Matemàtiques aplicades a les ciències social

Probabilitat

Solucions · 12 exercicis

Proves d'accés a la universitat (PAU) de Catalunya. Ordenats del més recent al més antic.
Retalls dels exàmens i pautes oficials (selecat.cat / universitats.gencat.cat).

Exercici 3

a) Considerem els esdeveniments:

$P_1 =$ l'estudiant és de primer any

$P_2 =$ l'estudiant és de segon any

$A =$ l'estudiant aprova l'assignatura

A partir de l'enunciat, sabem les probabilitats següents:

$$P(P_1) = 0{,}70, \quad P(P_2) = 1 - 0{,}70 = 0{,}30$$

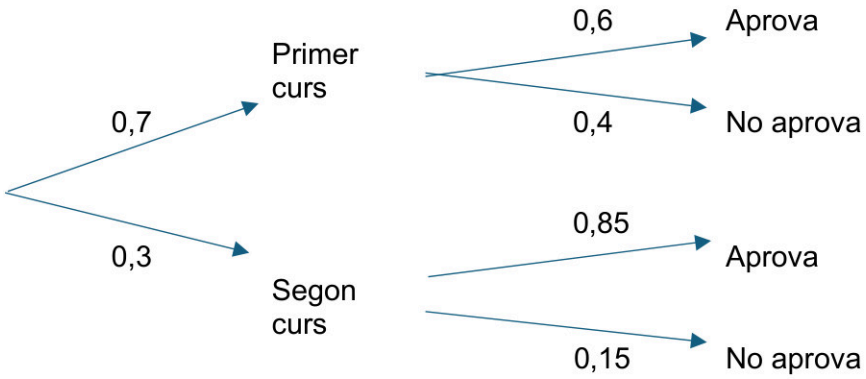
$$P(A|P_1) = 0{,}60, \quad P(A|P_2) = 0{,}85$$

Per a calcular la probabilitat que un estudiant escollit a l'atzar aprovi, utilitzem el teorema de les probabilitats totals:

$$P(A) = P(A \cap P_1) + P(A \cap P_2) = P(A|P_1)P(P_1) + P(A|P_2)P(P_2)$$
$$= (0{,}60 \times 0{,}70) + (0{,}85 \times 0{,}30) = 0{,}42 + 0{,}255 = 0{,}675$$

Per tant, la probabilitat que un estudiant escollit a l'atzar aprovi l'assignatura és de $0{,}675$.

També ho podem plantejar mitjançant un diagrama d'arbre:



Ara hem de calcular quina és la probabilitat que un estudiant sigui de primer curs, si sabem que ha aprovat l'assignatura. Utilitzarem el teorema de Bayes:

$$P(P_1|A) = \frac{P(A|P_1)P(P_1)}{P(A)} = \frac{0{,}60 \times 0{,}70}{0{,}675} = \frac{0{,}42}{0{,}675} = \frac{28}{45} \approx 0{,}6222$$

Per tant, la probabilitat que un estudiant que ha aprovat l'assignatura sigui de primer any és aproximadament de $0{,}6222$.

b) Sabem que l'interval de confiança amb un nivell de confiança $\gamma \epsilon (0,1)$ per a la proporció, quan la mida de la mostra és gran, és donat per

$$\left[\hat{p} - z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

Tenim les dades següents:

Mida mostral: $n = 80$

Nombre d'èxits (aprovats): $x = 55$

Proporció mostral: $\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{55}{80} = 0{,}6875$

Nivell de confiança: $\gamma = 0{,}95 \Rightarrow z_\gamma = 1{,}96$

Calculem

$$1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}6875 \times 0{,}3125}{80}} \approx 0{,}1016.$$

Per tant, l'interval de confiança del 95 % és

$$[0{,}6875 - 0{,}1016;\ 0{,}6875 + 0{,}1016] = [0{,}5859;\ 0{,}7891].$$

L'interval de confiança del 95 % per a la proporció d'aprovats, després d'aplicar el nou mètode, és $[0{,}586;\ 0{,}789]$, és a dir, el percentatge d'aprovats després d'aplicar el mètode està entre el $58{,}6\ \%$ i el $78{,}9\ \%$ amb una confiança del 95 %.

Segons el que hem calculat a l'apartat anterior, la proporció d'aprovats abans del nou mètode era de $0{,}675$; és a dir, aprovava un percentatge del $67{,}5\ \%$. L'interval de confiança obtingut $[0{,}586;\ 0{,}789]$ inclou el valor $0{,}675$; per tant, amb un nivell de confiança del 95 % no podem afirmar que el nou mètode hagi millorat la taxa d'aprovats.

Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara.

a) Assignació correcta d'esdeveniments: 0,25 punts. Càlcul de la primera probabilitat demanada: 0,5 punts. Càlcul de la segona probabilitat demanada: 0,5 punts.

b) Càlcul de la proporció mostral: 0,25 punts. Interpretació correcta de la fórmula i substitució correcta de cada paràmetre pel seu valor: 0,5 punts. Resultat final: 0,25 punts. Justificació correcta del que no podem afirmar a partir del resultat: 0,25 punts.

2. PAU 2026 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 4 (Opció A)

OPCIÓ A

a) Durant el curs passat es van dur a terme $96 + 84 = 180$ activitats presencials, d'un total de 240 activitats. Per tant, la probabilitat que una inscripció correspongui a una activitat presencial és

$$p = P(\text{presencial}) = \frac{180}{240} = 0{,}75.$$

Per tant, la probabilitat que una inscripció sigui d'una activitat no presencial és

$$q = 1 - p = 0{,}25.$$

Considerem la variable aleatòria

$X =$ nombre d'inscripcions a activitats presencials.

Atès que es reben 15 inscripcions independents, la variable X segueix una distribució binomial

$$X \sim \mathrm{B}(15, 0{,}75).$$

La probabilitat que exactament 10 de les 15 inscripcions siguin per a activitats presencials és

$$P(X = 10) = \binom{15}{10}(0{,}75)^{10}(0{,}25)^{5} \approx 0{,}1651.$$

El valor esperat d'una variable binomial és

$$E(X) = n \cdot p = 15 \cdot 0{,}75 = 11{,}25.$$

És a dir, la probabilitat que hi hagi exactament 10 inscripcions d'activitats presencials és de 0,1651 i el nombre esperat d'inscripcions presencials és d'11.

b) Considerem ara les variables següents
$x =$ nombre d'activitats en què ha participat la Carme,
$y =$ nombre d'activitats en què ha participat el Saïd,
$z =$ nombre d'activitats en què ha participat el Martí.
Traduïm la informació de l'enunciat en equacions. D'una banda, sabem que la Carme ha participat en 30 activitats més que el Martí, per tant,

$$x = z + 30.$$

D'altra banda, també sabem que el Saïd ha participat en 18 activitats més que el Martí, és a dir,

$$y = z + 18.$$

Finalment, entre tots tres han dut a terme 240 activitats, per tant,

$$x + y + z = 240.$$

Obtenim així el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x - z = 30, \\ y - z = 18, \\ x + y + z = 240. \end{cases}$$

Apliquem el mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 30 \\ 0 & 1 & -1 & 18 \\ 1 & 1 & 1 & 240 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 30 \\ 0 & 1 & -1 & 18 \\ 0 & 1 & 2 & 210 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 30 \\ 0 & 1 & -1 & 18 \\ 0 & 0 & 3 & 192 \end{array}\right).$$

I obtenim la solució del sistema:

$$x = 94, y = 82, z = 64.$$

Per tant, la Carme ha participat en 94 activitats; el Saïd, en 82, i el Martí, en 64.

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara.

a) Càlcul de la probabilitat que una inscripció sigui d'una activitat presencial: 0,25 punts. Plantejament de la binomial: 0,25 punts. Càlcul de la binomial: 0,5 punts. Càlcul del valor esperat: 0,5 punts.
b) Plantejament de les equacions del sistema: 0,5 punts. Resolució del sistema: 0,5 punts.

3. PAU 2026 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3

3.

3.1. Anomenem x al nombre de pàgines web eficients d'entre les 2.500 de la mostra. Si les dades de l'empresa són correctes, aquesta variable seguirà una distribució binomial de paràmetres $n = 2500$ i $p = 0{,}5$.

Per tant, $x \sim$ Binomial $(n = 2500, p = 0{,}5)$.

Volem calcular $P(x \leq 1299)$.

La distribució binomial es pot aproximar per una normal quan n és gran i p no és massa propera a 0 o 1. Concretament es pot aproximar per una normal de mitjana np i variància $np(1-p)$.

Observem que

$$np = 2500 \cdot 0{,}5 = 1250$$

i

$$np(1-p) = 2500 \cdot 0{,}5 \cdot (1 - 0{,}5) = 625$$

Per tant, la variable x es pot aproximar per una $N(1250, 625)$.

Aleshores, si anomenem Z a la distribució $N(0{,}1)$, la $P(X \leq 1299)$ es pot aproximar de la següent manera:

$$P(X \leq 1299) \approx P\left(Z \leq \frac{1299 - 1250}{\sqrt{625}}\right) = P(Z \leq 1.96)$$

Sabem que $P(-1{,}96 \leq Z \leq 1{,}96) = 0{,}95$ i, per tant, per la simetria de la distribució normal, $P(Z \leq 1.96) = 0{,}975$.

