Matemàtiques aplicades a les ciències social

Probabilitat

Exercicis · 12 exercicis

Proves d'accés a la universitat (PAU) de Catalunya. Ordenats del més recent al més antic.
Retalls dels exàmens i pautes oficials (selecat.cat / universitats.gencat.cat).

Exercici 3

[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 3	

En una assignatura d'un màster de dos anys, el 70 % dels estudiants són de primer curs i la resta són de segon curs. Segons dades de cursos anteriors, la probabilitat d'aprovar l'assignatura és del 60 % per als estudiants de primer curs i del 85 % per als de segon curs.

FÓRMULES PER A RESOLDRE L'EXERCICI:

- $Z \sim \text{normal}\,(0, 1) \rightarrow P(-1{,}96 \leq Z \leq 1{,}96) = 0{,}95$ i $P(-2{,}58 \leq Z \leq 2{,}58) = 0{,}99$
- Intervals de confiança amb un nivell de confiança $\gamma \in (0, 1)$
  - per a la proporció (mostres grans):

$$\left[\hat{p} - z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

  - per a la mitjana (mostres normals amb la variància σ^2 coneguda):

$$\left[\overline{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

  - per a la mitjana (mostres grans amb la variància σ^2 desconeguda):

$$\left[\overline{x} - z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

3.1. Si escollim un estudiant a l'atzar, quina és la probabilitat que aprovi l'assignatura? Si sabem que un estudiant ha aprovat l'assignatura, quina és la probabilitat que sigui de primer curs?

[1,25 punts]

Puntuació de l'apartat 3.1	

3.2. El professor vol estimar la nova proporció d'estudiants que aproven l'assignatura després d'introduir un nou mètode d'ensenyament. Per fer-ho, selecciona una mostra aleatòria de $n = 80$ estudiants i observa que 55 d'ells han aprovat.

Trobeu un interval de confiança del 95 % per a la proporció p d'aprovats amb el nou mètode. L'interval obtingut permet afirmar que el nou mètode ha millorat la taxa d'aprovats respecte de la situació anterior? Raoneu la resposta.

[1,25 punts]

Puntuació de l'apartat 3.2	

Exercici 4

[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 4	

Tres amics —la Carme, el Saïd i el Martí— van crear fa uns anys una petita associació dedicada a la divulgació de les matemàtiques. En aquesta associació organitzen tallers per a famílies, visiten escoles i instituts d'arreu del país, i imparteixen seminaris en línia.

El curs passat van dur a terme un total de 240 activitats, repartides en 96 tallers familiars, 84 xerrades en escoles o instituts i 60 seminaris en línia. Els dos primers tipus d'activitats són presencials, mentre que els seminaris en línia, evidentment, no ho són.

Trieu UNA de les dues opcions (A o B) i responeu a les qüestions que s'hi plantegen. **Indiqueu a la portada de l'examen l'opció escollida.**

OPCIÓ A

4.1. Aquest curs, durant una setmana concreta, el formulari d'inscripció del web de l'associació rep 15 inscripcions independents, cadascuna de les quals correspon a un dels tres tipus d'activitats.

Suposant que la distribució de les inscripcions es manté com el curs passat, calculeu la probabilitat que exactament 10 de les 15 inscripcions siguin per a activitats presencials.

Determineu el nombre esperat d'inscripcions a activitats presencials d'aquella setmana.

[1,5 punts]

Puntuació de l'apartat 4.1	

4.2. El curs passat, per a dur a terme les 240 activitats, els tres amics van decidir organitzar-se de manera que cada activitat fos duta a terme per una sola persona; és a dir, no hi havia activitats desenvolupades per més d'un d'ells. Si sabem que la Carme va participar en 30 activitats més que el Martí i que el Saïd va participar en 18 activitats més que el Martí, de quantes activitats es va encarregar cadascun dels tres amics?

[1 punt]

Puntuació de l'apartat 4.2	

Exercici 3

[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 3	

Una empresa de telecomunicacions considera que una pàgina web és eficient si el seu temps de càrrega és inferior a 3 segons. L'empresa afirma que almenys el 50 % de les pàgines web que gestiona són eficients. Per comprovar aquesta afirmació, seleccionem una mostra aleatòria de $n = 2.500$ pàgines web gestionades per aquesta empresa.

