas no existeix màxim de I(x,y) a la regió factible.

---

28. PAU 2015 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 6

6. Considereu el triangle de vèrtexs A(-2,0), B(0,3) i C(2,-1).
   a. Determineu les condicions que ha de complir un punt per a no ser fora del triangle. [1 punt]

Recta AB: $y = \frac{3}{2}x + 3$. Recta BC: $y = -2x + 3$. Recta AC: $y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$. Per tant, cal que es verifiqui:

$$\left.\begin{array}{l} y \leq \frac{3}{2}x + 3 \\ y \leq -2x + 3 \\ y \geq -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2} \end{array}\right\}.$$

   b. Justifiqueu analíticament si els punts P(1,1), Q(-1,1) i R(-1,2) són interiors, exteriors o es troben sobre els costats del triangle. [1 punt]

L'interior del triangle està format pels punts que verifiquen

- P pertany a la recta BC.
- Q verifica les tres inequacions. Per tant, és interior al triangle.
- R no verifica la primera inequació. Per tant, és exterior al triangle.

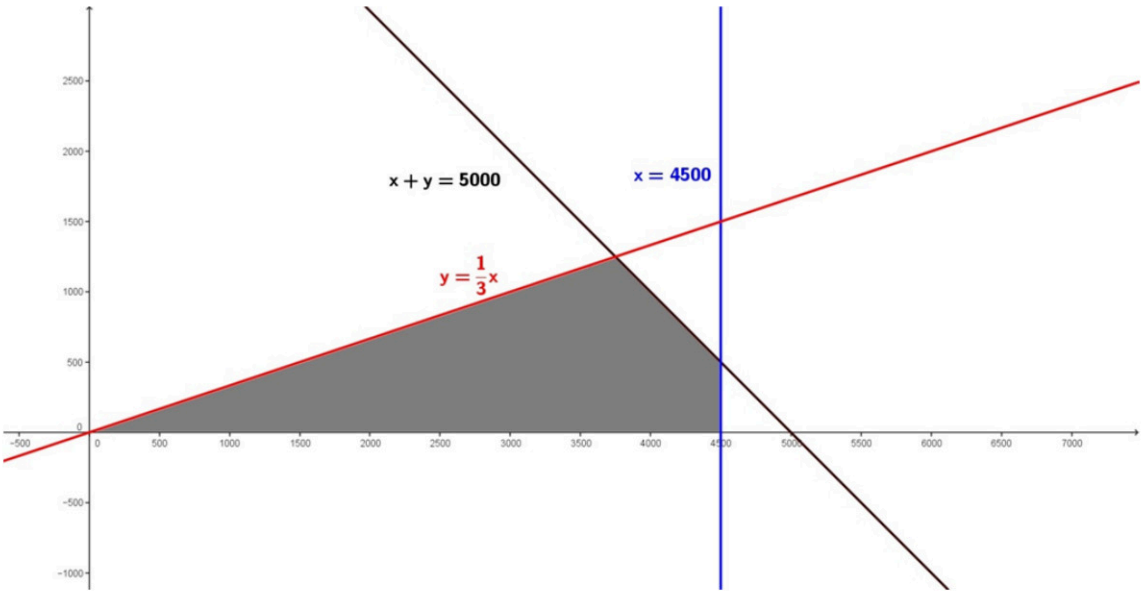
29. PAU 2014 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 5

5. Una companyia aèria programa una oferta d'un màxim de 5.000 places, entre turista i preferent. Per cada plaça de classe turista obté uns guanys de 30 €, mentre que per cadascuna de classe preferent el benefici és de 40 €. Per raons tècniques no és possible oferir més de 4.500 places en classe turista, i el nombre de places de preferent no poden superar la tercera part de les de classe turista. Calculeu quantes places de cada classe cal oferir per a maximitzar els guanys. *[2 punts]*

Si anomenem x al nombre de places en classe turista, i y les de preferent, les condicions del problema es tradueixen com:

$$\left.\begin{array}{c} x+y\le 5000 \\ x\le 4500 \\ y\le \frac{1}{3}x \\ x\ge 0, y\ge 0 \end{array}\right\},$$

i els beneficis responen a la funció B(x) = 30x + 40y. Dibuixant les dades del problema obtindrem:



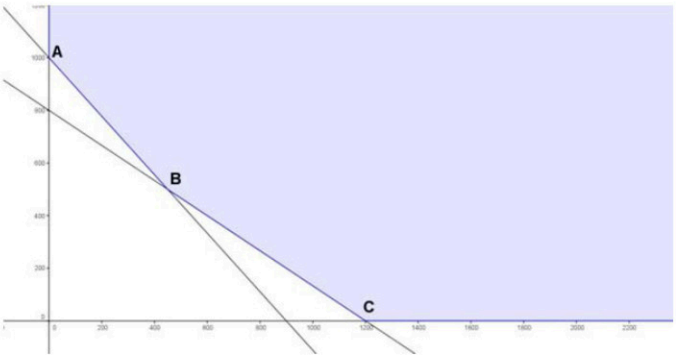
Els vèrtexs del quadrilàter són, en sentit horari, (0,0), (3750,1250), (4500,500), (4500,0). Els beneficis corresponents són: B(0,0) = 0, B(3750,1250) = 162.500, B(4500,500) = 155.000, B(4500,0) = 135.000. Per tant, els màxims beneficis s'obtenen programant 3750 places de turista i 1250 en preferent.

30. PAU 2014 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 5

5. Hem de fertilitzar els terrenys d'una finca utilitzant dos adobs A i B. El cost de l'adob A és de 0,9 €/Kg, i l'adob B costa 1,5 €/Kg. L'adob A conté un 20% de nitrogen i un 10% de fòsfor, mentre que l'adob B en conté un 18% i un 15%, respectivament. Per tal de fertilitzar els terrenys correctament ens cal un mínim de 180 kg de nitrogen i 120 Kg de fòsfor.
   a. Si anomenem x els kilograms d'adob A i y els kilograms d'adob B, escriviu el sistema d'inequacions que satisfà les condicions anteriors. *[1 punt]*
   b. Quina és la despesa mínima que hem de fer si volem fertilitzar els terrenys de la finca correctament? *[1 punt]*

a. El sistema és:
$$\left.\begin{array}{l} 0,2x+0,18y\geq 180 \\ 0,1x+0,15y\geq 120 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right\}.$$

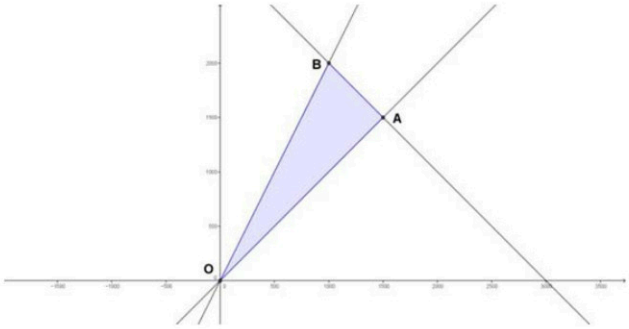
b. Els vèrtexs de la regió factible són $A(0,1000)$, B(450,500), C(1200,0). La regió factible és oberta. La funció objectiu és $z=0,9x+1,5y$, que ens els vèrtexs pren els valors $z(A)=1500$, $z(B)=1155$, $z(C)=1080$. Per tant, la despesa mínima serà de 1080 €, si fertilitzem amb 1200 Kg. de l'adob A.



31. PAU 2014 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 2

2. Una empresa d'informàtica fabrica ordinadors portàtils i de sobretaula i ven tots els que fabrica. L'empresa té capacitat per a fabricar 3000 ordinadors. Per qüestions de mercat, el nombre d'ordinadors de sobretaula no pot ser inferior a la meitat del nombre de portàtils, però tampoc pot superar el nombre de portàtils. L'empresa guanya 100 € per cada ordinador de sobretaula, i un 20% més en la venda de cada portàtil. Quants ordinadors de cada classe ha de fabricar per tal de maximitzar els seus beneficis? *[2 punts]*

Anomenarem x al nombre d'ordinadors de sobretaula, i y al de portàtils. Les restriccions que imposa el problema seran, doncs,



$$\left.\begin{array}{r} x+y\le 3000 \\ x\ge \dfrac{y}{2} \\ x\le y \\ x\ge 0, y\ge 0 \end{array}\right\}.$$

La representació gràfica de la regió factible és la que es veu al costat. Els seus vèrtexs són: O(0,0), A(1500,1500), B(1000,2000). La funció que ens dóna els guanys de l'empresa serà $G(x,y)=100x+120y$ que avaluada en els vèrtexs, ens dóna:

$$G(0,0)=0$$
$$G(1500,1500)=330000$$
$$G(1000,2000)=340000$$

Per tant, els màxims guanys s'obtenen produint 1000 ordinadors de sobretaula i 2000 portàtils.

$(2,\ 3)$ $(0,\ -1)$ $(1,\ 0)$

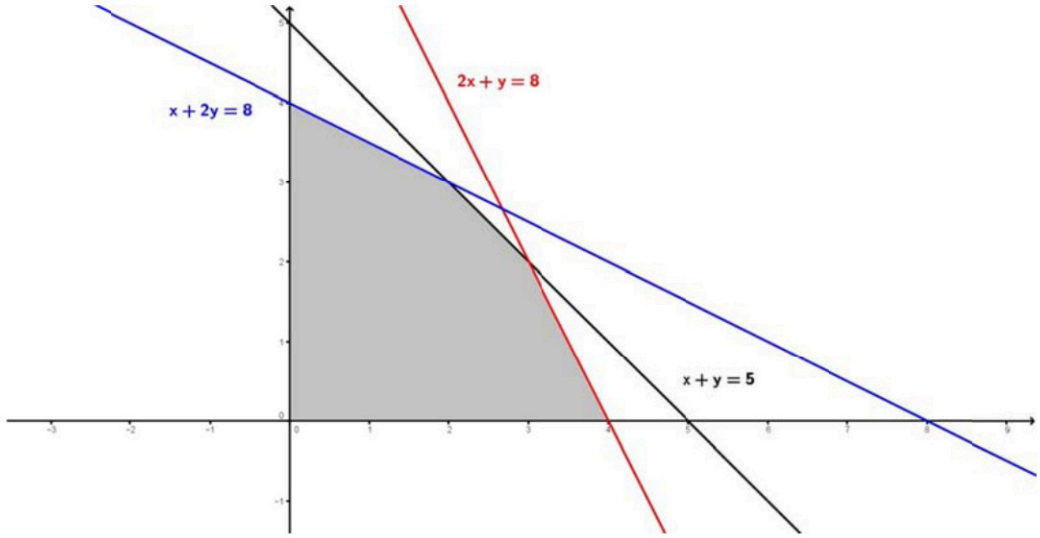
32. PAU 2013 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 5

5. Un florista disposa de 50 margarides, 80 roses i 80 clavells, i en fa rams de dues classes: per a uns fa servir 10 margarides, 20 roses i 10 clavells. Per a l'altra classe de rams fa servir 10 margarides, 10 roses i 20 clavells. La primera classe de rams es ven a 40 €, mentre que la segona es ven a 50 €. Quants rams de cada classe ha de fer si vol ingressar el màxim possible. *[2 punts]*

Si anomenem x al nombre de rams del primer tipus, i y al nombre de rams del segon tipus, les condicions del problema es tradueixin a:

$$\left.\begin{array}{r} 10x+10y\le 50 \\ 20x+10y\le 80 \\ 10x+20y\le 80 \\ x\ge 0, y\ge 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c} x+y\le 5 \\ 2x+y\le 8 \\ x+2y\le 8 \\ x\ge 0, y\ge 0 \end{array}\right\}.$$

Dibuixant les dades del problema obtenim:



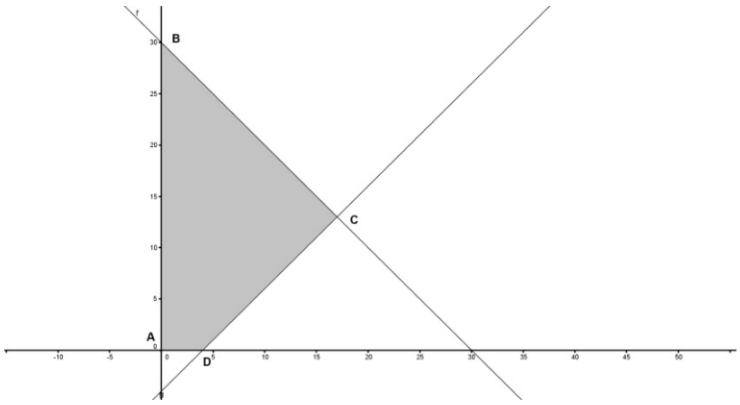
Els cinc vèrtexs són, en sentit horari: (0,0), (0,4), (2,3), (3,2) i (4,0). Els beneficis corresponen a la funció objectiu B(x,y) = 40x + 50y. En cada cas els beneficis són B(0,0) = 0, B(0,4) = 200, B(2,3) = 230, B(3,2) = 220, B(4,0) = 160. Per tant, els ingressos més grans s'obtenen fabricant 2 rams del primer tipus i 3 del segon tipus.

Criteris de correcció: Plantejament de les inequacions: 1 p. Càlcul dels vèrtexs: 0.5 p. Dibuix: 0.25 p. Càlcul del valor màxim: 0,25 p.

33. PAU 2013 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 6

6. Tinc un problema: fabrico televisors LED, que em deixen un benefici de 100 € cadascun, i televisors de plasma, que em donen la meitat de benefici unitari. No puc produir més de 30 televisors al dia, i la diferència entre la producció dels LED menys els de plasma és, com a màxim, de 4 unitats. Quants he de produir de cada per a guanyar el màxim? *[2 punts]*

Si anomenem x al nombre de televisors LED que fabrico i y al nombre de televisors de plasma, les inequacions que defineixen la regió factible de la figura són les següents:



$$\left.\begin{array}{c} x+y\le 30 \\ x-y\le 4 \\ x,y\ge 0 \end{array}\right\}.$$

Els vèrtexs de la regió factible són A(0,0), B(0,30), C(17,13), D(4,0). La funció objectiu és $F(x)=100x+50y$. Els valors de la funció objectiu en aquests vèrtexs és F(A)=0, F(B)=1500, F(C)=2350, F(D)=400. Per tant, per a guanyar el màxim cal produir 17 TV LED i 13 TV de plasma.

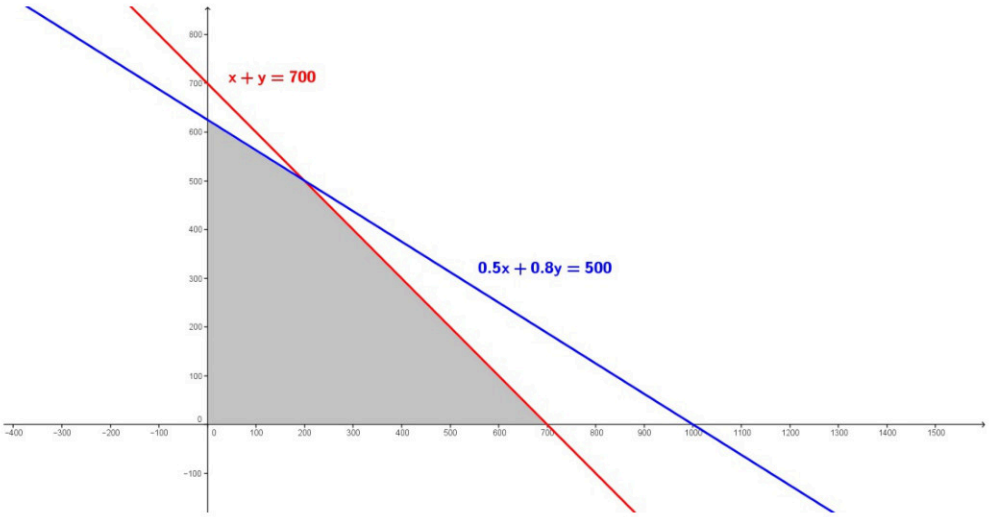
34. PAU 2013 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 5

5. Un botiguer va al mercat central amb la seva furgoneta, que pot carregar 700 Kg., i amb 500 € a la butxaca, a comprar fruita per a la seva botiga. Hi troba pomes a 0,80 €/Kg i taronges a 0,50 €/Kg. Calcula que podrà vendre les taronges a 0,58 €/Kg, i les pomes a 0,90 €/Kg. Quina quantitat de pomes i de taronges li convé comprar si vol obtenir el benefici més gran possible?. *[2 punts]*

Si anomenem x i y a les quantitats de taronges i de pomes respectivament que comprarà, les dades es tradueixen en les inequacions:

$$\left.\begin{array}{r} x+y\le 700 \\ 0,5x+0,8y\le 500 \\ x\ge 0, y\ge 0 \end{array}\right\},$$

mentre que els guanys vindran donats per la funció $B(x,y)=0,08x+0,1y$. Dibuixant les dades del problema obtindrem:



Els vèrtexs del quadrilàter són, en sentit horari, (0,0), (0,625), (200,500), (700,0). Els guanys corresponents són: G(0,0) = 0, G(0,625) = 62,5, G(200,500) = 66, G(700,0) = 56. Per tant, els màxims beneficis s'obtenen comprant 200 kg de taronges i 500 kg de pomes.