Per tant, si les dades de l'empresa són correctes, la probabilitat que com a molt 1.299 pàgines de la mostra siguin eficients és aproximadament de 0,975.

3.2. L'interval de confiança per a la mitjana quan les mostres són grans i la variància σ^2 és desconeguda és donat per:

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

En aquest cas tenim les dades següents:

Mida mostral: $n = 2500$

Mitjana mostral: $\bar{x} = 2.95$ s

Desviació típica mostral: $s = 0.38$ s

Nivell de confiança: $\gamma = 0.95 \Rightarrow z_\gamma = 1{,}96$

Per tant,

$$\bar{x} - z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} = 2{,}95 - 1{,}96 \cdot \frac{0{,}38}{\sqrt{2500}} = 2{,}9351$$

i

$$\bar{x} + z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} = 2{,}95 + 1{,}96 \cdot \frac{0{,}38}{\sqrt{2500}} = 2{,}9649$$

Així, l'interval de confiança del 95 % per a la mitjana del temps de càrrega de les pàgines web en segons és $[2{,}9351,\ 2{,}9649]$.

Com que tot l'interval és inferior a 3 segons, podem afirmar, amb un nivell de confiança del 95 %, que el temps mitjà de càrrega és inferior a 3 segons.

A més, si suposem que el temps de càrrega segueix una distribució normal, aquesta és simètrica i el valor central de la distribució coincideix amb la mitjana. Per tant, si la mitjana és inferior a 3 segons, més de la meitat de les pàgines web tenen un temps de càrrega inferior a 3 segons.

En conseqüència, les dades obtingudes són coherents amb l'afirmació de l'empresa que almenys el 50 % de les pàgines web que gestiona són eficients

---

Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprar la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressar la solució de manera clara.

3.1. Saber que la distribució de la variable és la binomial: 0,5 punts. Aproximació correcta de la binomial per la normal: 0,5 punts. Obtenció de la probabilitat demanada: 0,25 punts.

3.2. Interpretació correcta de la fórmula i substitució correcta de cada paràmetre pel seu valor: 0,5 punts. Obtenció de l'interval de confiança: 0,5 punts. Resposta correcta a la pregunta: 0,25 punts.

4. PAU 2026 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 2

2.

2.1. Considerem els esdeveniments

$J =$ l'alumne utilitza la T-jove per arribar al campus.

$T =$ l'alumne accedeix al campus en tren.

$B =$ l'alumne accedeix al campus en bus.

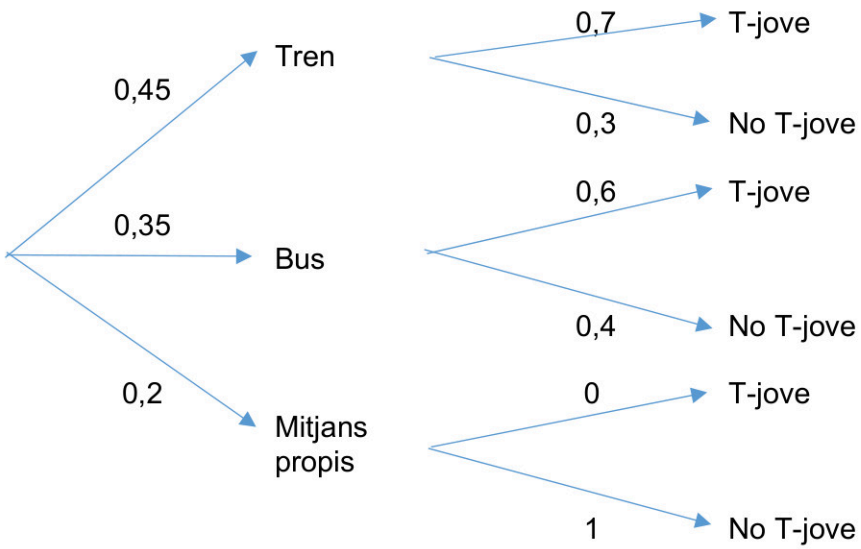
$M =$ l'alumne accedeix al campus per mitjans propis.

A partir de les dades de l'enunciat sabem que $P(T) = 0{,}45$, $P(B) = 0{,}35$ i $P(M) = 0{,}2$. Sabem també que $P(J|T) = 0{,}7$, $P(J|B) = 0{,}6$ i $P(J|M) = 0$.