Fórmules per a resoldre l'exercici:

- $Z \sim \text{normal}\ (0, 1) \rightarrow P(-1{,}96 \leq Z \leq 1{,}96) = 0{,}95$ i $P(-2{,}58 \leq Z \leq 2{,}58) = 0{,}99$
- Intervals de confiança amb un nivell de confiança $\gamma \in (0, 1)$
  - per a la proporció (mostres grans):

$$\left[\hat{p} - z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

  - per a la mitjana (mostres normals amb la variància σ^2 coneguda):

$$\left[\overline{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

  - per a la mitjana (mostres grans amb la variància σ^2 desconeguda):

$$\left[\overline{x} - z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

3.1. Suposem que, cada vegada que seleccionem una pàgina web per a la mostra, aquesta pot ser eficient (o no ser-ho) amb una probabilitat $p = 0{,}5$ i que el fet que una pàgina sigui eficient (o no) és independent del fet que la resta de pàgines ho siguin (o no). Considerem la variable aleatòria X, que compta el nombre de pàgines, d'entre les 2.500 de la mostra, que són eficients.

Quina distribució té la variable X? Calculeu la probabilitat que com a molt 1.299 pàgines siguin eficients. Per a fer-ho, utilitzeu l'aproximació per la distribució normal sense fer la correcció per continuïtat.

[1,25 punts]

Puntuació de l'apartat 3.1	

3.2. En la mostra de $n = 2.500$ pàgines web, hem obtingut una mitjana mostral del temps de càrrega de $\overline{x} = 2{,}95$ segons i una desviació típica mostral de $s = 0{,}38$ segons. Suposeu que el temps de càrrega de les pàgines web segueix una distribució normal

Construïu un interval de confiança del 95 % per al temps mitjà de càrrega de les pàgines web que gestiona l'empresa. A partir de l'interval obtingut, què podem dir sobre l'afirmació de l'empresa que almenys el 50 % de les pàgines web que gestiona són eficients?

[1,25 punts]

Puntuació de l'apartat 3.2	

Exercici 2

[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 2	

Al campus d'una universitat, el 45 % de l'alumnat hi arriba en tren, el 35 % en autobús i la resta utilitzant mitjans propis. Dels usuaris del tren, el 70 % usa la T-jove, mentre que el 30 % restant fa servir altres tipus de bitllets. Dels usuaris de l'autobús, el 60 % utilitza la T-jove i el 40 % usa altres tipus de bitllets. Dels que arriben al campus per mitjans propis, cap no fa servir la T-jove.

Fórmules per a resoldre l'exercici:

- $Z \sim \text{normal}\ (0, 1) \rightarrow P(-1{,}96 \leq Z \leq 1{,}96) = 0{,}95$ i $P(-2{,}58 \leq Z \leq 2{,}58) = 0{,}99$
- Intervals de confiança amb un nivell de confiança $\gamma \in (0, 1)$
  - per a la proporció (mostres grans):

$$\left[\hat{p} - z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

  - per a la mitjana (mostres normals amb la variància σ^2 coneguda):

$$\left[\overline{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

  - per a la mitjana (mostres grans amb la variància σ^2 desconeguda):

$$\left[\overline{x} - z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

2.1. Si escollim un alumne a l'atzar, quina és la probabilitat que faci servir la T-jove per a arribar al campus? Si sabem que un alumne usa la T-jove per a arribar-hi, quina és la probabilitat que ho faci en tren?

[1,25 punts]

Puntuació de l'apartat 2.1	

2.2. Volem fer un estudi per a saber quant temps tarda l'alumnat a arribar al campus de la universitat des que surt per la porta de casa. Per això vam demanar a una mostra de 300 estudiants que calculessin aquesta dada un dia determinat. Vam obtenir que aquests 300 estudiants de mitjana havien tardat 53 minuts a arribar al campus, i que la desviació típica era de 8 minuts.

Trobeu un interval de confiança del 95 % per al temps que tarden els alumnes a arribar al campus.

[1,25 punts]

Puntuació de l'apartat 2.2	

Exercici 3

En un parc natural, els visitants hi poden accedir en cotxe, en bicicleta o a peu. Un cop dins del parc, els visitants poden fer una ruta guiada o bé visitar-lo pel seu compte.

a) Sabem que el 60 % dels visitants hi accedeixen en cotxe, el 15 % en bicicleta i el 25 % restant a peu. També sabem que dels que hi arriben en cotxe el 80 % fan la ruta guiada, mentre que dels que hi arriben en bicicleta la fan el 60 % i dels que hi arriben a peu només la fan el 30 %.

Si escollim un visitant a l'atzar, quina és la probabilitat que faci la ruta guiada? Si sabem que ha fet la ruta guiada, quina és la probabilitat que hagi accedit al parc en cotxe?

[1,25 punts]

b) Volem fer un estudi del temps que passen de mitjana els visitants dins del parc. Hem preguntat a 100 visitants quanta estona han estat dins del parc i hem obtingut una mitjana de 231 minuts amb una desviació típica de 32 minuts.

Construïu un interval de confiança del 95 % per al temps mitjà que passen els visitants dins del parc.