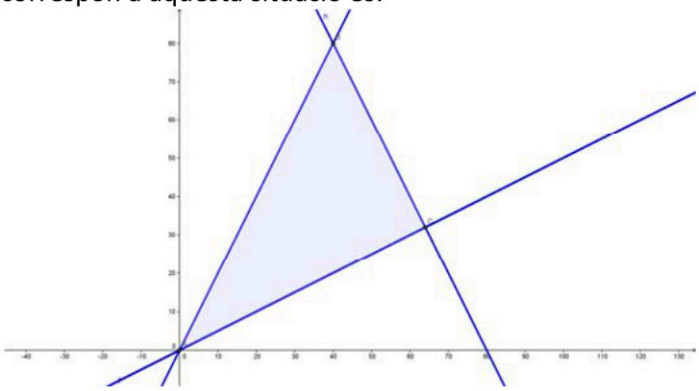
35. PAU 2012 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 4

4. Una petita fàbrica produeix formatge i mantega. Per fabricar un formatge es necessiten 10 litres de llet, mentre que per fabricar una pastilla de mantega se'n necessiten 5. La quantitat de formatges produïts no pot superar el doble de la quantitat de pastilles de mantega. De la mateixa manera, la quantitat de pastilles de mantega tampoc no pot superar el doble de la quantitat de formatges produïts. En total disposen de 800 litres de llet. Després de la venda, per cada formatge s'obté un benefici de 5€ i per cada pastilla de mantega s'obté un benefici de 2€. Determineu quina quantitat de formatges i quina quantitat de pastilles de mantega cal produir per tal que el benefici total després de la venda sigui màxim. Quin benefici s'obtindrà? *[2 punts]*

Anomenarem x a la quantitat de formatges que es produiran i y a la quantitat de pastilles de mantega. Les condicions que cal complir són, doncs,

$$\left.\begin{array}{r} x \le 2y \\ y \le 2x \\ 10x + 5y \le 800 \end{array}\right\}.$$

La gràfica que correspon a aquesta situació és:



Els vèrtexs del triangle són A(0,0), B(64,32), C(40,80). La funció que cal fer màxima és $B(x,y) = 5x + 2y$. El seu valor en els vèrtexs del triangle és:

- $B(0,0) = 0$.
- $B(64,32) = 384$.
- $B(40,80) = 360$.

Per tant, el màxim benefici s'obtindrà fabricant 64 formatges i 32 pastilles de mantega, el què reportarà un benefici de 384 €.

36. PAU 2012 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2

3. Construïm en el pla el triangle de vèrtexs A(-3,1), B(1,2), C(-2,3).
   a. Trobeu les inequacions que determinen la regió del pla continguda i sobre els costats del triangle ABC. *[1 punt]*
   b. Justifiqueu si els punts P(0,2), Q(2,2), R(-1,2) són interiors, exteriors o es troben sobre els costats del triangle. *[1 punt]*

a. Fent servir qualsevol dels mètodes trobem les equacions de les tres rectes:

recta que passa per AB: $x - 4y + 7 = 0$
recta que passa per BC: $x + 3y - 7 = 0$
recta que passa per AC: $2x - y + 7 = 0$

Per tant, les desigualtats que determinen el triangle són:

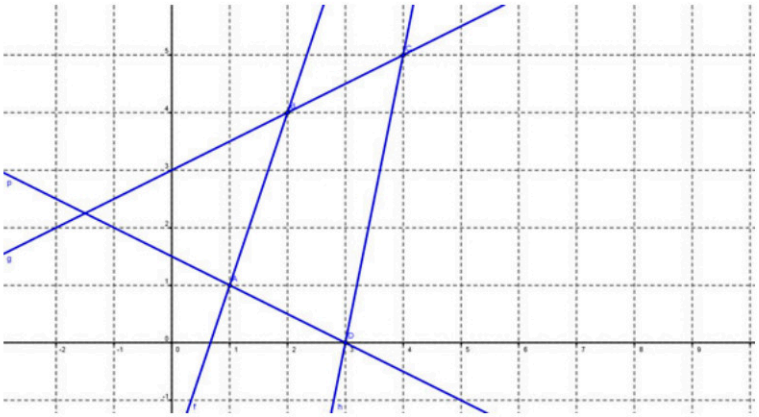
$$\left.\begin{array}{l} x - 4y + 7 \leq 0 \\ x + 3y - 7 \leq 0 \\ 2x - y + 7 \geq 0 \end{array}\right\}$$

b. El punt P(0,2) verifica: $-8 + 7 < 0$, $6 - 7 < 0$, $-2 + 7 > 0$. Per tant, és interior al triangle ABC.
El punt Q(2,2) no verifica la primera desigualtat: $2 - 8 + 7 > 0$. Per tant, és exterior al triangle ABC.
El punt R(-1,2) verifica: $-1 - 8 + 7 < 0$, $-1 + 6 - 7 < 0$, $-1 - 2 + 7 > 0$. Per tant, és interior al triangle ABC.

37. PAU 2012 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 2

2. Construïm en el pla el quadrilàter de vèrtexs A(1,1), B(2,4), C(4,5), D(3,0), els costats del qual són els segments AB, BC, CD i DA.
   a. Escriviu les desigualtats que determinen la regió del pla continguda i sobre els costats del quadrilàter ABCD. *[1 punt]*
   b. Feu servir les desigualtats anteriors per a justificar si els punts P(3,1), Q(3,4), R(5,2) són interiors, exteriors o estan sobre els costats del quadrilàter. *[1 punt]*

Per a facilitar el problema, dibuixem el quadrilàter:



Fent servir qualsevol dels mètodes trobem les equacions de les quatre rectes:

recta que passa per AB: $3x - y - 2 = 0$
recta que passa per BC: $x - 2y + 6 = 0$
recta que passa per CD: $5x - y - 15 = 0$
recta que passa per AD: $x + 2y - 3 = 0$

Per tant, les desigualtats que determinen el quadrilàter són:

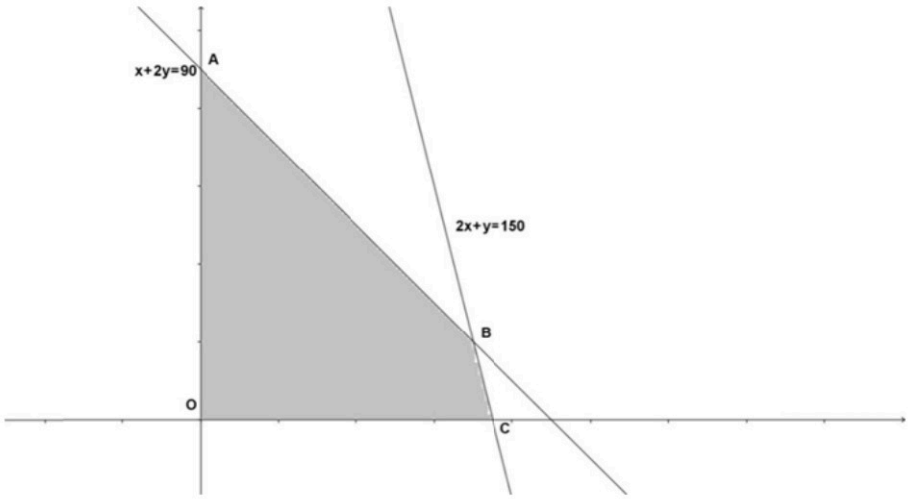
$$\left.\begin{array}{l} 3x - y - 2 \geq 0 \\ x - 2y + 6 \geq 0 \\ 5x - y - 15 \leq 0 \\ x + 2y - 3 \geq 0 \end{array}\right\}.$$

b. El punt P(3,1) verifica: $9 - 1 - 2 > 0$, $3 - 2 + 6 > 0$, $15 - 1 - 15 < 0$, $3 + 2 - 3 > 0$. Per tant, és interior al quadrilàter ABCD.
El punt Q(3,4) verifica $9 - 4 - 2 > 0$, $3 - 8 + 6 > 0$, $15 - 4 - 15 < 0$, $3 + 8 - 3 > 0$. Per tant, és interior al quadrilàter ABCD.
El punt R(5,2) verifica: $15 - 2 - 2 > 0$, $15 - 4 + 6 > 0$, però $25 - 2 - 15 > 0$. Per tant, és fora del quadrilàter ABCD.

38. PAU 2011 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 2

2.

a. Si fabriquem x bidons de B_1 i y bidons de B_2 tindrem:



Les inequacions que defineixen la regió factible són:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+2y & \leq & 90 \\ 2x+y & \leq & 150 \\ x,y & \geq & 0 \end{array}\right\}.$$

Els vèrtexs de la regió factible són: A (0,45), B (70,10), C (75,0), D (0,0).

b. La funció objectiu és $z = 10x + 15y$. Els beneficis corresponents a cada vèrtex són: $z(A) = 675$, $z(B) = 850$, $z(C) = 750$, $z(D) = 0$. Els màxims guanys seran de 850 €, i s'obtindran fabricant 70 bidons de B_1 i 10 bidons de B_2.

39. PAU 2011 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2

2.

a. Les rectes són $y = -x + 6$ i $y = -\frac{1}{2}x + 5$. El sistema d'inequacions que verifiquen els punts de la regió ombrejada és:

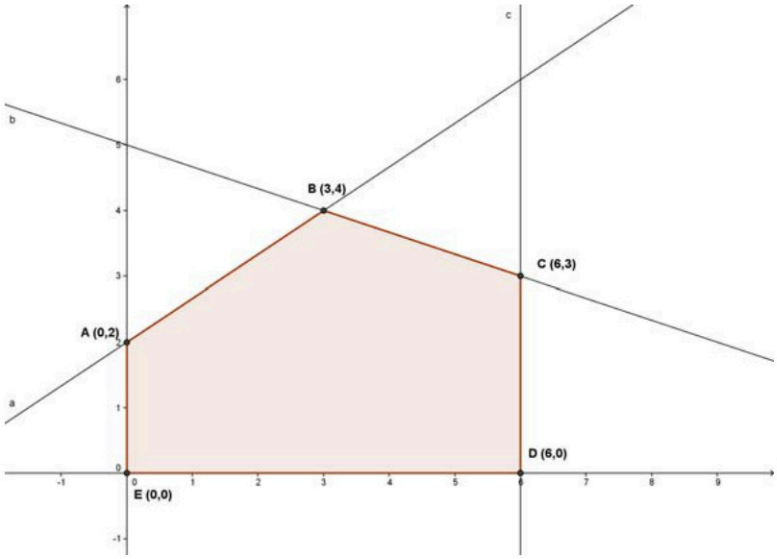
$$\left.\begin{array}{rcl} y & \geq & -x+6 \\ y & \leq & -\frac{1}{2}x+5 \\ y & \geq & 0 \end{array}\right\}.$$

b. Els vèrtexs de la regió factible són (6,0), (10,0) i (2,4). A més, z(6,0)=6, z(10,0)=10, z(2,4)=10. El màxim de la funció z a la regió factible és 10, i s'assoleix en tot el segment d'extrems (10,0) i (2,4).

40. PAU 2011 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 2

2.

a.



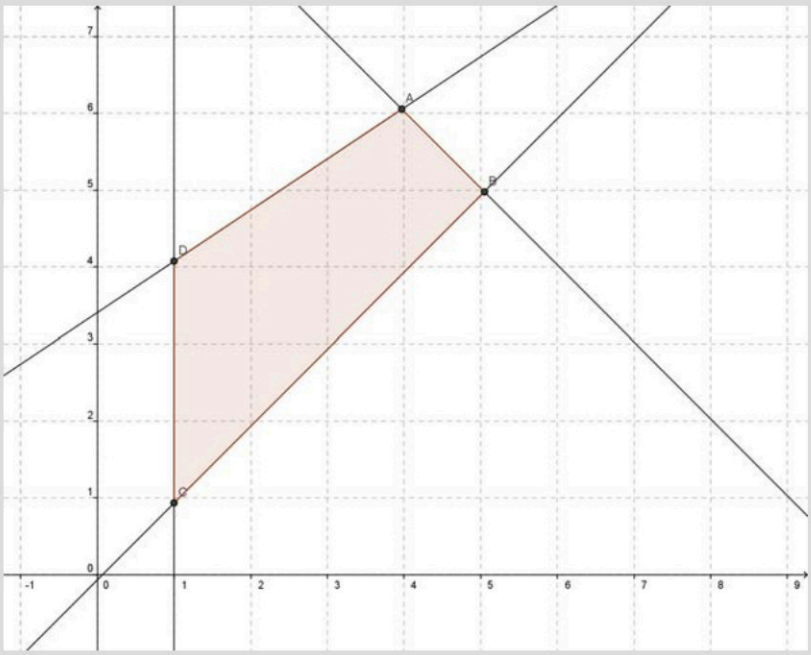
Al gràfic adjunt tenim la regió i els seus vèrtexs. El punt P(1,3) no pertany a la regió ja que el punt (1,2) és de la recta AB. El punt Q(3,3) sí que hi pertany ja que es troba per sota del punt B, en la mateixa vertical.

b.

$F(0,2)=8$, $F(3,4)=19$,
$F(6,3)=18$, $F(6,0)=6$,
$F(0,0)=0$. Per tant, el valor màxim és 19, i es dóna en el punt B. El valor mínim és 0, i es dóna en el punt E.

41. PAU 2010 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 4

4. Considerem la regió del pla representada a la figura adjunta:



a. Determineu les inequacions que defineixen els punts interiors i de la frontera del quadrilàter ABCD.
b. Determineu en quins punts s'abasta el màxim i el mínim de la funció $f(x,y)=2x-2y+7$, i quins són aquests valors.

a.

La recta AB és $y=-x+10$. La recta BC és $y=x$. La recta CD és $x=1$. Finalment, la recta AD és $y=\frac{2}{3}x+\frac{10}{3}$. Les inequacions que ens demanen són, doncs:

$$\left.\begin{array}{r} x\geq 1 \\ y\geq x \\ x+y\leq 10 \\ 3y-2x\leq 10 \end{array}\right\}.$$

b.

$f(1,1)=7$, $f(1,4)=1, f(4,6)=3, f(5,5)=7$. Per tant, el valor mínim és 1, en el punt D. El màxim és 7, en tots els punts del segment BC.

42. PAU 2010 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 5

Pregunta 5

a.
La recta AC és x = 2. La recta AB és y = 0. La recta BC és $y = -2x + 8$. Per tant, les inequacions demanades són:

$$\left.\begin{array}{r} x \geq 2 \\ y \leq -2x + 8 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}.$$

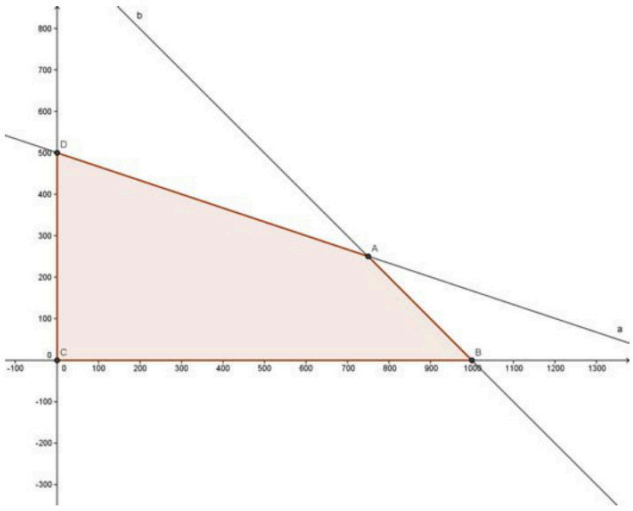
b.
$z(2,4) = 8$; $z(2,0) = 4$; $z(4,0) = 8$. Per tant, el valor màxim és 8, i s'assoleix en tots els punt del segment AC.

43. PAU 2010 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 4

Pregunta 4

Anomenarem x al nombre de lots de tipus A, i y al nombre de lots de tipus B que venen. La traducció de les dades del problema és, aleshores,

$$\left.\begin{array}{r} x + 3y \leq 1500 \\ x + y \leq 1000 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{array}\right\}.$$



La funció objectiu és la funció dels guanys: $G(x,y) = 0{,}7x + y$. Si ara dibuixem la regió factible del problema obtindrem el gràfic adjunt.

El vèrtex A de la regió factible es determina com a intersecció de les dues rectes, i resulta ser el punt A(750,250). De la mateixa manera obtenim B(1000,0), C(0,0), D(0,500). La funció de guanys en aquests punts és, doncs: $G(750,250) = 775$, $G(1000,0) = 700$, $G(0,0) = 0$, $G(0,500) = 500$, Per tant, els convé vendre 750 lots de tipus A i 250 lots de tipus B.