Aleshores, per la fórmula de les probabilitats totals,

$P(J) = \mathrm{P(J \cap T)} + \mathrm{P(J \cap B)} + \mathrm{P(J \cap M)} = \mathrm{P(T)} \cdot \mathrm{P(J|T)} + \mathrm{P(B)} \cdot \mathrm{P(J|B)} + \mathrm{P(M)} \cdot \mathrm{P(J|M)} = 0{,}45 \cdot 0{,}7 + 0{,}35 \cdot 0{,}6 + 0{,}2 \cdot 0 = 0{,}525.$

També el podem resoldre mitjançant un diagrama d'arbre:



Així doncs, la probabilitat que arribi al campus utilitzant la T-jove és de 0,525.

Ara ens demanen que calculem la probabilitat que arribi en tren si sabem que utilitza la T-jove. Per tant,

$$P(T|J) = \frac{P(T \cap J)}{P(J)} = \frac{P(T) \cdot P(J|T)}{P(J)} = \frac{0{,}45 \cdot 0{,}7}{0{,}525} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

Si sabem que utilitza la T-jove per arribar al campus, la probabilitat que hi arribi en tren és 0.6.

2.2. La mida de la mostra és $n = 300$. L'estimació puntual de la mitjana i la desviació típica en la mostra han estat $\bar{x} = 53$ i $S = 8$.

Quan la mida de la mostra és gran, l'interval de confiança per a la mitjana amb un nivell de confiança $\gamma \epsilon (0,1)$ s'obté a partir de la fórmula

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}\right],$$

en què, si Z segueix una distribució normal (0,1), $P(-z_\gamma \leq Z \leq z_\gamma) = \gamma$.
Per tant tenim que els extrems de l'interval són

$$\bar{x} - z_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} = 53 - 1{,}96\frac{8}{\sqrt{300}} = 52{,}0947$$

i

$$\bar{x} + z_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} = 53 + 1{,}96\frac{8}{\sqrt{300}} = 53{,}9053.$$

L'interval de confiança demanat és [52'0947,53'9053]. Per tant, amb una confiança del 95% sabem que la mitjana de temps que triguen els alumnes per arribar des de la porta de casa seva al campus està entre 52,0947 i 53,9053 minuts.

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara. Si no és el cas es pot descomptar fins a un màxim de 0,25 punts.

2.1 Assignació correcta d'esdeveniments: 0.25 punts. Càlcul de la primera probabilitat demanada: 0,5 punts. Càlcul de la segona probabilitat demanada: 0.5 punts.

2.2 Interpretació correcta de la fórmula i substitució correcta de cada paràmetre pel seu valor: 0,5 punts. Resultat final: 0,75 punts.

5. PAU 2025 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 3

3.

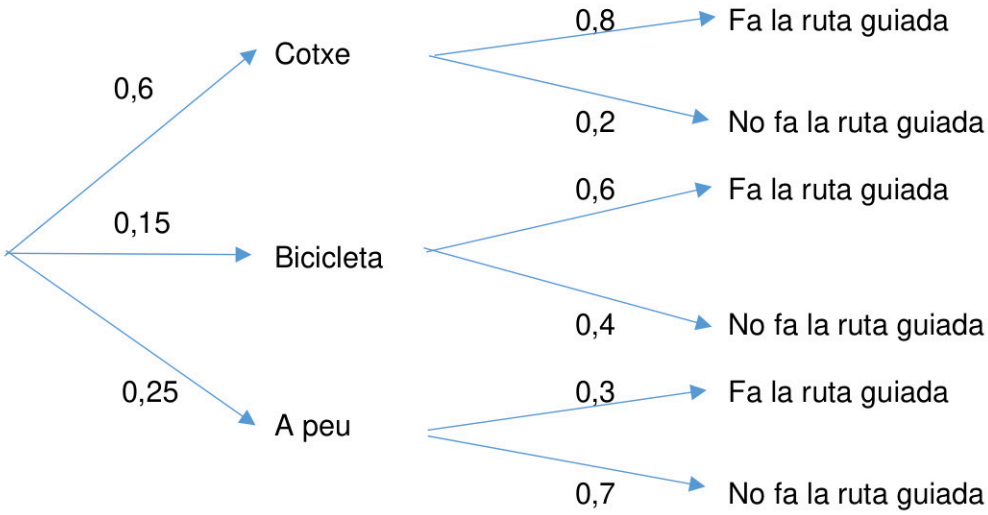
a) Considerem els esdeveniments

$R =$ el visitant ha fet la ruta guiada.
$C =$ el visitant ha accedit al parc en cotxe.
$B =$ el visitant ha accedit al parc en bicicleta.
$P =$ el visitant ha accedit al parc a peu.

A partir de les dades de l'enunciat sabem que $P(C) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}15$ i $P(P) = 0{,}25$. Sabem també que $P(R|C) = 0{,}8$, $P(R|B) = 0{,}6$ i $P(R|P) = 0{,}3$.

