Matemàtiques aplicades a les ciències social

Matrius

Solucions · 50 exercicis

Proves d'accés a la universitat (PAU) de Catalunya. Ordenats del més recent al més antic.
Retalls dels exàmens i pautes oficials (selecat.cat / universitats.gencat.cat).

1. PAU 2026 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4 (Opció A)

4.

OPCIÓ A

1.1. Considerem els esdeveniments

G = l'estudiant cursa un grau,

M = l'estudiant cursa un màster,

D = l'estudiant cursa un doctorat.

Considerem també els esdeveniments

C = l'estudiant és de la Facultat de Ciències,

E = l'estudiant és de la Facultat d'Enginyeria,

L = l'estudiant és de la Facultat de Lletres.

Per calcular la probabilitat que l'estudiant escollit a l'atzar sigui un estudiant de doctorat de la Facultat de Lletres apliquem la regla de Laplace:

$$P(\mathrm{D} \cap \mathrm{L}) = \frac{\text{Nombre d'estudiants de doctorat de la F. de Lletres}}{\text{Total d'estudiants}} = \frac{48}{2.000} = \frac{3}{125} = 0{,}024$$

Per tant, la probabilitat que l'estudiant escollit a l'atzar sigui un estudiant de doctorat de la Facultat de Lletres és de 0,024.

Calcularem ara la probabilitat que un estudiant que cursa un màster sigui de la Facultat d'Enginyeries. Es tracta d'una probabilitat condicionada.

$$P(\mathrm{E} \mid M) = \frac{\text{Nombre d'estudiants de màster de la F. d'Enginyeries}}{\text{Total d'estudiants de màster}} = \frac{178}{533} \approx 0{,}3340$$

Per tant, la probabilitat que un estudiant que cursa un màster sigui de la Facultat d'Enginyeries és de 0,3340.

1.2. A partir de les dades de la taula considerem la matriu A

$$A = \begin{pmatrix} 450 & 172 & 41 \\ 445 & 178 & 45 \\ 438 & 183 & 48 \end{pmatrix}$$

en què les files representen les facultats (Ciències, Enginyeries, Lletres) i les columnes representen els nivells (grau, màster, doctorat).

Per calcular els totals per nivell educatiu, hem de multiplicar-la per un vector fila format tot per uns:

$$T = (1 \quad 1 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 450 & 172 & 41 \\ 445 & 178 & 45 \\ 438 & 183 & 48 \end{pmatrix}$$
$$= (450 + 445 + 438 \quad 172 + 178 + 183 \quad 41 + 45 + 48)$$
$$= (1.333 \quad 533 \quad 134)$$

Sabem també que els preus de les matrícules són 1.000 € per als estudiants de grau, 1.500 € per als estudiants de màster i 500 € per als estudiants de doctorat.

Considerem, per tant, el vector de preus:

$$P = \begin{pmatrix} 1.000 \\ 1.500 \\ 500 \end{pmatrix}$$

I disposem també del total d'estudiants per nivell educatiu:

$$T = (1.333 \quad 533 \quad 134)$$

L'import total que ingressarà la universitat per matrícules és el producte:

$$T \cdot P = (1.333 \quad 533 \quad 134) \cdot \begin{pmatrix} 1.000 \\ 1.500 \\ 500 \end{pmatrix} = 1.333 \cdot 1.000 + 533 \cdot 1.500 + 134 \cdot 500$$
$$= 1.333.000 + 799.500 + 67.000 = 2.199.500$$

Per tant, la universitat ingressarà un total de $2.199.500$ € en concepte de matrícules.

Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprar la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressar la solució de manera clara.

4.1. Assignació d'esdeveniments: 0,25 punts. Càlcul de la probabilitat que l'estudiant escollit a l'atzar sigui un estudiant de doctorat de la Facultat de Lletres: 0,5 punts. Càlcul de la probabilitat que un estudiant que cursa un màster sigui de la Facultat d'Enginyeries: 0,5 punts.

4.2. Escriure la matriu que recull la informació de la taula: 0,25 punts. Càlcul del primer producte de matrius: 0,5 punts. Càlcul del segon producte de matrius: 0,5 punts.

4.