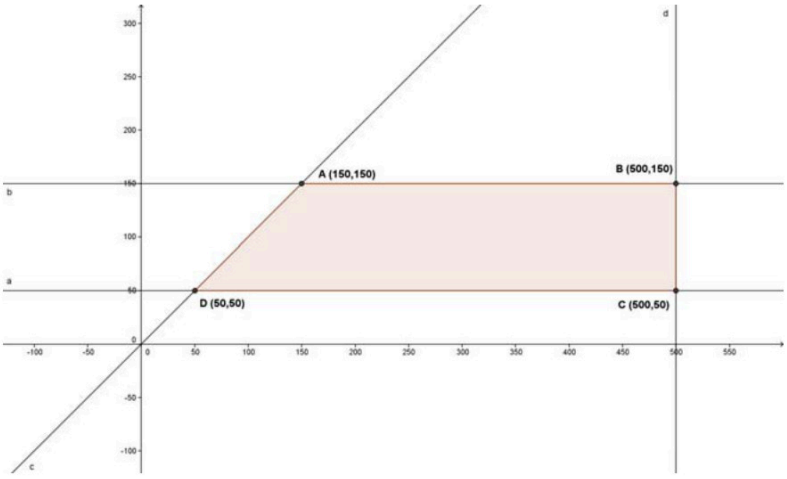
44. PAU 2010 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 3

Pregunta 3

Suposarem que el concessionari ven x motos de 50 cc. i y motos de 125 cc. Aleshores els guanys del concessionari seran de $G(x,y)=600x+1000y$, i les restriccions de l'enunciat es tradueixen com:

$$\left.\begin{array}{r} y \geq 50 \\ y \leq 150 \\ x \geq y \\ x \leq 500 \end{array}\right\}.$$

La representació gràfica de la regió factible és:



Tindrem, doncs, $G(150,150)=240.000$, $G(500,150)=450.000$, $G(500,50)=350.000$, $G(50,50)=80.000$. Per tant, els màxims guanys es produiran quan venen 500 motos de 50 cc. i 150 motos de 125 cc.

45. PAU 2009 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 1

QÜESTIONS

1. Considereu el sistema d'inequacions següent:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x+y & \leq & 10 \\ x+y & \leq & 8 \\ x & \leq & 4 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}\right\}.$$

a) Representeu gràficament la regió de solucions [1 punt]

b) Determineu el màxim de la funció $f(x, y) = 2x + y$ en aquesta regió. Digueu per a quins valors s'assoleix aquest màxim. [1 punt]

Puntuació: Descomptar 0.5 punts en b) si no donen tot l' interval solució.

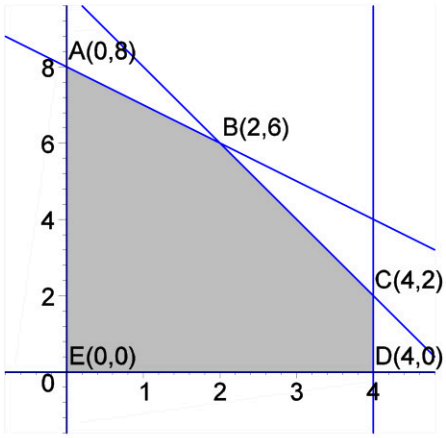
Solució:

a) Els punts d'intersecció són:

$$\begin{cases} x+y = 8 \\ 2x+y = 10 \end{cases} \rightarrow B=(2,6) \qquad \begin{cases} 2x+y = 10 \\ x=4 = 0 \end{cases} \rightarrow C=(4,2)$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow D=(4,0) \qquad \begin{cases} x+y = 8 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow A=(0,8)$$

La gràfica és:



b) Els valors de $f(x, y)$ en els vèrtexs de la regió solució són:

	A(0,8)	B(2,6)	C(4,2)	D(4,0)	E(0,0)
$f(x, y) = 2x + y$	8	10	10	8	0
		màxim	màxim		

I s'obté el màxim en tot el segment BC i té per valor $f(x, y) = 10$.

46. PAU 2009 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 5

PROBLEMES

5. Un llibreter vol fer una comanda de dos classes de llibres a dos editors, A i B. L'editor A ofereix lots de 5 llibres d'assaig i 5 novel·les per 50 €. L'editor B ofereix lots de 5 llibres d'assaig i 10 novel·les per 150 €. El llibreter vol comprar, com a mínim, 2500 llibres d'assaig i 3500 novel·les. Per un compromís adquirit amb l'editor B, no pot comprar a l'editor A més de 3 vegades el que compra a l'editor B. Determineu quants lots haurà de comprar a cada editor per minimitzar a el cost i poder complir el seu compromís. [4 punts]

Puntuació: Inequacions 1 punt; vèrtexs 1 punt; gràfica 1 punt; solució 1 punt. Total 4 punts.

Solució:

Planteig: Taula de dades:

	assaig	novel·la	preu/lot
A	5	5	50
B	5	10	150
	2500	3500	

Siguin x, y el nombre de lots que compra respectivament als llibreters A i B.

Inequacions:

$$\left.\begin{array}{lll} 5x+5y & \geq & 2500 \\ 5x+10y & \geq & 3500 \\ x\leq 3y, & x\geq 0, & y\geq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{lll} x+y & \geq & 500 \\ x+2y & \geq & 700 \\ x\leq 3y, & x\geq 0, & y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Vèrtexs:

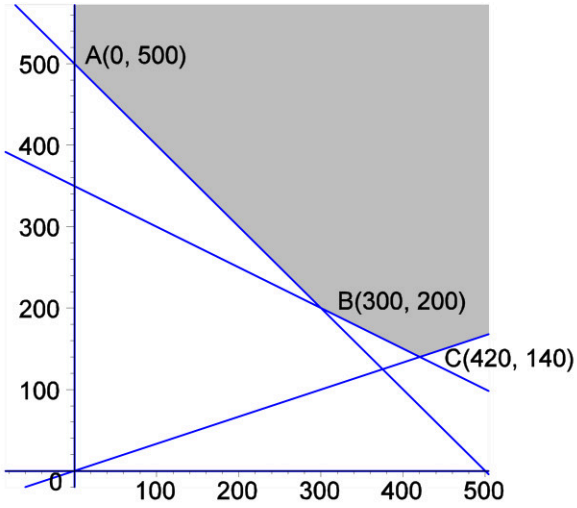
$$\left.\begin{array}{rcl} x+y & = & 500 \\ x & = & 0 \end{array}\right\} \rightarrow A(0,500) \qquad \left.\begin{array}{rcl} x+y & = & 500 \\ x+2y & = & 700 \end{array}\right\} \rightarrow A(300,200)$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x+2y & = & 700 \\ x & = & 3y \end{array}\right\} \rightarrow C(420,140)$$

Funció objectiu: $f(x,y)=50x+150y$

S'ha de trobar el seu mínim absolut.

Gràfica :



Valors de la funció de cost:

	A(0,500)	B(300,200)	C(420,140)
$f(x,y)=50x+150y$	75000	45000	42000

Per altra banda, sobre la semirrecta $y=\frac{1}{3}x$ que s'inicia en el punt C(420,140) en el sentit d'augmentar x i y, el valor de la funció és: $f(x,y)=50x+150\frac{x}{3}=100x$ que creix al créixer x. Per tant, el punt C(420,140) representa clarament el mínim de la funció.
Ha de comprar 420 lots al llibreter A i 140 lots al llibreter B i el cost total mínim corresponent, preservant les restriccions, és de 42000 €.

47. PAU 2009 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 2

2. Considereu aquesta regió determinada pel sistema d'inequacions següent:

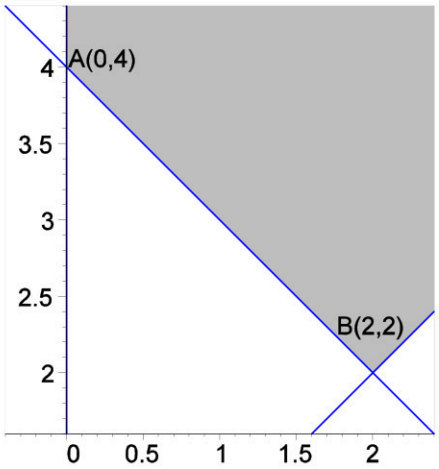
$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+y \geq 4 \\ -x+y \geq 0 \end{array}\right\}.$$

a) Representeu la regió. [1 punt]

b) Esbrineu si la funció $f(x,y) = x - 3y + 6$ té màxim en aquesta regió i, si és el cas, trobeu-lo. [1 punt]

Solució:

a) Gràfic:



b) Sobre el costat infinit que comença en el vèrtex A(0,4), la funció $f(x,y) = x - 3y + 6$ decreix en allunyar-se del punt A, ja que la x és 0 i la y augmenta i com figura amb signe negatiu fa disminuir el total. Sobre el costat infinit que comença a B(2,2) la x creix, però la y creix tres vegades més, i com que té signe negatiu, fa disminuir el total. Per tant, el valor màxim de $f(x,y)$ s'ha d'assolir en algun punt del segment AB. Com $f(A) = f(0,4) = -6$, i $f(B) = f(2,2) = 2$, resulta que el màxim de la funció s'obté en el punt B(2,2) i pren el valor $f(2,2) = 2$.

48. PAU 2009 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 5

PROBLEMES

5. Un agricultor disposa d'un camp on plantarà patates i pastanagues. Les patates per plantar costen 1,5 €/kg, i les pastanagues, 1,75 €/kg. La quantitat de patates plantades no pot superar el doble de la quantitat de pastanagues i tampoc no pot ser inferior a la meitat de les pastanagues plantades. La despesa que aquest agricultor ha de fer per plantar les patates i les pastanagues no pot superar els 150 €. Per cada kilogram que planta obté un benefici, després de venda, de 20 €/kg per les patates i de 50 €/kg per les pastanagues. Determineu quines quantitats de cada producte ha de sembrar per tal que el benefici després de la venda al mercat sigui màxim. [4 punts]

Solució:

Inequacions:

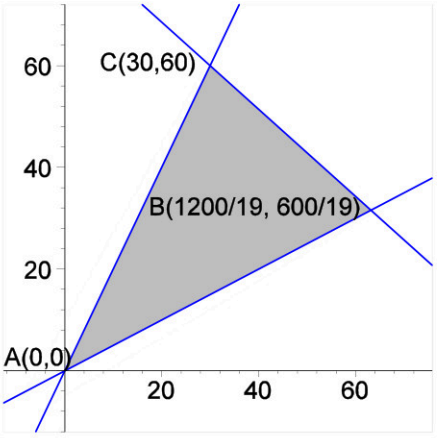
Anomenant x als kg de patates que sembra i y als de pastanagues, la despesa inicial és: $1{,}5x + 1{,}75y$ € que han de ser menor o igual que 150 €. Per altra banda tenim que $x \le 2y$ i $x \ge \frac{y}{2}$. La funció que dona els beneficis és $B(x,y) = 20x + 50y$. Simplificant, el sistema d'inequacions és:

$$\left.\begin{array}{rcl} x & \le & 2y \\ 2x & \ge & y \\ 1{,}5x+1{,}75y & \le & 150 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x-2y & \le & 0 \\ 2x-y & \ge & 0 \\ 6x+7y & \le & 600 \end{array}\right\}$$

Vèrtexs:

$$\left.\begin{array}{rcl} x-2y & = & 0 \\ 6x+7y & = & 600 \end{array}\right\} \rightarrow B\left(\frac{1200}{19}, \frac{600}{19}\right), \quad \left.\begin{array}{rcl} 2x-y & = & 0 \\ 6x+7y & = & 600 \end{array}\right\} \rightarrow C(30,60), \quad A(0,0).$$

Gràfic:



Valors:

	$A(0,0)$	$B\left(\frac{1200}{19},\frac{600}{19}\right)$	$C(30,60)$
$B(x,y) = 20x + 50y$	0	$\frac{54000}{19} = 2842{,}11$	3600

Per tant el benefici màxim s'obté plantant 30 kg de patates i 60 kg de pastanagues i és de 3600 €.

49. PAU 2009 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 1

QÜESTIONS

1. Considereu el sistema d'inequacions següent:

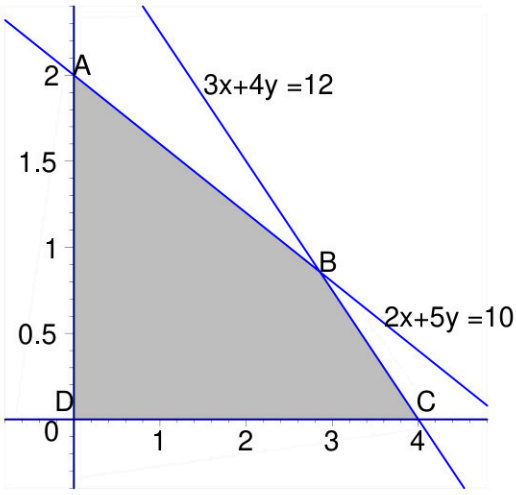
$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ 2x+5y \leq 10 \\ 3x+4y \leq 12 \end{cases}$$

a) Dibuixeu la regió de solucions del sistema. [1 punt]

b) Determineu el màxim de la funció $f(x,y) = x+3y$ que està sotmesa a les restriccions anteriors. [1 punt]

Solució:

a) La regió factible ve donada pel gràfic següent:



b) La taula de valors de $f(x,y)$ en els vèrtexs és:

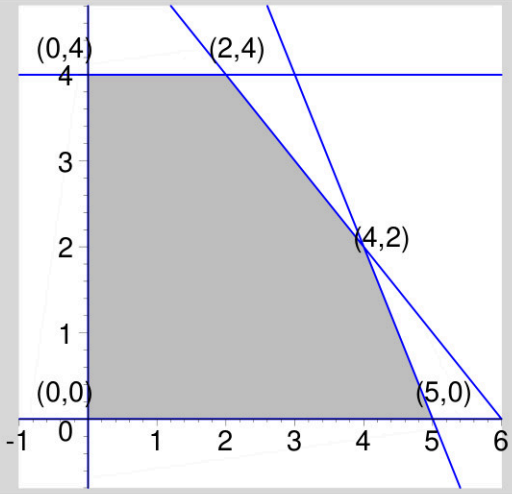
	A(0,2)	B(20/7,6/7)	C(4,0)	D(0,0)
$f(x,y) = x+3y$	6	38/7	4	0
	màxim			

Per tant el màxim s'obté en el punt A(0,2) i té valor 6.

50. PAU 2009 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 5

PROBLEMES

5. La figura següent representa la regió de solucions d'un sistema d'inequacions lineals



a) Trobeu el sistema d'inequacions que determina aquesta regió. [1 punt]
b) Determineu el valor màxim de la funció $f_1(x, y) = x + y + 1$ en aquesta regió, i digueu en quins punts s'assoleix aquest màxim. [1 punt]
c) Trobeu el valor de *a* perquè la funció $f_2(x, y) = ax + 2y + 3$ assoleixi el màxim en el segment comprès entre els extrems (4,2) i (5,0). [1 punt]
d) Determineu els valors de *a* per als quals la funció $f_2(x, y) = ax + 2y + 3$ assoleix el màxim només en el punt (4,2). [1 punt]

Solució:

a) Sistema d'inequacions:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0, \\ 0 \leq y \leq 4, \\ x + y \leq 6, \\ 2x + y \leq 10. \end{array}\right\}$$

b) Determinem els valors de la funció en els vèrtexs.

	A(0,4)	B(2,4)	C(4,2)	D(5,0)	E(0,0)
$f_1(x, y) = x + y + 1$	5	7	7	6	1
		màxim	màxim		

Per tant el màxim s'obté en tot el segment BC.

c) Determinem els valors de la funció en els vèrtexs.

	A(0,4)	B(2,4)	C(4,2)	D(5,0)	E(0,0)
$f_2(x, y) = ax + 2y + 3$	11	2a+11	4a+7	5a+3	3

Cal que $4a+7=5a+3$ i per tant, $a=4$. Verifiquem que es tracta d'un màxim:

	A(0,4)	B(2,4)	C(4,2)	D(5,0)	E(0,0)
$f_2(x,y)=4x+2y+3$	11	19	23	23	3
			màxim	màxim	

d) Cal que,

$$\left.\begin{array}{l} 4a+7>5a+3 \\ 4a+7>2a+11 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} a<4 \\ a>2 \end{array}\right\} \rightarrow 2<a<4.$$

51. PAU 2008 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 3

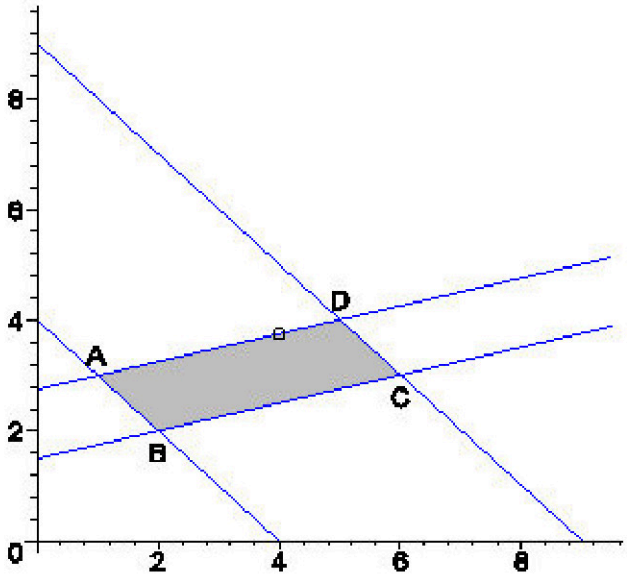
3. Considereu la regió de solucions determinada pel sistema d'inequacions següent:

$$\left.\begin{array}{rcl} x-4y & \geq & -11 \\ x+y & \geq & 4 \\ x-4y & \leq & -6 \\ x+y & \leq & 9 \end{array}\right\}.$$

a) Dibuixeu la regió de solucions del sistema. [1 punt]

b) Una funció objectiu $f(x,y)=ax+by+c$ pren el valor mínim en aquesta regió en el punt (4,15/4). Digueu si també pren el valor mínim en altres punts de la regió i, si és així, determineu-los. [1 punt]

Solució: a) Representem les quatre rectes i la regió de solucions:



Calculem els quatre vèrtexs:

$$A:\left\{\begin{array}{rcr} x-4y & = & -11 \\ x+y & = & 4 \end{array}\right\}\rightarrow A(1,3)\,,\ B:\left\{\begin{array}{rcr} x+y & = & 4 \\ x-4y & = & -6 \end{array}\right\}\rightarrow B(2,2)\,,$$

$$C:\left\{\begin{array}{rcr} x-4y & = & -6 \\ x+y & = & 9 \end{array}\right\}\rightarrow C(6,3)\,,\ D:\left\{\begin{array}{rcr} x+y & = & 9 \\ x-4y & = & -11 \end{array}\right\}\rightarrow D(5,4)\,.$$

b) El punt (4,15/4) no és cap vèrtex, però està en el segment AD que té per equació $x-4y=-11$ amb $2\leq x\leq 6$, com podem comprovar. Com el punt és un extrem de la funció objectiu, aquesta prendrà el mateix valor en tot el segment AD.