Aleshores, per la fórmula de les probabilitats totals,
$P(R) = P(R \cap C) + P(R \cap B) + P(R \cap P) = P(C) \cdot P(R|C) + P(B) \cdot P(R|B) + P(P) \cdot P(C|P) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 + 0{,}15 \cdot 0{,}6 + 0{,}25 \cdot 0{,}3 = 0{,}645.$

També ho podem resoldre mitjançant un diagrama d'arbre



Així doncs, la probabilitat que un individu escollit a l'atzar faci la ruta guiada és de 0,645.

Ara ens demanen que calculem la probabilitat que hi hagi accedit en cotxe si sabem que ha fet la ruta guiada. Per tant,

$$P(C|R) = \frac{P(C \cap R)}{P(R)} = \frac{P(C) \cdot P(R|C)}{P(R)} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}8}{0{,}645} = 0{,}7442.$$

Si sabem que fa la ruta guiada, la probabilitat que hagi accedit al parc en cotxe és de 0,7442.

b) La mida de la mostra és $n = 100$. L'estimació puntual de la mitjana i la desviació típica en la mostra han estat $\bar{x} = 231$ i $s = 32$.

Quan la mida de la mostra és gran, l'interval de confiança per a la mitjana amb un nivell de confiança $\gamma \epsilon (0,1)$ s'obté a partir de la fórmula

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}\right],$$

en què, si Z segueix una distribució normal (0,1), $\mathrm{P}(-z_\gamma \leq Z \leq z_\gamma) = \gamma$. Per tant, tenim que els extrems de l'interval són:

$$\bar{x} - z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} = 231 - 1{,}96\frac{32}{\sqrt{100}} = 224{,}728$$

i

$$\bar{x} + z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} = 231 + 1{,}96\frac{32}{\sqrt{100}} = 237{,}272$$

L'interval de confiança demanat és [224'728,237'272] minuts. És a dir, amb una confiança del 95% sabem que la mitjana de temps que els visitants passen al parc natural està entre 224,728 i 237,272 minuts.

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara.

a) Assignació correcta d'esdeveniments: 0,25 punts. Càlcul de la primera probabilitat demanada: 0,5 punts. Càlcul de la segona probabilitat demanada: 0,5 punts.

b) Interpretació correcta de la fórmula i substitució correcta de cada paràmetre pel seu valor: 0,5 punts. Resultat final: 0,75 punts.

6. PAU 2025 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 4 (Opció B)

OPCIÓ B

a) Si anomenem x la quantitat de vehicles elèctrics que hi ha a la línia 2 sabem que $40.000x + 3.000.000 = 3.720.000 \Rightarrow 40.000x = 720.000 \Rightarrow x = 18$, per tant a la línia 2 hi ha 18 vehicles elèctrics i 100 de combustió.

Considerem els esdeveniments:
$E =$ el vehicle és de motor elèctric.
$C =$ el vehicle és de motor de combustió.
$D =$ el vehicle és defectuós.

A la línia 2 hi ha 18 cotxes elèctrics i 100 cotxes de motor de combustió. Per tant, si escollim un cotxe a l'atzar $P(E) = \frac{18}{18+100} = 0{,}1525$ i $P(C) = \frac{100}{18+100} = 0{,}8475$.

També sabem que $P(D|E) = 0{,}01$ i $P(D|C) = 0{,}02$.

Ens demanen la probabilitat $P(E|D)$

Podem fer un diagrama d'arbre o bé calcular la probabilitat condicionada utilitzant la fórmula de Bayes

$$P(E|D) = \frac{P(E \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|E)\cdot P(E)}{P(D|E)\cdot P(E) + P(D|C)\cdot P(C)} = \frac{0{,}01\cdot 0{,}1525}{0{,}01\cdot 0{,}1525 + 0{,}02\cdot 0{,}8475} = 0{,}0825.$$

La probabilitat que sigui elèctric és de 0,0825.

a) La funció que representa la despesa acumulada entre el preu de compra i els quilòmetres recorreguts x és:

$$D(x) = 30.000 + \frac{6}{100}x.$$

Per tant,
$30.000 + \frac{6}{100}x = 36.000 \Rightarrow x = 100.000$ km

Així doncs, el vehicle ha recorregut 100.000 km.
Si el vehicle fos elèctric, la despesa acumulada seria de $40.000 + \frac{1}{100}x$, que substituint per x = 100.000 km, ens dona 41.000 euros.

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara.

---

a) Càlcul dels nombre de vehicles elèctrics a la línia 2: 0,5 punts. Càlcul de la probabilitat demanada: 1 punt.

b) Càlcul del nombre de quilòmetres: 0,5 punts. Càlcul de la despesa d'un vehicle elèctric amb el mateix nombre de quilòmetres: 0,5 punts.