[1,25 punts]

Fórmules per a resoldre l'exercici:

- $Z \sim \text{normal}\ (0, 1) \rightarrow P(-1{,}96 \leq Z \leq 1{,}96) = 0{,}95$ i $P(-2{,}58 \leq Z \leq 2{,}58) = 0{,}99$
- Intervals de confiança amb un nivell de confiança $\gamma \in (0, 1)$
  - per a la proporció (mostres grans):

$$\left[\hat{p} - z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

  - per a la mitjana (mostres normals amb la variància σ^2 coneguda):

$$\left[\overline{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

  - per a la mitjana (mostres grans amb la variància σ^2 desconeguda):

$$\left[\overline{x} - z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

Exercici 4

Una empresa fabrica cotxes elèctrics i cotxes de motor de combustió. L'empresa té tres línies de fabricació: *L*1, *L*2 i *L*3. La taula següent mostra el nombre de vehicles de cada tipus que hi ha en aquest moment en cada línia. D'altra banda, sabem que el preu de venda dels vehicles elèctrics és de 40.000 € i el preu de venda dels vehicles de motor de combustió és de 30.000 €.

	Cotxes elèctrics	*Cotxes de motor de combustió*
L1	20	80
L2	30	100
L3	40	110

El cost mitjà de manteniment i consum per cada 100 km és d'1 € per als vehicles elèctrics i de 6 € per als de motor de combustió.

El 2 % de la producció de vehicles de motor de combustió surt de l'empresa amb algun defecte, mentre que només l'1 % dels vehicles elèctrics surt amb alguna tara.

OPCIÓ B

a) Hi ha hagut una errada en el recompte de vehicles elèctrics de la *L*2. El valor 30 de la taula de l'enunciat és erroni, però sabem que si es venguessin tots els vehicles de la *L*2, els ingressos d'aquesta línia serien de 3.720.000 €. Quants cotxes elèctrics hi ha realment a la *L*2?

Si escollim a l'atzar un dels vehicles que hi ha ara a la *L*2, quina és la probabilitat que sigui de motor elèctric, si sabem que ha sortit defectuós?

[1,5 punts]

b) Si sabem que la despesa acumulada entre la compra i els kilòmetres recorreguts d'un vehicle de combustió és de 36.000 €, quants kilòmetres ha recorregut? Quina despesa acumulada tindria un vehicle elèctric que hagués recorregut aquest mateix nombre de kilòmetres?

[1 punt]

7. PAU 2025 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3

Exercici 3

Fa uns anys una granja de vaques frisones dedicada a la producció de llet va fer un estudi sobre el pes de les seves vaques i va arribar a la conclusió que aquesta variable seguia una distribució normal amb una mitjana de 580 kg i una desviació típica de 25 kg.

Fórmules per a resoldre l'exercici:

- $Z \sim \text{normal}\ (0, 1) \rightarrow P(-1{,}96 \leq Z \leq 1{,}96) = 0{,}95$ i $P(-2{,}58 \leq Z \leq 2{,}58) = 0{,}99$
- Intervals de confiança amb un nivell de confiança $\gamma \in (0, 1)$
  - per a la proporció (mostres grans):

    $$\left[\hat{p} - z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

  - per a la mitjana (mostres normals amb la variància σ^2 coneguda):

    $$\left[\overline{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

  - per a la mitjana (mostres grans amb la variància σ^2 desconeguda):

    $$\left[\overline{x} - z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

a) Calculeu, de manera raonada, la probabilitat que si agafem a l'atzar una vaca frisona d'aquesta granja, el seu pes estigui entre 531 i 629 kg.
[1 punt]

b) Creiem que un canvi en el tipus de farratge que es dona a les vaques n'ha modificat la mitjana del pes. Per a comprovar-ho, hem obtingut el pes d'una mostra de 10 vaques de la granja escollides a l'atzar:

569, 575, 611, 581, 583, 614, 589, 555, 566, 571.

Trobeu un interval de confiança del 95 % per a la mitjana del pes de les vaques, suposant que aquest pes segueix una distribució normal amb una desviació típica de 25 kg. A partir del resultat obtingut, podem afirmar que la mitjana del pes de les vaques ha canviat? Justifiqueu la resposta.
[1,5 punts]

8. PAU 2025 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4 (Opció A)

Exercici 4

Al Congrés Català d'Educació Matemàtica (C2EM), que se celebrarà a Lleida el proper mes de juliol, hi assistiran docents d'universitat, d'educació secundària i d'educació infantil i primària.