52. PAU 2008 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 6

6. Una empresa de mobles fabrica dos models d'armaris, A i B. Per al model A calen 5 h 30 min de feina i 2 m de fusta. Per al model B calen 4 hores de feina i 3 m de fusta. L'empresa no pot fabricar més de 430 armaris per setmana, disposa de 2800 hores de feina i de 1200 m de fusta. Els armaris de tipus A i B proporcionen respectivament, 250 € i 310 € de benefici cadascun. Determineu el nombre d'armaris de cada tipus que s'han de fabricar per obtenir el benefici màxim. [4 punts]

Puntuació:. Plantejament 1 punt; Gràfic i vèrtexs 2 punts; Màxim 1 punt; Total 4 punts.

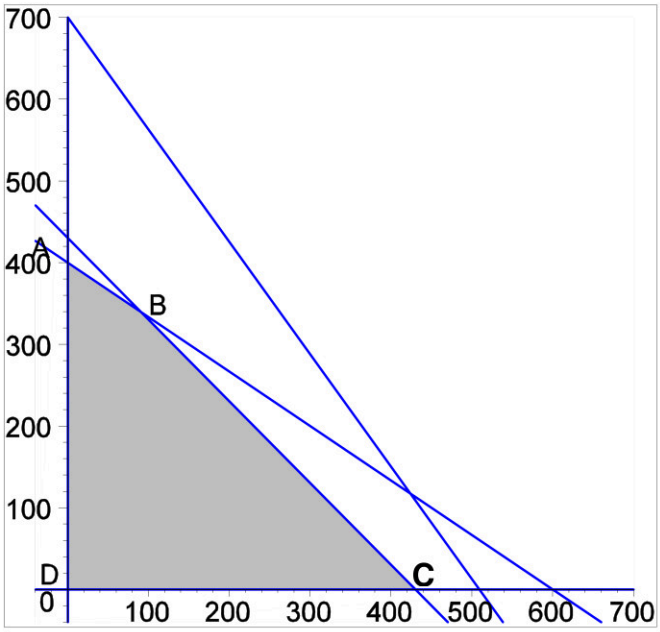
Solució: Anomenem x i y als nombres d'armaris de tipus A i B que es fabriquen. Les condicions estan resumides en la taula següent:

		Feina (hores)	Fusta (m^2)
Model A	x	5.5	2
Model B	y	4	3
màxim	430	2800	1200

Per tant les condicions són:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y & \leq & 430 \\ 5.5x+4y & \leq & 2800 \\ 2x+3y & \leq & 1200 \\ x\geq 0; & & y\geq 0 \end{array}\right\}.$$

La gràfica corresponent és:



Els vèrtexs de la regió factible són:

$$A:\left.\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ 2x+3y & = & 1200 \end{array}\right\}\rightarrow \quad A(0,400) \qquad B:\left.\begin{array}{rcl} 2x+3y & = & 1200 \\ x+y & = & 430 \end{array}\right\}\rightarrow \quad B(90,340)$$

$$C:\left.\begin{array}{rcl} x+y & = & 430 \\ y & = & 0 \end{array}\right\}\rightarrow \quad C(430,0)\,, \qquad D(0,0)$$

La funció benefici a maximitzar és: $f(x,y)=250x+310y$. Tenim:

	A(0,400)	B(90,340)	C(430,0)	D(0,0)
$f(x,y)=250x+310y$	124000	127900	107500	0
		màxim		

Per tant el benefici màxim és 127900 € i s'obté fent 90 armaris de tipus A i 340 armaris de tipus B.

53. PAU 2008 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 1

QÜESTIONS

1. Considereu el sistema d'inequacions següent:

$$\left.\begin{array}{rcl} x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \\ x+3y & \leq & 18 \\ x+y & \leq & 10 \end{array}\right\}.$$

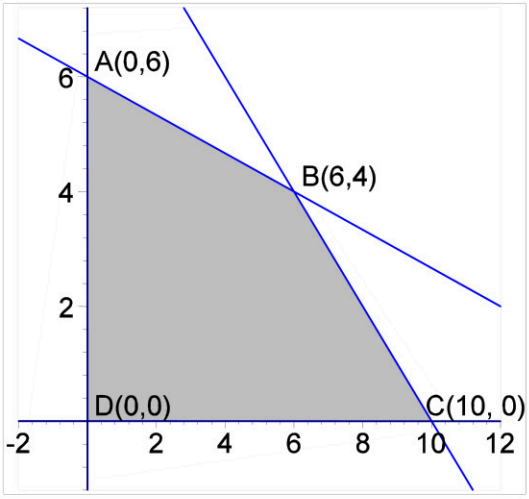
a) Representeu gràficament la regió de solucions [1 punt]
b) Determineu el màxim de la funció $f(x,y)=3x+5y$ en aquesta regió i per a quins valors s'assoleix aquest màxim. [0.5 punts]
c) Determineu el màxim de la funció $f(x,y)=3x+3y$ en aquesta regió i per a quins valors s'assoleix aquest màxim. [0.5 punts]

Solució:

a) Interseccions:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+3y & = & 18 \\ x+y & = & 10 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x+y & = & 10 \\ 2y & = & 8 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{rcl} y & = & 4 \\ x & = & 6 \end{array}\right\}$$

Regió solució:



b) i c) Valors de les funcions objectiu als vèrtexs:

	A(0,6)	B(6,4)	C(10,0)	D(0,0)
$f(x,y) = 3x + 5y$	30	38	30	0
$f(x,y) = 3x + 3y$	18	30	30	0

b) Per tant el màxim de $f(x) = 3x + 5y$ s'assoleix en el punt B(6,4) i te valor 38.
c) Per tant el màxim de $f(x) = 3x + 3y$ s'assoleix en tot el segment BC i val 30.

54. PAU 2008 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 3

3. En un problema de programació lineal, la regió de solucions és el quadrat de vèrtexs (1,1), (1,3), (3,3) i (3,1), i la funció objectiu és $B(x, y) = 3x + 2y$.
a) Determineu en quin punt és màxima la funció objectiu i quin és aquest valor màxim. [1 punt]
b) Doneu un conjunt d'inequacions que determini la regió de solucions. [1 punt]

Solució:

a) Taula de valors:

	(1,1)	(1,3)	(3,3)	(3,1)
$B(x, y) = 3x + 2y$	5	9	15	11

Per tant, la funció objectiu és màxima en el punt (3,3) i pren el valor 15.

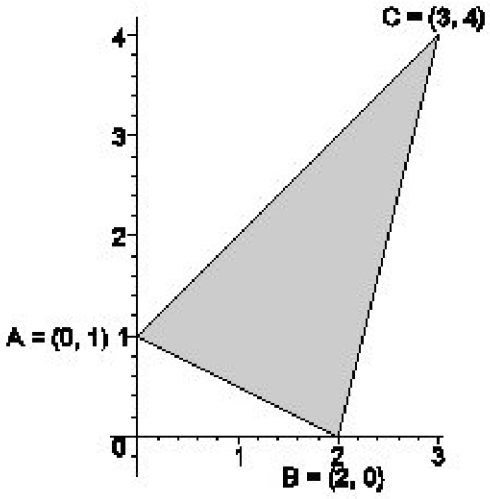
b) Restriccions: $1 \leq x \leq 3$ i $1 \leq y \leq 3$.

55. PAU 2008 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 3

3. Trobeu un sistema d'inequacions que tingui com a conjunt de solucions l'interior i els costats del triangle de vèrtexs (0,1), (2,0) i (3,4). [2 punts]

Puntuació: Equacions 1 punt; inequacions 1 punt. Total: 2 punts. Gradueu la nota en funció dels errors de càlcul i signes.

Solució: Dibuixem la regió factible.



La recta AC té ordenada a l'origen 1 i pendent 1. La seva equació és $y = x + 1$, i la regió factible que delimita serà $y \leq 1 + x$.

La recta AB té ordenada a l'origen 1 i pendent $-\frac{1}{2}$. La seva equació és $y = -\frac{1}{2}x + 1$, i la regió factible que delimita serà $y \geq -\frac{1}{2}x + 1$.

La recta BC passa pel punt (2,0) i té pendent 4. La seva equació és $y = 4(x-2)$, i la regió factible que delimita serà $y \geq 4(x-2)$. El sistema demanat és:

$$\begin{cases} y \leq x+1 \\ y \geq -\frac{1}{2}x+1 \\ y \geq 4x-8 \end{cases}$$

56. PAU 2008 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 5

PROBLEMES

5. El vaixell de Barcelona a Palma de Mallorca porta automòbils i camions a la bodega. Cada camió ocupa 4 places d'automòbil. La superfície total de la bodega permet situar-hi fins a 200 automòbils. Cada automòbil pesa 1.000 kg i cada camió 9.000 kg. El pes total permès per a la càrrega és de 300.000 kg. La companyia cobra 50 € per cada cotxe i 300 € per cada camió. Calculeu el nombre de cotxes i camions que s'han de carregar per obtenir un benefici màxim, i també quin és aquest benefici màxim.

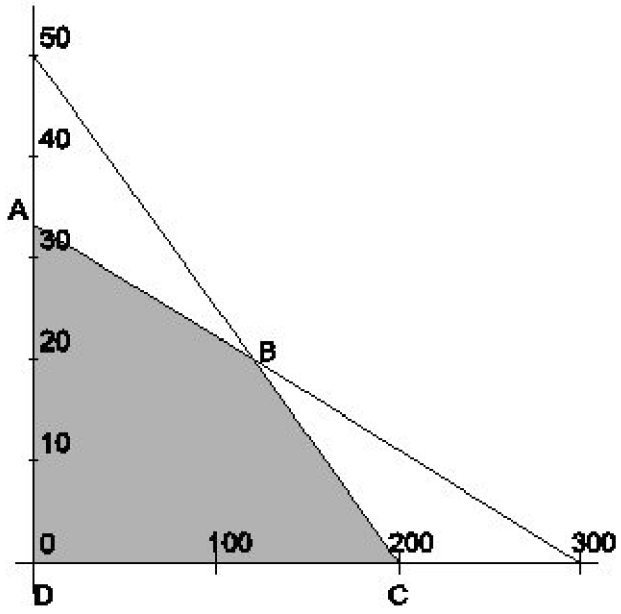
[4 punts]

Puntuació: plantejament del sistema: 1 punt; gràfic: 1 punt; determinació dels vèrtexs: 1 punt; determinació del benefici màxim: 1 punt. Total: 4 punts.

Solució: Anomenem x al nombre de cotxes i y al nombre de camions. Les restriccions són: $x+4y\leq 200$ pel que fa al nombre de places i $1000x+9000y\leq 300000$ pel que fa al pes. A més totes dues incògnites han de ser positives. El sistema de restriccions és:

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ x+4y\leq 200 \\ x+9y\leq 300 \end{cases}$$

que dóna la regió factible del gràfic següent:



Determinem les coordenades dels vèrtexs: B és el punt d'intersecció de les dues rectes $x+4y=200$ i $x+9y=300$ i val $B=(120,20)$. Els altres dos són les interseccions amb els eixos de les rectes anteriors que són: $A=\left(0,\frac{100}{3}\right)$ i $C=(200,0)$.

La funció objectiu de beneficis que volem maximitzar és $B(x,y)=50x+300y$. Fem la taula

	$A\left(0,\frac{100}{3}\right)$	$B(120,20)$	$C(200,0)$	$D(0,0)$
$B(x,y)=50x+300y$	10000	12000	10000	0

Per tant, el benefici màxim s'obté portant 120 cotxes i 20 camions i és de 12000 €.

57. PAU 2007 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 3

3. Considereu el sistema d'inequacions següent:

$$\left.\begin{array}{rcl} x-y+1 & \geq & 0 \\ x+y & \geq & 1 \\ 5x+y & \leq & 13 \end{array}\right\}$$

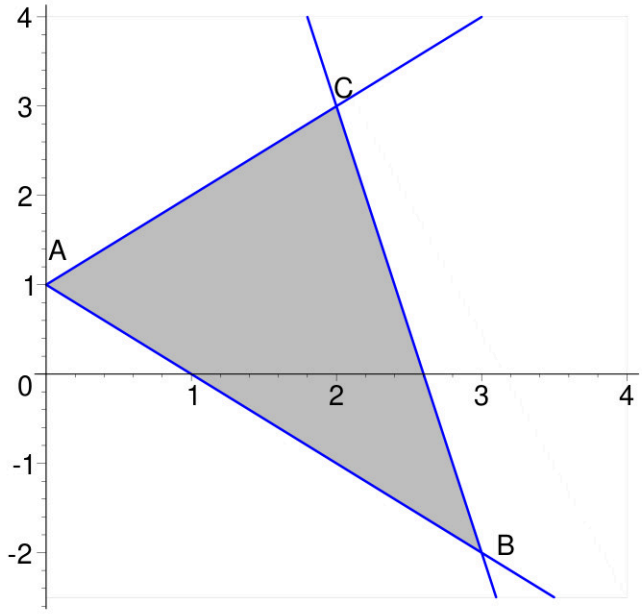
a) Representeu gràficament la regió factible.
b) Calculeu el màxim de la funció $f(x,y)=x-3y$ en aquesta regió.

Puntuació: Cada apartat 1 punt. Total 2 punts. La forma més convenient de determinar la regió és determinar els punts d'intersecció, però donat que no es demana calcular-los, es considerarà correcta la solució si el gràfic està ben fet. No obstant cal valorar la correcció del gràfic i descomptar puntuació si la claredat no és suficient.

Solució: a) Trobem els punts d'intersecció:

$$A:\left\{\begin{array}{rcl} x-y & = & -1 \\ x+y & = & 1 \end{array}\right\}\rightarrow A(0,1) \quad B:\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 1 \\ 5x+y & = & 13 \end{array}\right\}\rightarrow B(3,-2)$$

$C:\left\{\begin{array}{rcl} x-y & = & -1 \\ 5x+y & = & 13 \end{array}\right\}\rightarrow A(2,3)$. Representem la regió factible:



b) Trobem el màxim de $f(x,y)=x-3y$ a la regió factible. Fem la taula:

	A(0,1)	B(3,-2)	C(2,3)
$3x+4y=200$	-3	9	-7
		màxim	

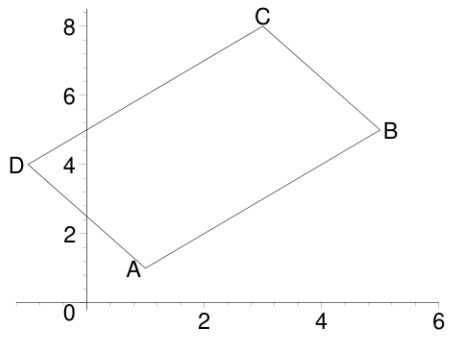
Per tant el màxim és 9 i s'obté en el punt B(3,-2).

58. PAU 2007 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 4

4. Escriviu un sistema d'inequacions lineals que doni com a zona solució l'interior del paral·lelogram que té vèrtexs A(1,1), B(5,5), C(3,8), i D(-1,4).

Puntuació: 1 punt per les equacions; 1 punt per les inequacions. Total 2 punts. Gradueu la puntuació en funció dels errors de càlcul i signes. Descompteu 0.25 punts per cada signe de les inequacions equivocat.

Solució: El paral·lelogram és:



Les condicions seran:

$$\text{Costat } AB; \quad y-1>x-1; \qquad y-x>0.$$

$$\text{Costat } BC; \quad y-5<-\frac{3}{2}(x-5); \quad 3x+2y<25.$$

$$\text{Costat } CD; \quad y-4<(x+1) \qquad y-x<5.$$

$$\text{Costat } DA; \quad y-1>-\frac{3}{2}(x-1) \quad 3x+2y>5.$$

59. PAU 2007 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

QÜESTIONS

1. Trobeu el màxim de la funció $f(x,y)=5x+y-13$ en la regió tancada definida pel triangle de vèrtexs A=(2,4), B=(6,8) i C=(7,3), així com el punt o els punts on s'obté aquest màxim.

Puntuació: Càlcul dels valors de la funció en els tres vèrtex: 1 punt; resposta correcte de que el màxim és 25 i s'obté sobre tot el costat BC: 1 punt. Total: 2 punts.

Solució: El màxim s'obté sobre la frontera de la regió factible tancada. Tenim:

$$f(A)=f(2,4)=1\,,\quad f(B)=f(6,8)=25\,,\quad f(C)=f(7,3)=25$$

Per tant, el màxim val 25 i s'obté sobre en tot el segment BC.