7. PAU 2025 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3

3.

a) Anomenem X la variable "pes de la vaca". Ens demanen que calculem la $P(531 \leq X \leq 629)$. Sabem que X segueix una distribució normal de mitjana $\mu = 580$ i desviació típica $\sigma = 25$. Per tant, $Z = \frac{X-580}{25}$ segueix una distribució normal (0,1). Aleshores,

$$P(531 \leq X \leq 629) = P\left(\frac{531-580}{25} \leq \frac{X-580}{25} \leq \frac{629-580}{25}\right)$$
$$= P(-1{,}96 \leq Z \leq 1{,}96) = 0{,}95.$$

Per tant, la probabilitat que el pes de la vaca estigui entre aquests dos valors és de 0,95.

b) Tenim una mostra de mida $n = 10$. Calculem l'estimació puntual de la mitjana a partir de la mostra i obtenim que

$$\bar{x} = 581{,}4$$

D'altra banda, sabem que la desviació típica és $\sigma = 25$.

L'interval de confiança per a la mitjana d'una variable normal amb un nivell de confiança $\gamma \epsilon (0,1)$, quan la variància σ^2 és coneguda, s'obté a partir de la fórmula

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right],$$

en què, si Z segueix una distribució normal (0,1), $P(-z_\gamma \leq Z \leq z_\gamma) = \gamma$.

Per tant, tenim que els extrems de l'interval són

$$\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 581{,}4 - 1{,}96\frac{25}{\sqrt{10}} = 565{,}9048$$

i

$$\bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 581{,}4 + 1{,}96\frac{25}{\sqrt{10}} = 596{,}8952.$$

L'interval de confiança demanat és [565'9048 , 596'8952].

A partir del resultat anterior no podem afirmar, amb una confiança del 95%, que el pes de les vaques hagi canviat perquè el valor 580 està dins de l'interval que hem obtingut.

Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara.

a) Plantejament correcte del problema: 0,5 punts. Obtenció del resultat: 0,5 punts.

b) Càlcul de la mitjana: 0,5 punts. Interpretació correcta de la fórmula i substitució correcta de cada paràmetre pel seu valor: 0,25 punts. Resultat final: 0,25 punts. Justificació correcta de que no podem afirmar que el pes hagi canviat: 0,5 punts.

8. PAU 2025 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4 (Opció A)

4.

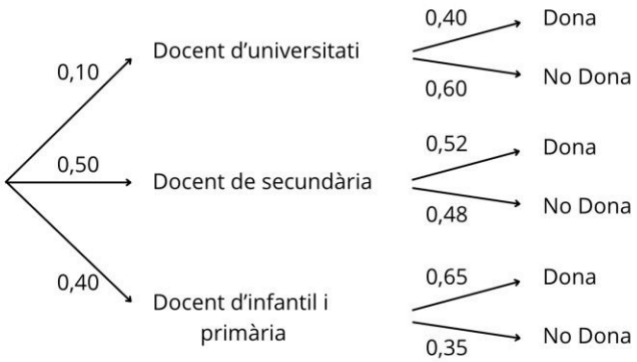
OPCIÓ A

a) Considerem els esdeveniments
$A =$ la persona inscrita al congrés és una dona
$U =$ la persona inscrita al congrés és docent d'universitat
$S =$ la persona inscrita al congrés és docent de secundària
$I =$ la persona inscrita al congrés és docent d'infantil o primària

De l'enunciat del problema sabem que $P(U) = 0{,}1$, $P(S) = 0{,}5$ i $P(I) = 0{,}4$.
Sabem també que $P(A|U) = 0{,}4$, $P(A|S) = 0{,}52$ i $P(A|I) = 0{,}65$.

Aleshores, per la fórmula de les probabilitats totals,
$P(A) = \mathrm{P(A \cap U)} + \mathrm{P(A \cap S)} + \mathrm{P(A \cap I)} = \mathrm{P(U)} \cdot \mathrm{P(A|U)} + \mathrm{P(S)} \cdot \mathrm{P(A|S)} + \mathrm{P(I)} \cdot \mathrm{P(A|I)} = 0{,}1 \cdot 0{,}4 + 0{,}5 \cdot 0{,}52 + 0{,}4 \cdot 0{,}65 = 0{,}56.$

També es pot resoldre el problema a través d'un diagrama d'arbre



i realitzaríem el mateix càlcul. Així doncs, la probabilitat que sigui una dona és de 0,56.