A hores d'ara, un 10 % dels docents inscrits són d'universitat, un 50 % són de secundària i la resta són d'infantil i primària. D'altra banda, un 40 % dels docents inscrits d'universitat, un 52 % dels docents inscrits de secundària i un 65 % dels docents inscrits d'infantil i primària són dones.

OPCIÓ A

a) Calculeu la probabilitat que una persona escollida a l'atzar d'entre tots els inscrits sigui una dona. Si d'entre totes les dones inscrites n'escollim una a l'atzar, quina probabilitat hi ha que sigui docent de secundària?

[1,25 punts]

b) Calculeu el nombre de docents que s'han inscrit al Congrés de cada nivell educatiu si sabem que en total hi ha 476 dones inscrites.

[1,25 punts]

9. PAU 2024 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 5

5. Un centre esportiu té dues zones: la zona de la piscina ($A1$) i la zona del gimnàs ($A2$). Els abonats han de triar a quina de les dues zones (només una) volen accedir i també si volen anar al centre esportiu en horari de matí (opció $B1$) o en horari de tarda (opció $B2$).

Si seleccionem un abonat del centre a l'atzar, sabem que la probabilitat que utilitzi la zona de la piscina és de 0,4 i la probabilitat que utilitzi el gimnàs és de 0,6. D'altra banda, la probabilitat que estigui abonat en horari de matí, si sabem que utilitza la zona de la piscina, és de 0,55, mentre que la probabilitat que estigui abonat en horari de matí, si sabem que utilitza el gimnàs, és de 0,45.

a) Quina és la probabilitat que l'individu estigui abonat en horari de matí?

[1,25 punts]

b) Si sabem que està abonat en horari de matí, quina és la probabilitat que utilitzi la zona de piscina?

[1,25 punts]

10. PAU 2024 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 6

6. Una empresa d'autobusos afirma que fa el trajecte entre l'aeroport i el centre de la ciutat en 30 minuts. Hem obtingut una mostra del temps, en minuts, que ha trigat en 10 trajectes escollits a l'atzar:

$$33,\ 29,\ 28,\ 31,\ 34,\ 35,\ 32,\ 29,\ 37,\ 35$$

a) Construïu un interval de confiança del 95 % per a la mitjana del temps de trajecte, suposant que aquest temps segueix una distribució normal amb una desviació típica de 2 minuts.

NOTA: Recordeu que, si Z segueix una distribució normal $(0,1)$, $P(-1{,}96 \leq Z \leq 1{,}96) = 0{,}95$. Recordeu també que l'interval de confiança per a la mitjana amb un nivell de confiança $\gamma \in (0,1)$ quan la variància σ^2 és coneguda és donat per $\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$.

[1,5 punts]

b) A partir del resultat obtingut en l'apartat anterior, podem afirmar que la informació que proporciona l'empresa d'autobusos és errònia? Justifiqueu la resposta.

[1 punt]

Etiqueta de l'estudiant

Institut d'Estudis Catalans

11. PAU 2024 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 5

5. El Guiu i el Roc són uns grans aficionats al cinema i miren moltes pel·lícules de la plataforma a la qual estan subscrits. Els agrada tant que, si agafem una pel·lícula de la plataforma a l'atzar, la probabilitat que el Guiu l'hagi vista és de 0,5, la probabilitat que el Roc l'hagi vista és de 0,6 i la probabilitat que l'hagin vista tots dos és de 0,25.

***a*)** Si triem una pel·lícula a l'atzar, calculeu la probabilitat que almenys un dels dos l'hagi vista. Calculeu també la probabilitat que l'hagi vista el Roc però no el Guiu.

[1,5 punts]

***b*)** Si triem una pel·lícula a l'atzar, calculeu la probabilitat que el Guiu l'hagi vista si sabem que almenys un dels dos l'ha vista.

[1 punt]

12. PAU 2024 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 6

6. Volem saber el percentatge de persones que estarien a favor de la construcció d'un poliesportiu municipal en una població determinada. Prenem una mostra aleatòria de 350 persones, 218 de les quals es manifesten a favor de la proposta i la resta, en contra.

***a*)** Doneu l'estimació puntual de la proporció i del percentatge de persones que estan a favor de la construcció del poliesportiu.

[1 punt]

***b*)** Escriviu un interval de confiança del 95 % per al percentatge de persones que estan a favor de la construcció del poliesportiu en aquesta població.

NOTA: Recordeu que, si Z segueix una distribució normal $(0, 1)$, $P(-1{,}96 \leq Z \leq 1{,}96) = 0{,}95$. Recordeu també que, per a mostres grans, l'interval de confiança per a una proporció amb un nivell de confiança $\gamma \in (0, 1)$ és donat per $\left[\hat{p} - z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$.

[1,5 punts]

Etiqueta de l’estudiant

Institut d’Estudis Catalans