60. PAU 2007 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3

3. En un taller fabriquen dos tipus de bosses. Per fer una bossa del primer model es necessiten 0.9 m^2 de cuir i 8 hores de feina. El segon model necessita 1.2 m^2 de cuir i 4 hores de feina. Per fer aquests dos tipus de bosses el taller disposa de 60 m^2 de cuir i pot dedicar-hi un màxim de 400 hores de feina.

a) Expresseu mitjançant un sistema d'inequacions les restriccions a les que està sotmesa la producció d'aquests dos models de bosses.

b) Representeu la regió solució d'aquest sistema i trobeu-ne els vèrtexs.

Puntuació: Cada apartat 1 punt. Total 2 punts.

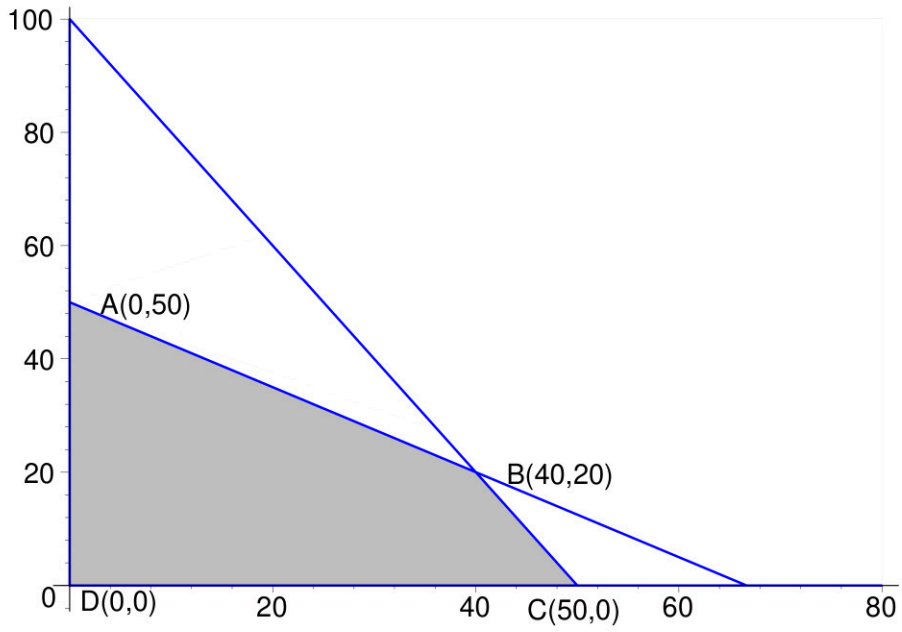
Solució: Anomenant respectivament x i y als nombres de bosses dels models 1 i 2, les condicions poden resumir-se en la taula següent:

Nombre bosses	Cuir (m^2)	Feina (h)
x	0.9	8
y	1.2	4
Màxim	60	400

a) El sistema d'inequacions corresponent és:

$$\left.\begin{array}{rcl} 0.9x+1.2y & \leq & 60 \\ 8x+4y & \leq & 400 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{rcl} 3x+4y & \leq & 200 \\ 2x+y & \leq & 100 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}\right\}$$

b) Representem gràficament la regió factible:



El punt A s'obté de $x=0$ i $3x+4y=200$ i és A(0,50).

El punt B s'obté com a solució del sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} 3x+4y & = & 200 \\ 2x+y & = & 100 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 200 \\ 2 & 1 & 100 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 100 \\ 0 & \frac{5}{2} & 50 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} y=20 \\ x=40 \end{array}\right\}$$

El punt C s'obté de $y=0$ i $2x+y=100$ i és C(50,0). Finalment tenim D(0,0).

61. PAU 2007 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 3

3. Considereu el sistema d'inequacions següent:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+2y & \leq & 8 \\ x+y & \geq & 5 \\ x-5y & \leq & 0 \end{array}\right\}$$

a) Resoleu-lo gràficament.
b) Trobeu-ne totes les solucions enteres.

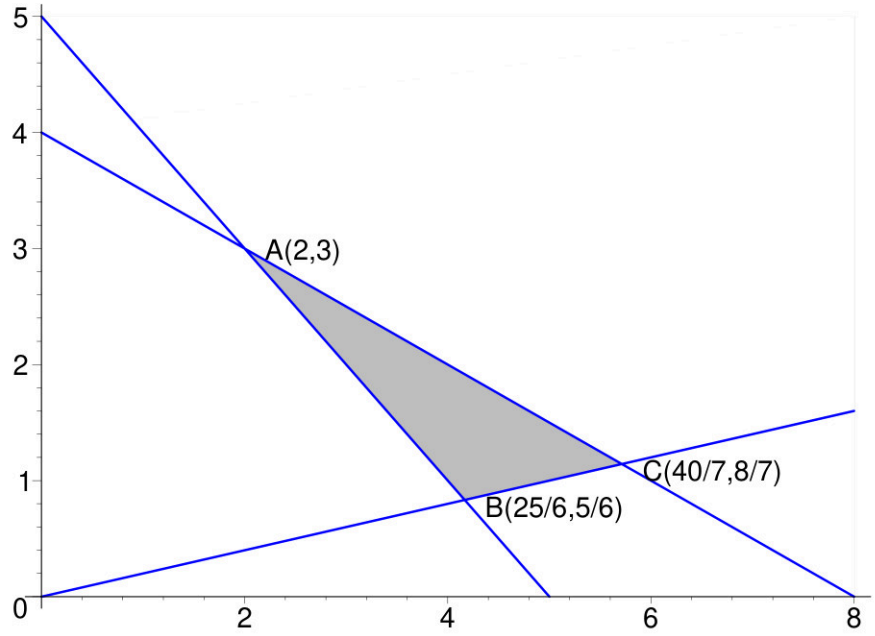
Puntuació: Apartat 1: 0,25 punts per cada vèrtex i 0,25 punts pel gràfic; total 1 punt. Apartat 2: 0,2 punts per cada solució entera correcte; total 1 punt. Total 2 punts.

Solució: Els punts d'intersecció dels costats són:

$$A:\left\{\begin{array}{rcl} x+2y & = & 8 \\ x+y & = & 5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} y=3 \\ x=2 \end{array}\right\} \quad B:\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 5 \\ x-5y & = & 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} y=\frac{5}{6} \\ x=\frac{25}{6} \end{array}\right\}$$

$$C:\left\{\begin{array}{rcl} x+2y & = & 8 \\ x-5y & = & 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} y=\frac{8}{7} \\ x=\frac{40}{7} \end{array}\right\}.$$

El gràfic de la regió factible és:



b) Per determinar les solucions enteres fixem el mínim valor enter de y factible que és $y=1$ i posem les condicions sobre les x. Resulten:

$$y=1 \quad \left.\begin{array}{l} x\le 6 \\ x\ge 4 \\ x\le 5 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{(4,1)} \text{ i } \boxed{(5,1)}; \qquad y=2 \quad \left.\begin{array}{l} x\le 4 \\ x\ge 3 \\ x\le 10 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{(3,2)} \text{ i } \boxed{(4,2)};$$

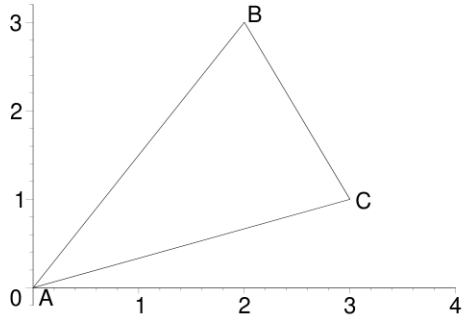
$$y=3 \quad \left.\begin{array}{l} x\le 2 \\ x\ge 2 \\ x\le 15 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{(2,3)}.$$ Aquestes són les úniques solucions enteres.

62. PAU 2007 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 4

4. Trobeu un sistema d'inequacions que tingui com a conjunt de solucions l'interior i els costats del triangle del pla de vèrtexs (0,0), (2,3) i (3,1).

Puntuació: 1 punt per trobar correctament les equacions dels costats; 1 punt per trobar les inequacions. Total: 2 punts.

Solució: Posem $A(0,0)$, $B(2,3)$ i $C(3,1)$. El triangle és:



Les condicions seran

$$\text{Costat } AB; \quad y\le \frac{3}{2}x; \quad 2y-3x\le 0.$$

$$\text{Costat } BC; \quad y-1\le -2(x-3); \quad 2x+y\le 7.$$

$$\text{Costat } CA; \quad y\ge \frac{1}{3}x \quad 3y-x\ge 0.$$

63. PAU 2007 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 6

6. Un taller de confecció fa jaquetes i pantalons per a criatures. Per fer una jaqueta necessiten 1m de roba i dos botons, i per a fer uns pantalons calen 2m de roba, 1 botó i 1 cremallera. El taller disposa de 500 m de roba, 400 botons i 225 cremalleres. El benefici que obté per la venda d'una jaqueta és de 20 € i per la d'uns pantalons és de 30 €. Suposant que es ven tot el que es fabrica:

a) Calculeu el nombre de jaquetes i de pantalons que s'han de fer per tal d'obtenir un benefici màxim. Determineu també aquest benefici màxim.

b) Si el material sobrant es ven a 1 € el metre de roba, a 0,20 € cada cremallera i a 0,01 € cada botó, calculeu quant es pot obtenir de la venda del que ha sobrat.

Puntuació: a) 1 punt per les inequacions; 1 punt per la gràfica i els vèrtexs; 1 punt per trobar el màxim; b) 1 punt. Total: 4 punts.

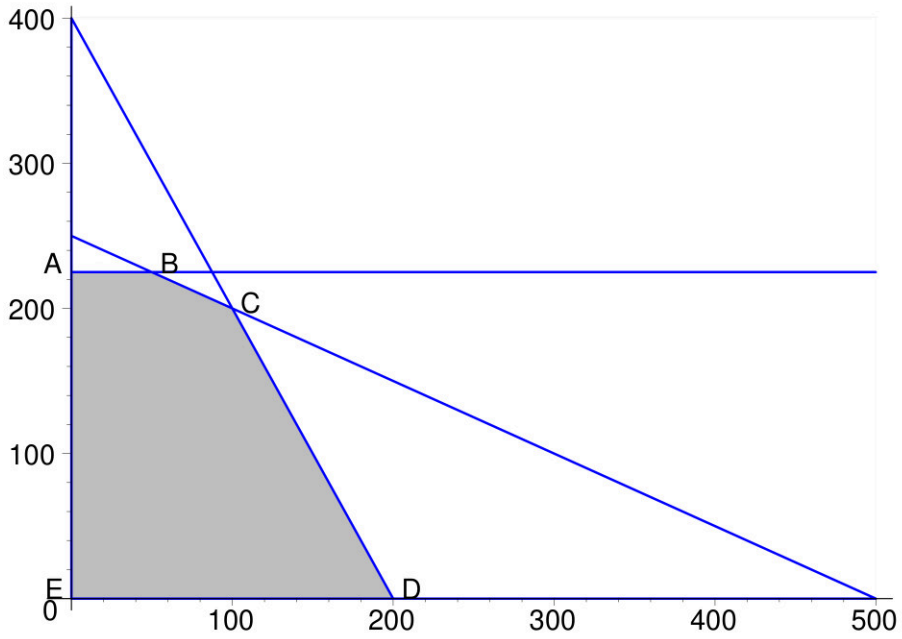
Solució: a) Anomenem x i y a les quantitats de jaquetes i pantalons que fa. Les condicions es poden resumir en la taula següent:

		roba	botons	cremalleres
jaquetes	x	1	2	0
pantalons	y	2	1	1
Total		500	400	225

Per tant les condicions són:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+2y & \leq & 500 \\ 2x+y & \leq & 400 \\ y & \leq & 225 \\ x\geq 0; & & y\geq 0 \end{array}\right\}$$

i la gràfica corresponent és:



Els vèrtexs de la regió factible són:

$$A:\left.\begin{matrix} y &=& 225 \\ x &=& 0 \end{matrix}\right\}\to A(0,225); \qquad B:\left.\begin{matrix} y &=& 225 \\ x+2y &=& 500 \end{matrix}\right\}\to B(50,225);$$

$$C:\left.\begin{matrix} x+2y &=& 500 \\ 2x+y &=& 400 \end{matrix}\right\}\to C(100,200); \quad D:\left.\begin{matrix} y &=& 0 \\ 2x+y &=& 400 \end{matrix}\right\}\to D(200,0)\,.$$

La funció benefici a maximitzar és: $f(x,y)=20x+30y$. Tenim:

	A(0,225)	B(50,225)	C(100,200)	D(200,0)	E(0,0)
$f(x,y)=20x+30y$	6750	7750	8000	4000	0
			màxim		

Per tant el benefici màxim és 8000 € i s'obté fent 100 jaquetes i 200 pantalons.

b) Si es fabriquen les quantitats anteriors, el sobrant és

roba	$500-1\cdot100-2\cdot200=0$
botons	$400-2\cdot100-1\cdot200=0$
cremalleres	$225-0\cdot100-1\cdot200=25$

El benefici marginal és doncs de $25\cdot0,20€=5€$.

64. PAU 2006 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 3

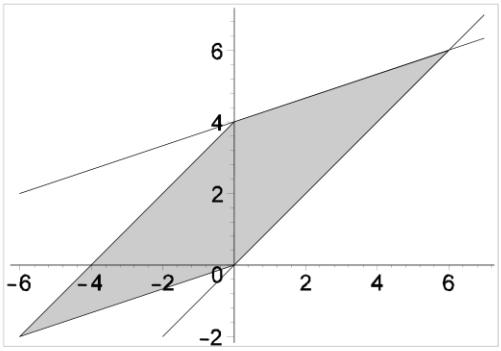
3. Afegiu inequacions al sistema:

$$\left.\begin{matrix} x\le y \\ 3y\le x+12 \end{matrix}\right\}$$

per tal que la regió de les solucions del sistema resultant tingui forma de paral·lelogram. Justifiqueu l'elecció que heu fet.

Puntuació: discussió 1 punt; solucions 1 punt. Total 2 punts.

Solució: La inequació corresponent al costat paral·lel oposat al costat limitat per $x \leq y$ ha de ser de la forma $x \geq y - c$ amb $c > 0$. El signe de desigualtat invertit cal per a que limiti la regió determinada per la inequació amb límit oposat, i $c > 0$ per a que hi hagi una zona on ambdues condicions siguin compatibles. Anàlogament la inequació corresponent al costat paral·lel oposat al costat limitat per $3y \leq x + 12$ serà de la forma $3y \geq x + 12 - d$ amb $d > 0$. Podem triar, per exemple $c = 4$ i $d = 12$. En aquest cas les inequacions a afegir seran $x \geq y - 4$ i $3y \geq x$. La regió factible resultant serà:



Nota pel corrector: El primer punt es valorarà per la correcció del raonament. El segon punt s'atorgarà si es donen dues rectes acceptables. Si hi ha un error en el signe de desigualtat es penalitzarà amb 0.5 punts.

65. PAU 2006 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 6

6. En un jardí municipal es volen plantar un mínim de 1200 geranis, 3200 clavells i 3000 margarides. Una empresa A ofereix un lot que conté 30 geranis, 40 clavells i 30 margarides per 15 €. Una altra empresa B ofereix un lot de 10 geranis, 40 clavells i 50 margarides per 12 €. L'Ajuntament compra x lots a l'empresa A i y lots a l'empresa B.

a) Doneu les inequacions que representen les restriccions a les que estan sotmesos els valors de x i de y per tal que compleixin les condicions de la plantació.
b) Representeu gràficament la regió del pla que satisfà les inequacions.
c) Trobeu el nombre de lots de cada tipus que fan que la despesa sigui mínima i calculeu aquesta despesa mínima.
d) Trobeu quants geranis, clavells i margarides adquireix l'Ajuntament amb la compra de preu mínim i quantes plantes i de quin tipus haurà adquirit per sobre del mínim que vol plantar.

Puntuació: cada apartat 1 punt. Total: 4 punts.

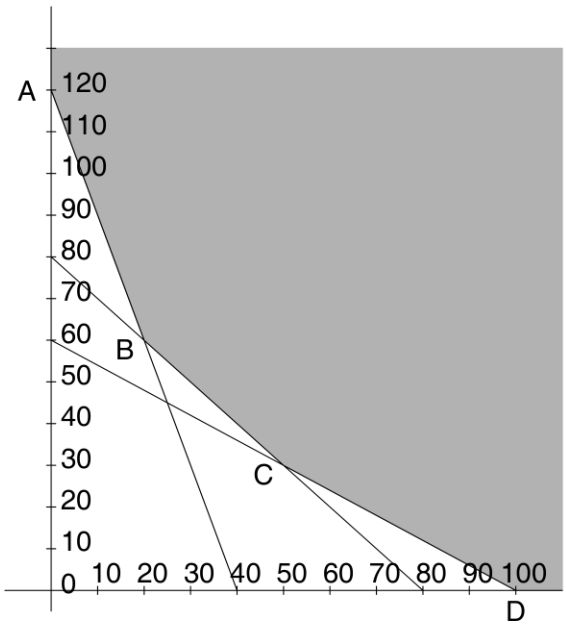
Solució Posem les dades en el quadre següent:

Lot	geranis	clavells	margarides	Preu/unitari
A	30	40	30	15
B	10	40	50	12
Mínim	1200	3200	3000	

Per tant, les restriccions són:

$$\left.\begin{array}{rcrcl} x & \geq & 0 & & \\ y & \geq & 0 & & \\ 30x & + & 10y & \geq & 1200 \\ 40x & + & 40y & \geq & 3200 \\ 30x & + & 50y & \geq & 3000 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{rcrcl} x & \geq & 0 & & \\ y & \geq & 0 & & \\ 3x & + & y & \geq & 120 \\ x & + & y & \geq & 80 \\ 3x & + & 5y & \geq & 300 \end{array}\right\}$$

b) La regió factible és la del gràfic següent:



c) La funció a minimitzar és $p(x,y)=15x+12y$. El punt B és la intersecció de les rectes $3x+y=120$ i $x+y=80$, que és $B=(20,60)$. El punt C és la intersecció de les dues rectes $x+y=80$ i $3x+5y=200$, i és $C=(50,30)$. Fem el quadre de valors de la funció objectiu en els vèrtexs:

	$A(0,120)$	$B(20,60)$	$C(50,30)$	$D(100,0)$
$p(x,y)=15x+12y$	1440	1020	1110	1500

Per tant, el cost mínim s'obtindrà adquirint 20 lots tipus A i 60 lots tipus B, i el cost serà de 1020 €. La funció de cost no té màxim en la regió factible, ja que no és tancada.