Ara ens demanen que calculem la probabilitat que la persona inscrita sigui docent de secundària si sabem que és una dona. Per tant,

$$P(S|A) = \frac{P(S \cap A)}{P(A)} = \frac{P(S) \cdot P(A|S)}{P(A)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}52}{0{,}56} = 0{,}4643.$$

Així doncs, si escollim una dona inscrita a l'atzar, la probabilitat que sigui docent de secundària és de 0,4643.

b) Considerem les variables:
x: nombre de docents inscrits universitaris
y: nombre de docents inscrits de secundària
z: nombre de docents inscrits d'infantil i primària

Traduïm la informació de l'enunciat en equacions:

- El total de dones és 476: $0{,}4x + 0{,}52y + 0{,}65z = 476$.
- El 10% del total són docents d'universitat: $0{,}10(x + y + z) = x \rightarrow -0{,}9x + 0{,}1y + 0{,}1z = 0$.
- El 50% del total són docents de secundària: $0{,}50(x + y + z) = y \rightarrow 0{,}5x - 0{,}5y + 0{,}5z = 0$.

Si simplifiquem l'última equació i reordenem, obtenim el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -0{,}9x + 0{,}1y + 0{,}1z = 0 \\ 0{,}4x + 0{,}52y + 0{,}65z = 476 \end{cases}$$

El podem resoldre aplicant el mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -0{,}9 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}52 & 0{,}65 & 476 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -0{,}8 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}92 & 0{,}25 & 476 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -0{,}8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}4 & 476 \end{array}\right)$$

I obtenim $x = 85$, $y = 425$ i $z = 340$

Per tant, hi ha 85 docents universitaris, 425 de secundària i 340 d'infantil i primària.

Alternativament, també es pot resoldre l'exercici utilitzant l'apartat anterior. Sabem que la probabilitat que una persona inscrita sigui una dona és $P(A) = 0{,}56$. D'altra banda, si anomenem n el nombre d'inscrits, aquesta probabilitat també és igual a $P(A) = \frac{476}{n}$. D'aquí deduïm que hi ha $n = \frac{476}{0{,}56} = 850$ persones inscrites. Si apliquem que el 10% són docents universitaris, el 50% de secundària i la resta d'infantil i primària, obtenim que hi ha 85 docents universitaris, 425 de secundària i 340 d'infantil i primària.

Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara.

a) Assignació d'esdeveniments: 0,25 punts. Càlcul de la probabilitat que sigui una dona: 0,5 punts. Càlcul de la probabilitat que si escollim una dona sigui docent de secundària: 0,5 punts.

b) Plantejament de les equacions del sistema: 0,25 punts per cada equació. Resolució del sistema i solució final: 0,5 punts.

Si han utilitzat la resolució alternativa: 0,5 punts per obtenir el nombre total d'inscrits i 0,75 punts per obtenir el nombre d'inscrits de cada tipus.

9. PAU 2024 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 5

5.

Considerem els esdeveniments:

A_1 = l'abonat utilitza la zona de piscina

A_2 = l'abonat utilitza el gimnàs

B_1 = l'individu està abonat en horari de matí

B_2 = l'individu està abonat en horari de tarda

Sabem que $P(A_1) = 0{,}4$ i que $P(A_2) = 0{,}6$. Sabem també que $P(B_1|A_1) = 0{,}55$ i que $P(B_1|A_2) = 0{,}45$.

a) Aplicant la fórmula de les probabilitats totals tenim que

$$P(B_1) = P(B_1 \cap A_1) + P(B_1 \cap A_2) = P(B_1|A_1)P(A_1) + P(B_1|A_2)P(A_2).$$

Per tant,

$$P(B_1) = 0{,}55 \cdot 0{,}4 + 0{,}45 \cdot 0{,}6 = 0{,}49.$$

La probabilitat que estigui abonat en horari de matí és de 0,49.

b) Aplicant la fórmula de la probabilitat condicionada i la fórmula de Bayes,

$$P(A_1|B_1) = \frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{P(B_1|A_1)P(A_1)}{P(B_1)} = \frac{0{,}55 \cdot 0{,}4}{0{,}49} = 0{,}4490.$$

La probabilitat que utilitzi la zona de la piscina si sabem que està abonat en horari de matí és de 0,4490.

a) Assignació correcta d'esdeveniments i interpretació correcta de les probabilitats de l'enunciat: 0,5 punts. Fórmula de les probabilitats totals: 0,5 punts. Resultat de l'apartat: 0,25 punts.

b) Plantejament: 0,5 punts. Ús correcte de la fórmula de Bayes: 0,5 punts. Resultat: 0,25 punts.

10. PAU 2024 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 6

6.

a) Tenim una mostra de mida $n = 10$. Calculem l'estimació puntual de la mitjana a partir de la mostra i obtenim que

$$\bar{x} = 32{,}3$$

D'altra banda, sabem que la desviació típica és $\sigma = 2$.