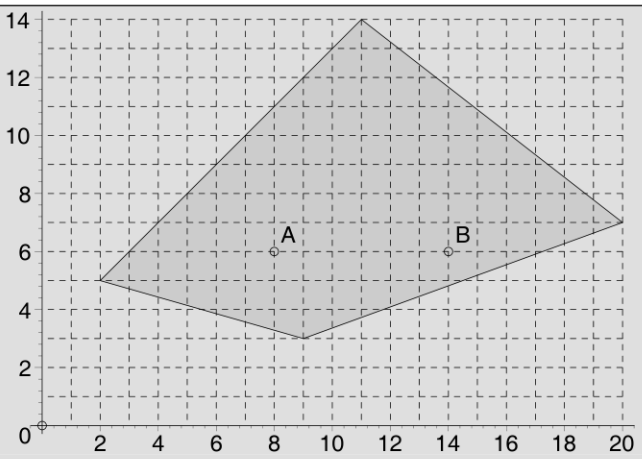
d) Els nombres de plantes que adquireix l'Ajuntament amb la compra de preu mínim és:

$$\begin{array}{lcl} \text{geranis} & = & 30\cdot 20+10\cdot 60 = 1200 \\ \text{clavells} & = & 40\cdot 20+40\cdot 60 = 3200 \\ \text{margarides} & = & 30\cdot 20+50\cdot 60 = 3600. \end{array}$$

Per tant, únicament haurà adquirit 600 margarides a més del mínim de plantes que vol plantar.

66. PAU 2006 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4

4. La funció objectiu d'un problema de programació lineal és $f(x,y)=ax-by+c$, amb a,b,c nombres positius**.** Esbrineu a quin dels dos punts del gràfic A ó B la funció objectiu pren un valor major. Raoneu la resposta.



Puntuació total: 2 punts.

Solució: La funció objectiu en els punts A i B pren els valors:

$$\left.\begin{array}{rcl} f(A) & = & 8a-6b+c \\ f(B) & = & 14a-6b+c \end{array}\right\}$$ i la diferència és: $f(B)-f(A)=6a>0.$

Per tant, $f(B)$ és més gran que $f(A)$.

67. PAU 2006 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 6

6. Els alumnes d'un institut disposen de 300 samarretes, 400 llapis i 600 bolígrafs per finançar-se un viatge. Tenen la intenció de vendre'ls en dos tipus de lots: el lot A consta d'1 samarreta, 3 llapis i 2 bolígrafs i el venen per 9€. El lot B consta d'1 samarreta, 2 llapis i 4 bolígrafs i el venen per 11€. Calculeu quants lots de cada tipus han de vendre per treure'n el benefici màxim i aquest benefici màxim.

Puntuació del plantejament: 2 punts; gràfic: 1 punt; solució: 1 punt. Total: 4 punts.

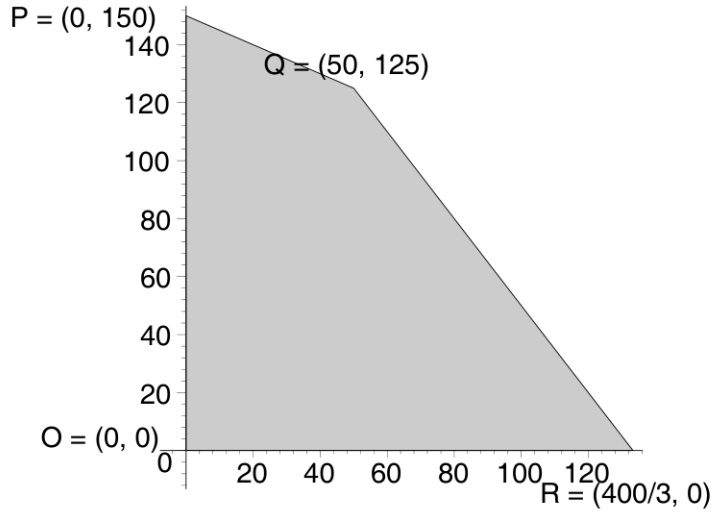
Solució: Fem la taula corresponent als dos lots amb els totals de samarretes, llapis i bolígrafs:

	Samarretes	Llapis	Bolígrafs	Preu/u
A	1	3	2	9
B	1	2	4	11
	300	400	600	

Les restriccions són:

$$\left.\begin{array}{r} A \geq 0; B \geq 0; \\ A + B \leq 300; \\ 3A + 2B \leq 400; \\ 2A + 4B \leq 600. \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} A \geq 0; B \geq 0; \\ A + B \leq 300; \\ 3A + 2B \leq 400; \\ A + 2B \leq 300. \end{array}\right\}$$

La regió factible correspon al gràfic següent:



Avaluem la funció objectiu en els vèrtexs de la regió factible. Tenim:

	O=(0,0)	P=(0,150)	Q=(50,125)	R=(400/3,0)
$f(A,B) = 9A + 11B$	0	1650	1825	1200

Per tant, el benefici màxim s'obté venent 50 lots de tipus A i 125 lots de tipus B, i és de 1825 €.

68. PAU 2006 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 1

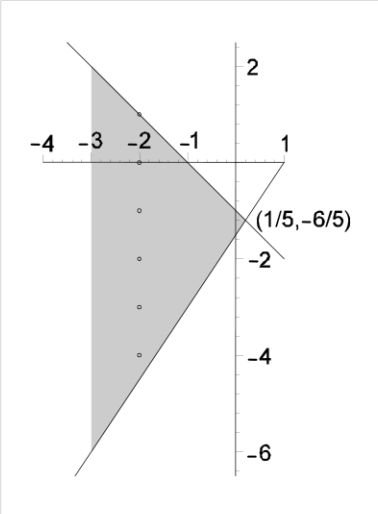
1. a) Representeu la regió solució del sistema d'inequacions lineals següent:

$$\begin{cases} 3x-2y \le 3 \\ x+y \le -1. \end{cases}$$

b) Doneu tres punts d'abscissa $x=-2$ i ordenada entera que siguin solució del sistema.

Puntuació: a) 1 punt; b) 1 punt. Total 2 punts.

Solució: a) El gràfic de la regió factible és:



b) Per $x=-2$, s'han de verificar les inequacions:

$$\left.\begin{matrix} -6-2y \le 3 \\ -2+y \le -1 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} 2y \ge -9 \\ y \le 1 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} y \ge -\frac{9}{2} \\ y \le 1 \end{matrix}\right\}$$

Per tant els punts de la regió amb abscissa igual a -2 són aquells que tinguin $-\frac{9}{2} \le y \le 1$. En particular, els que tenen coordenades enteres són:

(-2,-4), (-2,-3), (-2,-2), (-2,-1), (-2,0), (-2,1).

Nota pels correctors: No més cal donar tres punts de entre els anteriors.

69. PAU 2006 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 2

2. En un problema de programació lineal la regió factible és el conjunt convex format pel triangle de vèrtexs: (0,0), (0,1) i (1,0). La funció objectiu és paral·lela a la recta $x+y=0$. Trobeu els punts en què la funció objectiu assoleix

a) el mínim;
b) el màxim.

Puntuació: a) 1 punt; b) 1 punt. Total 2 punts.

Solució: La funció objectiu és de la forma $f(x,y)=x+y+c$, on c és una constant. Tenint en compte que el mínim i el màxim s'obtenen en els límits de la regió tindrem la taula següent:

	(0,0)	(1,0)	(0,1)
$f(x,y)=x+y+c$	c	$1+c$	$1+c$

a) El mínim s'obté en el punt (0,0).
b) El màxim s'obté en tots els punts del segment d'extrems (0,1) i (1,0).

Nota pel corrector: En l'apartat b) es descomptaran 0.5 punts si es dóna únicament un punt i 0.25 si es donen dos punts enlloc de tot el segment.

70. PAU 2005 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 4

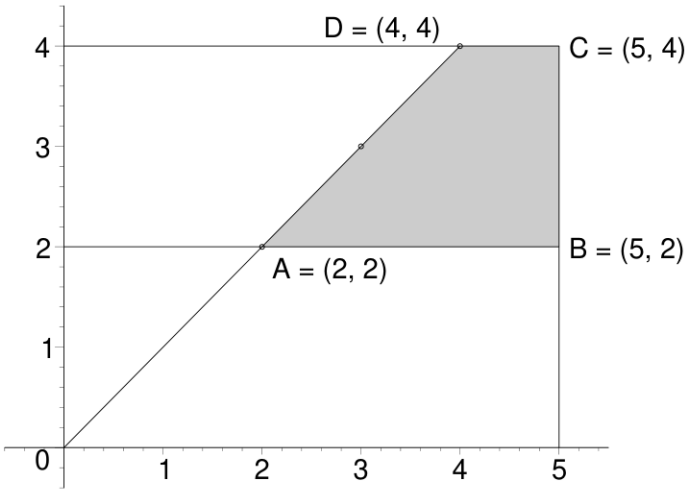
4. a) Resoleu gràficament el sistema d'inequacions

$$\begin{cases} x \le 5, \\ 2 \le y \le 4, \\ y - x \le 0. \end{cases}$$

b) Trobeu tots els punts (x, y) que siguin solucions enteres del sistema i que compleixin $x = y$.

Puntuació: Apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. Total 2 punts.

Solució: a) La regió solució del sistema és:



b) Si han de complir $x = y$, han d'estar en el segment AD. Donat que el sistema admet els punts de la frontera, els punts demanats són $(2,2)$, $(3,3)$ i $(4,4)$.

71. PAU 2005 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 6

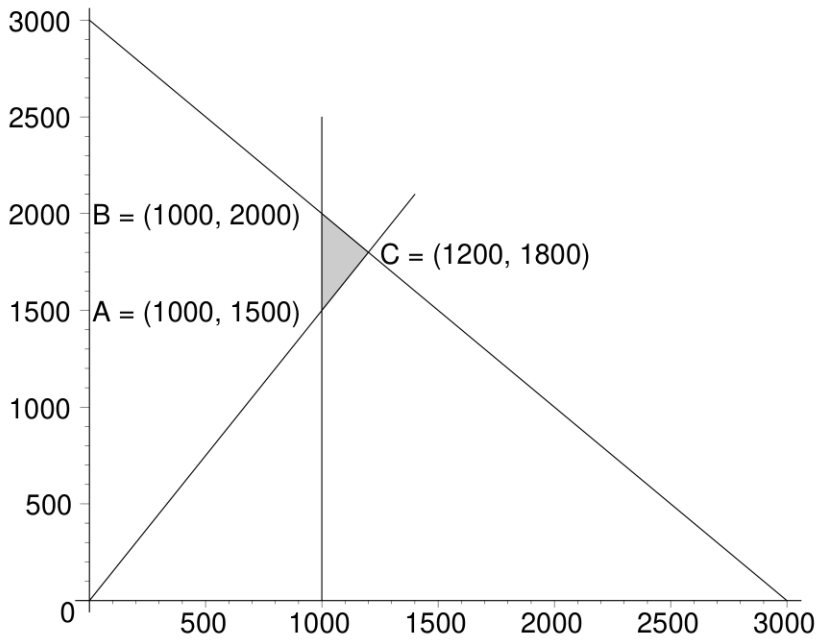
6. Una empresa de telefonia mòbil fabrica dos models de telèfon: A i B. El nombre total de telèfons fabricats mensualment no supera els 3000. Sabem també que dels telèfons A sempre se'n fan almenys 1000 unitats i que la meitat dels telèfons A no supera la tercera part de telèfons B. Si els telèfons A generen un benefici de 40 € per unitat i els B un benefici de 20 € per unitat, trobeu la quantitat de cada classe que s'han de fabricar per obtenir un benefici màxim i aquest benefici màxim.

Puntuació: Sistema i gràfic 1 punt; determinació dels vèrtexs del contorn 1 punt; determinació del nombre de telèfons de cada classe i el benefici màxim 2 punts. Total 4 punts.

Solució: Anomenant x al nombre d'unitats de tipus A que es fabriquen i y al de les de tipus B, les condicions s'expressen pel sistema d'inequacions següent:

$$\begin{cases} x+y \le 3000 \\ x \ge 1000 \\ \frac{1}{2}x \le \frac{1}{3}y \end{cases}$$

Per tant, la regió factible ve determinada pel gràfic següent:



Fem la taula de valors per determinar el nombre de telèfons de cada classe que s'han de fabricar per obtenir el benefici màxim i el benefici màxim:

	$A=(1000,1500)$	$B=(1000,2000)$	$C=(1200,1800)$
$B(x,y)=40x+20y$	70000	80000	84000

Per tant, el nombre de telèfons a fabricar és de 1200 de tipus A i 1800 de tipus B i el benefici màxim obtingut és de 84000 €.

72. PAU 2005 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4

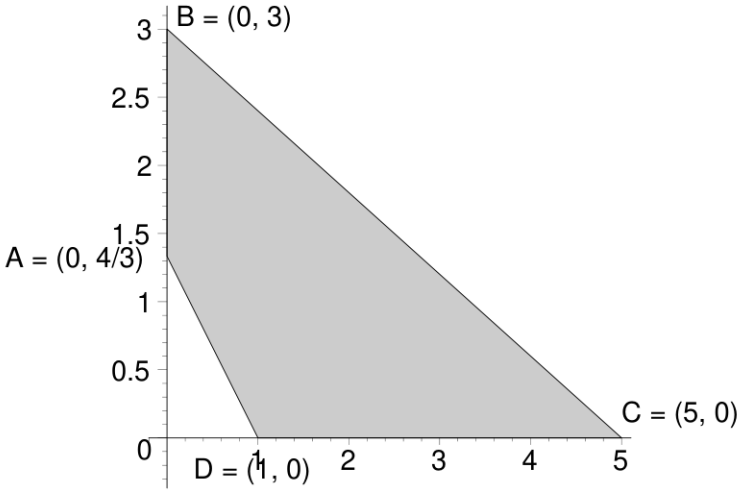
4. Calculeu en quins punts de la regió determinada pel sistema d'inequacions

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, \\ 4x+3y-4 \geq 0, \\ 3x+5y \leq 15, \end{cases}$$

la funció $F(x,y)=\frac{4x}{3}+y$ pren els seus valors màxim i mínim i quins valors tenen.

Puntuació: Gràfic 1 punt; determinació dels punts del contorn i obtenció de tots els punts extrems 1 punt. Total 2 punts.

Solució: La regió solució del sistema ve determinada pel gràfic següent:



Els valors de la funció en el contorn són:

	$A=\left(0,\frac{4}{3}\right)$	$B=(0,3)$	$C=(5,0)$	$D=(1,0)$
$F(x,y)=\frac{4}{3}x+y$	$\frac{4}{3}$	3	$\frac{20}{3}$	$\frac{4}{3}$

Per tant

el màxim s'obté en el punt $C=(5,0)$ i té el valor $\frac{20}{3}$,

el mínim s'obté per tots els punts del segment DA i té el valor $\frac{4}{3}$.

.

Nota pels correctors: Si no donen tot el segment DA com solució es penalitzarà amb 0.5 punts.

73. PAU 2005 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 6

6. Un taller pot produir per dia com a màxim 12 articles del tipus A i 20 del tipus B. Cada dia el servei tècnic pot controlar un mínim de 20 articles i un màxim de 25, independentment del tipus.

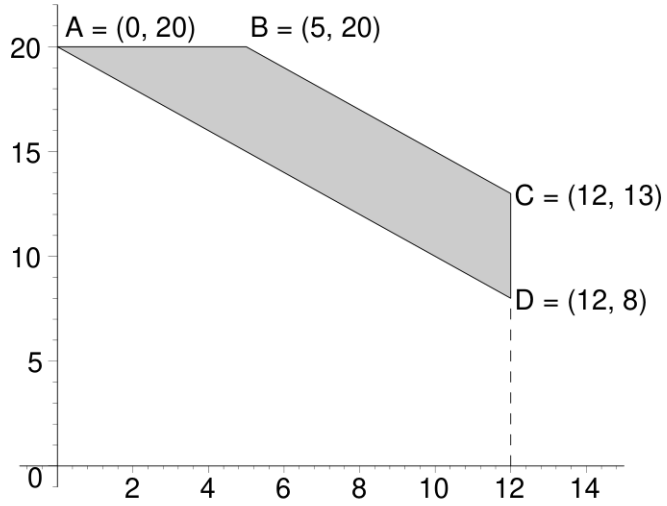
a) Siguin x i y el nombre d'articles produïts per dia dels tipus A i B, respectivament. Expresseu les condicions anteriors mitjançant un sistema d'inequacions en x i y.
b) Representeu la regió del pla determinada per aquest sistema.
c) Sabem que el benefici de produir els articles de tipus A és el doble del que s'obté amb els articles de tipus B. Trobeu quants articles de cada tipus ha de produir per obtenir un benefici màxim.