L'interval de confiança per a la mitjana amb un nivell de confiança $\gamma \epsilon (0,1)$, quan la variància σ^2 és coneguda s'obté a partir de la fórmula

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right],$$

en què, si Z segueix una distribució normal (0,1), $P(-z_\gamma \leq Z \leq z_\gamma) = \gamma$.

Per tant, tenim que els extrems de l'interval són

$$\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 32{,}3 - 1{,}96\frac{2}{\sqrt{10}} = 31{,}0604$$

i

$$\bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 32{,}3 + 1{,}96\frac{2}{\sqrt{10}} = 33{,}5396$$

L'interval de confiança demanat és $[31'0604\,,\ 33'5396]$.

b) A partir del resultat anterior podem afirmar, amb una confiança del 95%, que la informació que proporciona l'empresa és errònia. Ja que, a partir de la mostra, amb una confiança del 95%, la mitjana hauria d'estar entre 31,0604 i 33,5396 minuts i, per tant, superior als 30 minuts que indica l'empresa.

a) Càlcul de la mitjana: 0,5 punts. Fórmula de l'interval de confiança per a la mitjana: 0,5 punts. Resultat final: 0,5 punts.

b) Justificació correcta: 1 punt.

11. PAU 2024 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 5

5.

Considerem els esdeveniments:

$A_1 =$ el Guiu ha vist la pel·lícula

$A_2 =$ el Roc ha vist la pel·lícula

Sabem que $P(A_1) = 0{,}5$, $P(A_2) = 0{,}6$ i $P(A_1 \cap A_2) = 0{,}25$.

a)

La probabilitat que almenys un dels dos hagi vist la pel·lícula correspon a la unió dels dos esdeveniments:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2).$$

I, per tant,

$$P(A_1 \cup A_2) = 0{,}5 + 0{,}6 - 0{,}25 = 0{,}85$$

Així doncs, la probabilitat que almenys un dels dos hagi vist la pel·lícula és de 0,85.

Ara ens demanen

$$P\left(A_2 \cap A_1^C\right) = P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = 0{,}6 - 0{,}25 = 0{,}35$$

La probabilitat que el Roc hagi vist la pel·lícula però el Guiu no és de 0,35.

b)

Finalment ens demanen la probabilitat condicionada que el Guiu l'hagi vista si sabem que almenys un dels dos l'ha vista:

$$P(A_1|A_1 \cup A_2) = \frac{P\left(A_1 \cap (A_1 \cup A_2)\right)}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{P(A_1)}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{0{,}5}{0{,}85} = 0{,}5882$$

La probabilitat que ens demanen és de 0,5882.

a) Assignació correcta d'esdeveniments i de les dades de l'enunciat: 0,25 punts. Fórmula de la probabilitat de la unió: 0,25 punts. Resultat de la primera probabilitat demanada: 0,25 punts. Plantejament de la segona probabilitat demanada: 0,5 punts. Obtenció d'aquesta probabilitat: 0,25 punts.

b) Plantejament: 0,5 punts. Resultat: 0,5 punts.

12. PAU 2024 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 6

6.

a)

La mida de la mostra és $n = 350$. L'estimació puntual de la proporció de persones que està a favor de la proposta és

$$\hat{p} = \frac{218}{350} = 0{,}6229.$$

L'estimació puntual de la proporció de persones a favor de la proposta és de 0,6229, és a dir, un 62,29%.

b)

Quan la mida de la mostra és gran, l'interval de confiança per a una proporció amb un nivell de confiança $\gamma \epsilon (0,1)$ s'obté a partir de la fórmula

$$\left[\hat{p} - z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right],$$

en què, si Z segueix una distribució normal (0,1), $P(-z_\gamma \leq Z \leq z_\gamma) = \gamma$.
Per tant tenim que els extrems de l'interval són

$$\hat{p} - z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0{,}6229 - 1{,}96 \sqrt{\frac{0{,}6229(1-0{,}6229)}{350}} = 0{,}5721$$

i

$$\hat{p} + z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0{,}6229 + 1.96 \sqrt{\frac{0{,}6229(1-0{,}6229)}{350}} = 0{,}6737$$

L'interval de confiança demanat és [57,21% , 67,37%], és a dir, el percentatge de persones que està a favor de la proposta està entre el 57,21% i el 67,37% amb una confiança del 95%.

a) Càlcul de la proporció mostral: 0,75 punts. Expressió com a percentatge: 0,25 punts.

b) Interpretació correcta de la fórmula i substitució correcta de cada paràmetre pel seu valor: 1 punt. Resultat final: 0,5 punts.