Puntuació: Apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. apartat c) 2 punts. Total: 4 punts.

Solució: a) El sistema de condicions és:

$$\left.\begin{array}{rcl} x & \leq & 12 \\ y & \leq & 20 \\ x+y & \geq & 20 \\ x+y & \leq & 25 \end{array}\right\}$$

b) La regió solució del sistema és:



c) La funció de benefici és $B(x,y)=k(2x+y)$, on k és una constant positiva no coneguda. La taula de valors en el contorn de la regió factible és:

	$A=(0,20)$	$B=(5,20)$	$C=(12,13)$	$D=(12,8)$
$B(x,y)=k(2x+y)$	$20k$	$30k$	$37k$	$32k$

Per tant el benefici màxim s'obté en el punt $C=(12,13)$, que correspon a produir 12 articles de tipus A i 13 articles de tipus B.

74. PAU 2005 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 2

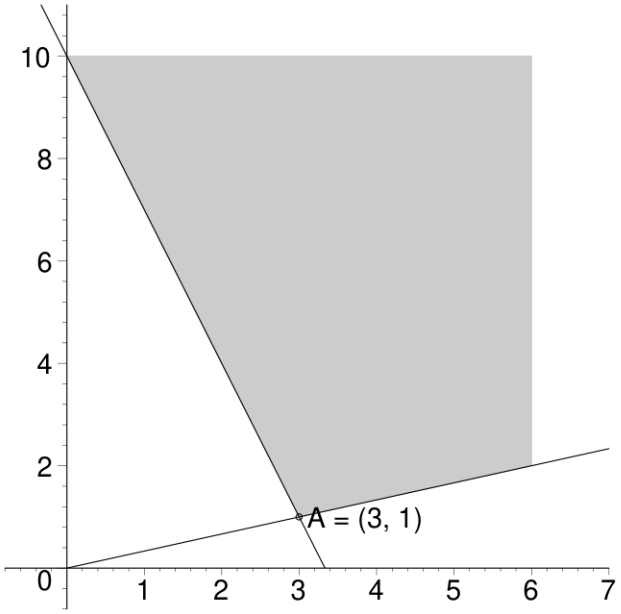
2. a) Determineu la regió solució del sistema i el seu vèrtex:

$$\begin{cases} 3x+y \geq 10, \\ x-3y \leq 0. \end{cases}$$

b) Calculeu el valor de la funció $f(x,y)=x-4y$ en el vèrtex i expliqueu raonadament si correspon a un extrem de $f(x,y)$ i de quina classe.

Puntuació: Apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. Total 2 punts.

Solució: a) La regió factible és infinita i ve donada pel gràfic següent:



El vèrtex demanat és $A=(3,1)$.

b) El valor de la funció $f(x,y)=x-4y$ en A és $f(3,1)=3-4\cdot 1=-1$. Ara calculem el valor de la funció en dos punts a ambdós costats de A: El punt (6,2) està sobre el costat OA. El valor de la funció és $f(6,2)=6-4\cdot 2=-2$, o sigui que disminueix en aquesta direcció. El punt (0,10) està sobre l'altre costat. El valor de la funció en ell és $f(0,10)=0-4\cdot 10=-40$, o sigui que també disminueix en aquesta direcció. Per tant, en el punt $A=(3,1)$, la funció $f(x,y)=x-4y$ pren el valor màxim en la regió factible.

75. PAU 2005 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 5

5. En una empresa s'han de fabricar dos tipus de peces que anomenarem A i B. Per fabricar una peça de tipus A es necessiten 2 quilos d'un metall i per fer-ne una de tipus B, 4 quilos del mateix metall. L'empresa disposa com a màxim de 100 quilos de metall i no pot fabricar més de 40 peces de tipus A ni més de 20 de tipus B.

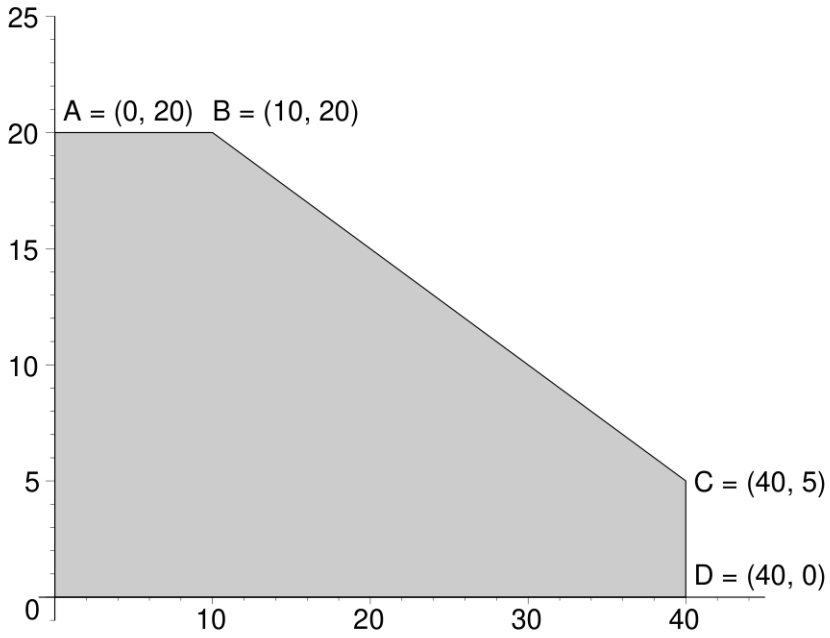
a) Expresseu amb un sistema d'inequacions les restriccions en la fabricació que té l'empresa.
b) Determineu gràficament els punts del pla que verifiquen aquest sistema.
c) D'entre les solucions obtingudes, quins són els possibles valors de peces de cada tipus (han de ser enters) si es volen exhaurir els 100 quilos de metall? Expliqueu ben bé com ho feu per trobar-los.

Puntuació: Apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt; apartat c) 2 punts. Total 4 punts.

Solució: a) Anomenem x al nombre de peces de tipus A i y al nombre de tipus B. Les condicions es tradueixen en el sistema següent:

$$\begin{cases} 2x+4y \le 100 \\ 0 \le x \le 40 \\ 0 \le y \le 20 \end{cases}$$

b) Representem la regió factible:

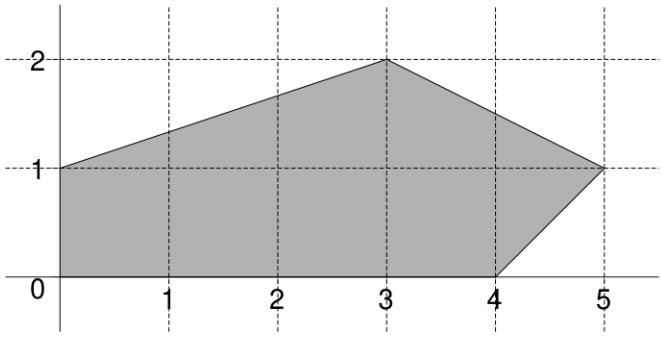


c) Si volem exhaurir els 100 kg de metall el punt corresponent ha d'estar sobre la recta $2x+4y=100$ o de forma equivalent $x=50-2y$. Com la y ha d'estar entre $5 \le y \le 20$, les solucions enteres són el conjunt $\{(50-2n,n) \mid n \in \mathbf{Z}, 5 \le n \le 20\}$, és a dir els punts (40,5), (38,6), (36,7), … (12,19), (10,20).

76. PAU 2004 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 1

QÜESTIONS

1. Trobeu els punts de la regió del dibuix on la funció $f(x,y)=2x+4y+5$ pren el valor màxim i digueu quin és el benefici màxim.



Puntuació: 2 punts.

Solució: El màxim s'obté en el contorn, i en particular en algun vèrtex. Els vèrtexs del contorn són $A(0,1)$, $B(3,2)$, $C(5,1)$, $D(4,0)$, $O(0,0)$. Fem el quadre de valors.

	$A(0,1)$	$B(3,2)$	$C(5,1)$	$D(4,0)$	$O(0,0)$
$f(x,y)=2x+4y+5$	9	19	19	13	5

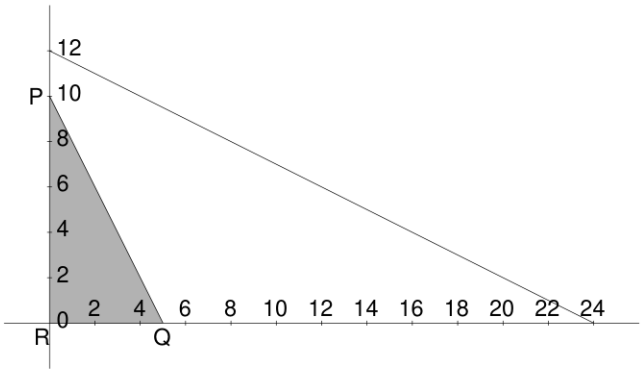
Per tant el màxim s'obté en tots els punts del segment que va de $B(3,2)$ a $C(5,1)$, i el seu valor és 19.

77. PAU 2004 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 2

2. Maximitzeu la funció $f(x,y)=2x-3y$ amb les restriccions: $x+2y\le 24$, $2x+y\le 10$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.

Puntuació: 2 punts. Les respostes sense raonar no puntuen.

Solució: La regió factible és:



El màxim de la funció s'obté en el contorn i en particular en algun vèrtex. Els vèrtexs són: $P(0,10)$, $Q(5,0)$, $R(0,0)$. Fem el quadre de valors:

	$P(0,10)$	$Q(5,0)$	$R(0,0)$
$f(x,y)=2x-3y$	-30	10	0

Per tant, el màxim s'obté en el punt $\boxed{Q(5,0)}$, i val $\boxed{10}$.

78. PAU 2004 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3

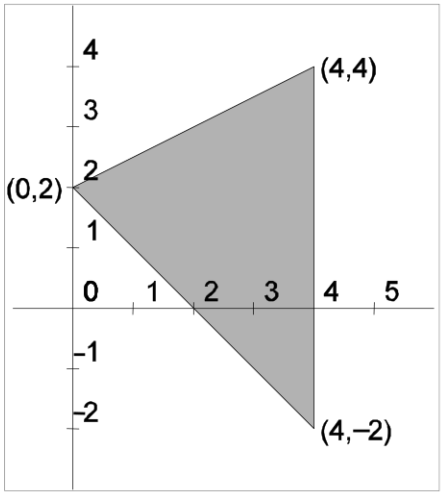
3. a) Representeu gràficament la regió de solucions del sistema d'inequacions següent:

$$\begin{cases} x \le 4 \\ x + y \ge 2 \\ x - 2y + 4 \ge 0 \end{cases}$$

b) Calculeu el mínim de la funció $f(x, y) = x - 2y$ en la regió solució del sistema anterior. En quins punts d'aquesta regió s'assoleix aquest mínim?

Puntuació de cada apartat, 1 punt. Total: 2 punts.

Solució: a) El gràfic de les restriccions és:



.

La funció objectiu en els límits de la regió factible val:

	$(0,2)$	$(4,4)$	$(4,-2)$
$f(x,y) = x - 2y$	-4	-4	8

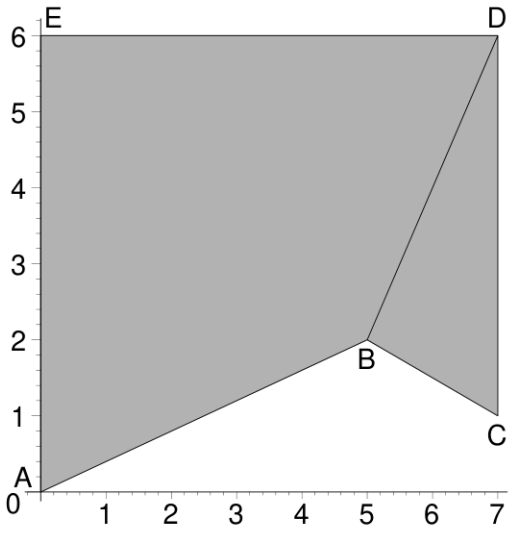
El mínim de $f(x, y) = x - 2y$ en la regió és $\boxed{-4}$, i s'obté en tots els punts del segment que va del punt $(0,2)$ al punt $(4,4)$.

79. PAU 2004 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4

4. Esbrineu si el polígon de vèrtexs consecutius $A(0,0)$, $B(5,2)$, $C(7,1)$, $D(7,6)$ i $E(0,6)$ és la regió factible d'un problema de programació lineal. Justifiqueu la resposta.

Puntuació: 2 punts. Les respostes sense raonar no puntuen.

Solució: El polígon en qüestió no és convex, i per tant no pot correspondre a una regió factible d'un problema de programació lineal.



80. PAU 2004 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 1

1. Sigui S la regió del pla de coordenades més grans o igual que zero i tal que els seus punts compleixen:

(i) La mitjana aritmètica de les coordenades és menor o igual que 5.
(ii) El doble de l'abscissa més l'ordenada és més gran o igual que 5.

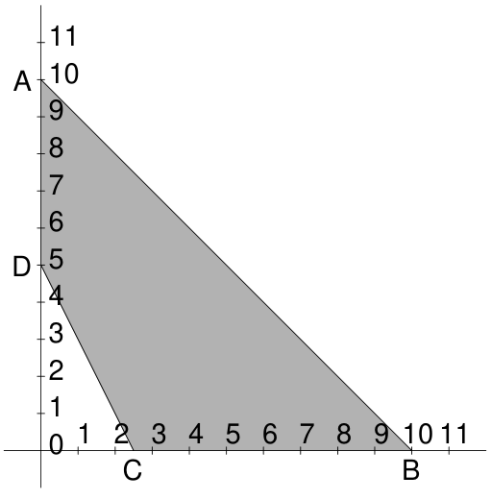
a) Representeu gràficament el conjunt S.
b) Determineu en quins punts de S la funció $f(x,y)=2x+y$ pren el valor màxim.

Puntuació: cada apartat 1 punt. Total: 2 punts.

Solució: a) El sistema d'inequacions que representen les restriccions és:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+y \leq 10 \\ 2x+y \geq 5 \end{cases}$$

El gràfic de la regió factible és:



Els punts d'intersecció són $A(0,10)$, $B(10,0)$, $C(5/2,0)$ i $D(0,5)$.

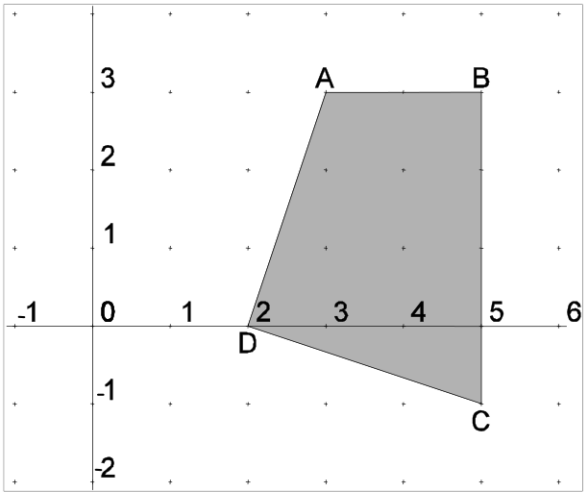
b) Resulta el quadre següent pels valors de la funció $f(x)=2x+y$:

	$A(0,10)$	$B(10,0)$	$C(5/2,0)$	$D(0,5)$
$f(x,y)=2x+y$	10	20	5	5

Per tant, $f(x)$ pren el valor màxim que és $\boxed{20}$, en el punt $\boxed{B(10,0)}$.

81. PAU 2004 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 2

2. El quadrilàter $ABCD$ és la regió solució d'un sistema d'inequacions lineals. Els costats del quadrilàter també formen part de la regió solució.



a) Trobeu el màxim i el mínim de la funció $f(x,y)=x+3y$ en aquesta regió.
b) En quins punts de la regió solució de l'apartat anterior assoleix el màxim i en quin el mínim?

Puntuació: cada apartat 1 punt. Total: 2 punts.

Solució: La funció pren els valors extrems en el contorn. Els punts del contorn són: $A(3,3)$, $B(5,3)$, $C(5,-1)$ i $D(2,0)$. Fem la taula de valors en els vèrtexs:

	$A(3,3)$	$B(5,3)$	$C(5,-1)$	$D(2,0)$
$f(x,y)=x+3y$	12	14	2	2

Per tant, el $\boxed{\text{màxim}}$ el pren en el punt $\boxed{B(5,3)}$ i val $\boxed{14}$, mentre que el $\boxed{\text{mínim}}$ el pren en tots els $\boxed{\text{punts del segment } CD}$ on $C(5,-1)$ i $D(2,0)$, i val $\boxed{2}$.

82. PAU 2003 · Setembre · Sèrie única · Exercici 2

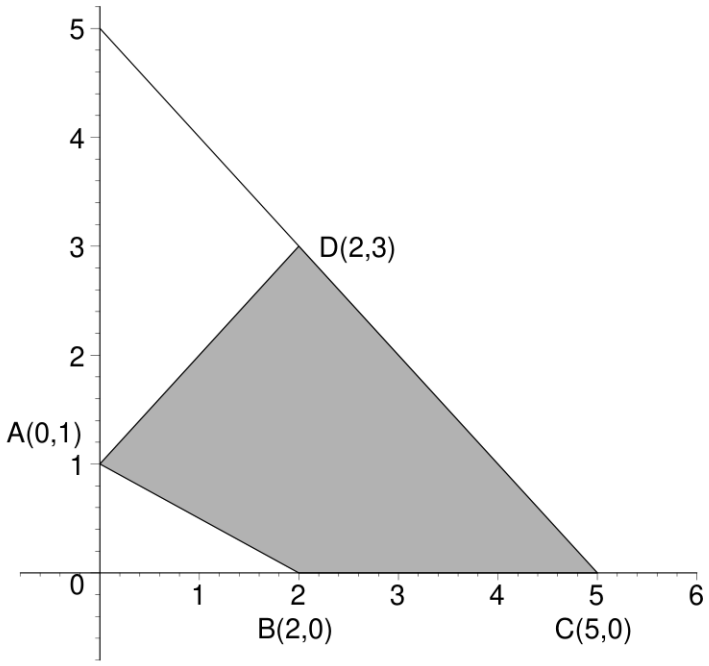
2. Dibuixeu la regió del pla determinada pel sistema d'inequacions següent:

$$\begin{cases} x+y \le 5 \\ -x+y \le 1 \\ x+2y \ge 2 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

i calculeu el màxim de la funció $f(x,y)=2x+2y$ en aquesta regió.

Solució:

El gràfic és:



Els vèrtexs de la regió factible es determinen fàcilment fent les interseccions de les rectes i són els que figuren al gràfic i a la taula següent. Fem la taula per determinar el màxim.

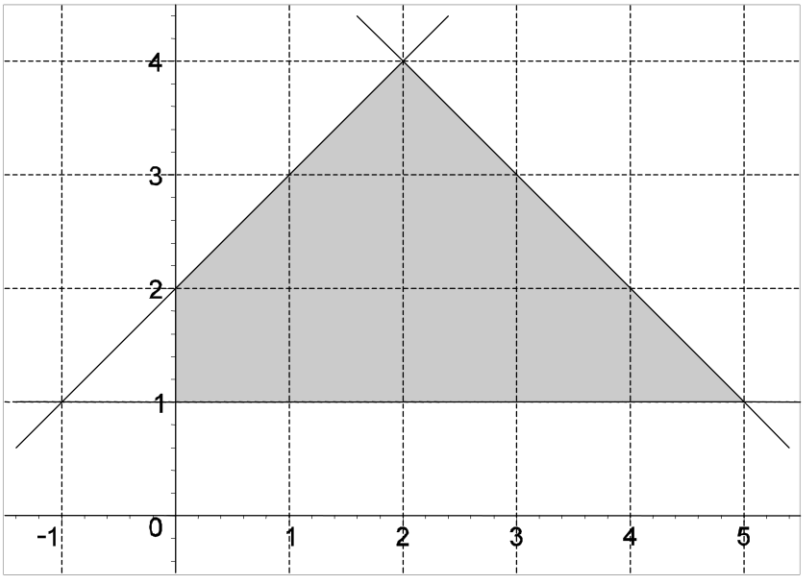
Funció	$A(0,1)$	$B(2,0)$	$C(5,0)$	$D(2,3)$
$f(x,y)=2x+2y$	2	4	10	10

Per tant, el màxim s'assoleix en tot l'interval que està sobre la recta $x+y=5$ entre els punts $C(5,0)$ i $D(2,3)$. El valor màxim és $\boxed{10}$.

Puntuació: 1 punt per la gràfica i 1 punt pel màxim. Total: 2 punts.

83. PAU 2003 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 1

1. Determineu el sistema de quatre inequacions amb dues incògnites que té per solució el polígon ombrejat dibuixat en la gràfica següent, suposant que els costats també són solució.



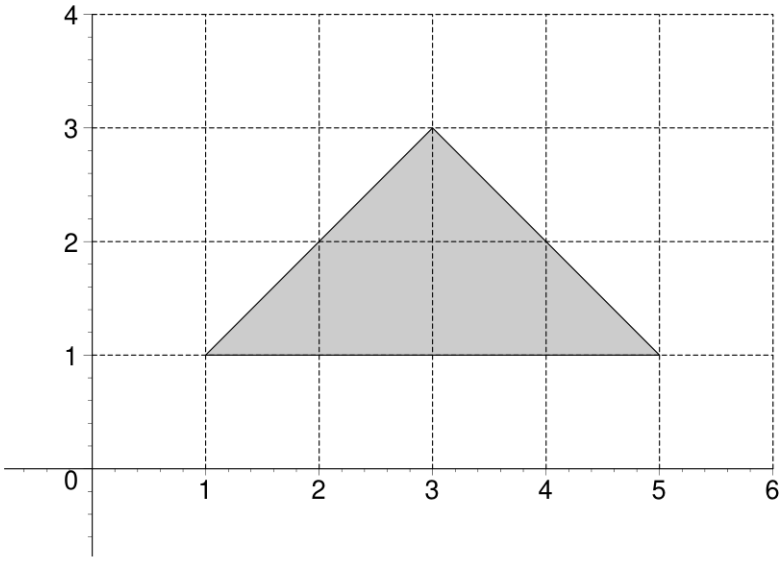
Solució:

Les rectes que delimiten el triangle tenen per equacions $y=1$, $x=0$, $y=x+2$ i $x+y=6$. Observant que passa fixada la x i variant la y en direcció al semiplà ombrejat obtenim les inequacions $\boxed{y\geq 1,\ x\geq 0,\ y\leq x+2 \text{ i } x+y\leq 6.}$

Puntuació: 2 punts.

84. PAU 2003 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 1

2. Doneu el sistema de tres inequacions amb dues incògnites que té per solució el triangle assenyalat en la gràfica següent, suposant que els costats del triangle també formen part de la solució.



Puntuació: 2 punts.

Solució:

Les rectes que delimiten el triangle tenen per equacions $y=1$, $y=x$ i $x+y=6$. Observant que passa fixada la x i variant la y en direcció al semiplà ombrejat obtenim les inequacions $\boxed{y\geq 1,\ y\leq x \text{ i } x+y\leq 6.}$

85. PAU 2002 · Setembre · Sèrie única · Exercici 6

6. Un entusiasta de la salut vol tenir un mínim de 36 unitats de vitamina A, 28 unitats de vitamina C i 32 unitats de vitamina D al dia. Cada pastilla de la marca 1 costa 0,03 € i proporciona 2 unitats de vitamina A, 2 de C i 8 de D. Cada pastilla de la marca 2 costa 0,04 € i proporciona 3 unitats de vitamina A, 2 de C i 2 de D. Quantes pastilles de cada marca haurà de comprar per a cada dia si vol cobrir les necessitats bàsiques amb el menor cost possible?

Puntuació: Total: 4 punts.

Solució: Fem un esquema amb les dades de l'enunciat:

	Quantitat	A	C	D	Cost
Marca 1	x	$2x$	$2x$	$8x$	$0,03x$ €
Marca 2	y	$3y$	$2y$	$2y$	$0,04y$ €
Condicions	$x \geq 0, y \geq 0$	$2x+3y \geq 36$	$2x+2y \geq 28$	$8x+2y \geq 32$	$C = \frac{3x+4y}{100}$

Per tant s'ha de minimitzar el cost $C = 0,03x + 0,04y$ subjecte a les condicions

$$\begin{aligned} 2x+3y &\geq 36 \\ 2x+2y &\geq 28 \\ 8x+2y &\geq 32 \\ x \geq 0; y &\geq 0 \end{aligned}$$

Les interseccions són:

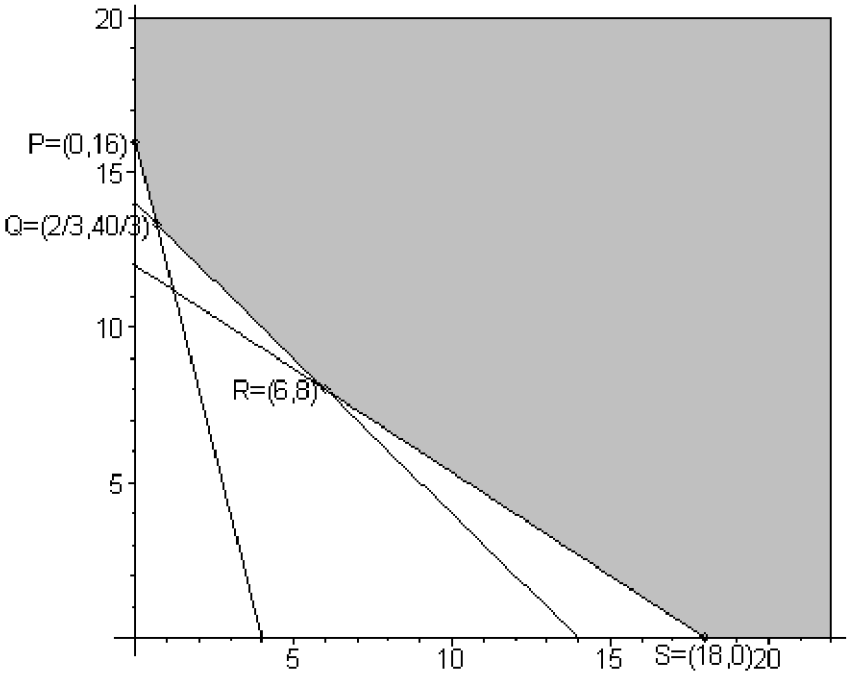
$$\left.\begin{matrix} x=0 \\ 8x+2y=32 \end{matrix}\right\} P=(0,16)$$

$$\left.\begin{matrix} 8x+2y=32 \\ 2x+2y=28 \end{matrix}\right\} Q=\left(\frac{2}{3},\frac{40}{3}\right)$$

$$\left.\begin{matrix} 2x+2y=28 \\ 2x+3y=36 \end{matrix}\right\} R=(6,8)$$

$$\left.\begin{matrix} 2x+3y=36 \\ y=0 \end{matrix}\right\} S=(18,0)$$

El gràfic de la regió factible és:



Finalment, trobem el punt on el cost és mínim, que sabem que s'obté en un vèrtex (o en un costat).

	$P=(0,16)$	$Q=\left(\frac{2}{3},\frac{40}{3}\right)$	$R=(6,8)$	$S=(18,0)$
$C=0,03x+0,04y$	$0,64$	$\frac{166}{300}=0,5533$	$0,50$	$0,54$
			Cost mínim	

El cost mínim s'obtindrà prenent 6 pastilles de la marca 1 i 8 pastilles de la marca 2. El cost és llavors de 0,50 € per dia.

Nota: Si la solució del problema es fa pel mètode descrit aquí, es puntuarà així: Esquema i restriccions: 1,5 punts. Determinació dels vèrtexs i gràfic de la regió factible: 1,5 punts. Determinació dels valors que fan mínim el cost i el cost mínim: 1 punt. Aquesta proposta de puntuació és indicativa, ja que les variants de les respostes han de ser valorades a criteri del corrector. Sempre que el raonament i el resultat siguin correctes es valorarà en quatre punts el problema.

86. PAU 2002 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 6

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

87. PAU 2001 · Setembre · Sèrie única · Exercici 2 (Problemes)

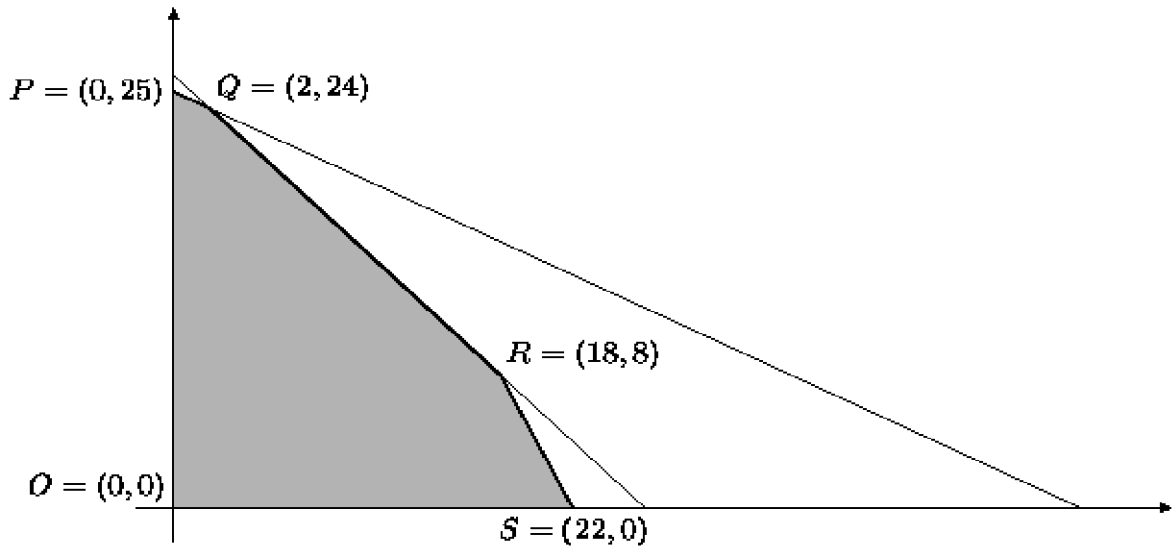
2. Fabricant x dotzenes de pastissos de tipus A i y de tipus B el benefici és:

$$g(x, y) = 20x + 30y\,.$$

Distribuïm les dades en la taula següent:

	A	B	Límit	Restricció
Farina	3	6	150	$3x + 6y \leq 150$; $x + 2y \leq 50$
Sucre	1	0,5	22	$x + 0{,}5y \leq 22$; $2x + y \leq 44$
Mantega	1	1	26	$x + y \leq 26$

A més cal considerar les restriccions $x \geq 0$, $y \geq 0$. Representem les rectes, la regió factible i calculem els punts d'intersecció Q i R:



Per trobar els vèrtexs Q i R, els sistemes són:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+2y & = & 50 \\ x+y & = & 26 \end{array}\right\} \quad Q=(2,24); \qquad \left.\begin{array}{rcl} x+y & = & 26 \\ 2x+y & = & 44 \end{array}\right\} \quad R=(18,8);$$

Els valors de $g(x,y)$ en els vèrtex són:

	$O=(0,0)$	$P=(0,25)$	$Q=(2,24)$	$R=(18,8)$	$S=(22,0)$
$g(x,y)$	0	750	760	600	440

Per tant, el màxim guany s'obté a $Q=(2,24)$, és a dir fabricant 2 dotzenes de tipus A i 24 dotzenes de tipus B.

Nota pels correctors: Puntueu 2 punts pel plantejament de les inequacions, 1 punt pel dibuix de la regió factible i la determinació dels vèrtexs, i 1 punt per la determinació dels valors de x i y. Cal que tingueu en compte que aquest problema és un xic difícil. Puntueu amb benevolència si hi ha raonaments correctes, encara que no s'arribi al resultat final correcte.

[4 punts]

88. PAU 2001 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 2 (Problemes)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

89. PAU 2000 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 2 (Qüestions)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

90. PAU 2000 · Setembre · Sèrie 6 · Exercici 2 (Problemes)

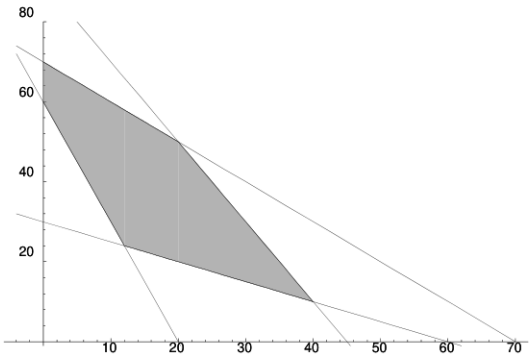
2. Sigui x el nombre de bidons del fertilitzant 1 que es produeixen i y els del fertilitzant 2. La funció que dóna el benefici obtingut és

$$z(x, y) = 6x + 5y$$

Les restriccions són

$$\left.\begin{array}{c} 20x + 10y \leq 900 \\ 20x + 20y \leq 1400 \\ 30x + 10y \geq 600 \\ 30x + 60y \geq 1800 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2x + y \leq 90 \\ x + y \leq 70 \\ 3x + y \geq 60 \\ x + 2y \geq 60 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right.$$

La regió que determinen aquestes restriccions és de la forma



amb vèrtexs als punts $A = (20, 50)$, $B = (40, 10)$, $C = (12, 24)$, $D = (0, 60)$i $E = (0, 70)$. Els valors de z en aquests punts són: $z(A) = 370$, $z(B) = 290$, $z(C) = 192$, $z(D) = 300$ i $z(E) = 350$. Per tant el màxim benefici s'obté quan es fabriquen 20 bidons del fertilitzant 1 i 50 del fertilitzant 2.

Compteu fins a un punt per la determinació de la funció que dóna el benefici i de les equacions que donen les restriccions sobre les variables. Deixeu els altres tres punts pels càlculs necessaris per a determinar els vèrtexs de la regió admissible. No traieu més d'un punt per errors en els càlculs (sempre que no produeixin resultats clarament impossibles).

91. PAU 2000 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1 (Qüestions)

1. La regió que es demana és un triangle de vèrtexs $(0, 0)$ (intersecció de $y = 0$ amb $4x + y = 0$), $(1, 0)$ (intersecció de $y = 0$ amb $2x + y = 2$), i $(-1, 4)$ (intersecció de $4x + y = 0$ i $2x + y = 2$).

   La funció $z = x + y$ té el seu màxim en el vertex $(-1, 4)$ on val 3.

   Compteu 1 punt pel dibuix i 1 punt pel màxim.