OPCIÓ A

a) Considerem les matrius:

$$A = \begin{matrix} \\ L1 \\ L2 \\ L3 \end{matrix} \begin{matrix} E & M \end{matrix} \begin{pmatrix} 20 & 80 \\ 30 & 100 \\ 40 & 110 \end{pmatrix} \text{ i } I = \begin{matrix} E \\ M \end{matrix} \begin{pmatrix} 40.000 \\ 30.000 \end{pmatrix}.$$

Si fem el producte de $A \cdot I$ obtindrem els ingressos per la venda de tots els cotxes de cada línia.

$$A \cdot I = \begin{pmatrix} 20 & 80 \\ 30 & 100 \\ 40 & 110 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40.000 \\ 30.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.200.000 \\ 4.200.000 \\ 4.900.000 \end{pmatrix}.$$

Obtenim que la línia 1 generarà uns ingressos de 3.200.000 €, la línia 2 generarà uns ingressos de 4.200.000 € i la línia 3 uns ingressos de 4.900.000 €.

Considerem els esdeveniments:
$E =$ el vehicle és de motor elèctric.
$C =$ el vehicle és de motor de combustió.
$D =$ el vehicle és defectuós.

A la fàbrica hi ha 90 cotxes elèctrics i 290 cotxes de motor de combustió. Per tant, si escollim un cotxe a l'atzar $P(E) = \frac{90}{90+290} = 0{,}2368$ i $P(C) = \frac{290}{90+290} = 0{,}7632$.

També sabem que $P(D|E) = 0{,}01$ i $P(D|C) = 0{,}02$.

Ens demanen la probabilitat $P(C|D)$

Podem fer un diagrama d'arbre o bé calcular la probabilitat condicionada utilitzant la fórmula de Bayes

$$P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|C) \cdot P(C)}{P(D|E) \cdot P(E) + P(D|C) \cdot P(C)} = \frac{0{,}02 \cdot 0{,}7632}{0{,}01 \cdot 0{,}2368 + 0{,}02 \cdot 0{,}7632} = 0{,}8657.$$

b) La funció que representa la despesa acumulada després de cada x km recorreguts per cada tipus de vehicle ve donada per la despesa de compra més la despesa pels quilòmetres recorreguts.

Per als vehicles elèctrics, el preu de venda és de 40.000 euros i 1 euro cada 100 km recorreguts. Per tant, la funció que dona la despesa en euros en funció dels quilòmetres recorreguts serà:

$$D_E(x) = 40.000 + \frac{1}{100}x.$$

Mentre que per als vehicles de combustió aquesta funció serà:

$$D_T(x) = 30.000 + \frac{6}{100}x.$$

Inicialment surt més car el vehicle elèctric. Igualem les despeses per trobar a partir de quants quilòmetres sortirà més econòmic el vehicle elèctric.

$40.000 + \frac{1}{100}x = 30.000 + \frac{6}{100}x \Rightarrow 10.000 = 0{,}05x \Rightarrow x = 200.000$ km

Als 200.000 km les despeses seran iguals. A partir dels 10 anys serà més econòmic el vehicle elèctric.

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara.

a) Obtenció de les matrius i càlcul del producte de matrius: 0,75 punts. Càlcul de la probabilitat demanada: 0,75 punts.

b) Obtenció de les funcions que donen les despeses: 0,25 punts cadascuna. Obtenció del nombre d'anys a partir del qual surt més a compte el cotxe elèctric: 0,5 punts.

OPCIÓ B

a) Les previsions de l'organització són que al congrés hi acabin assistint 1000 persones, segons els percentatges de l'enunciat tindrem la distribució següent:

- Nombre de docents d'universitat: 10% de $1000 = 100$
- Nombre de docents de secundària: 50% de $1000 = 500$
- Nombre de docents d'infantil i primària: 40% de $1000 = 400$

Així, els organitzadors hauran de comprar 100 detalls del tipus D1, 500 detalls del tipus D2 i 400 detalls del tipus D3.

Fent el següent producte de matrius, s'obté el preu de tots els detalls per a cada empresa

$$(100 \quad 500 \quad 400)\begin{pmatrix} 1{,}25 & 1 & 1{,}25 \\ 0{,}75 & 1 & 1{,}15 \\ 1 & 0{,}85 & 0{,}80 \end{pmatrix} = (900 \quad 940 \quad 1020)$$

Per tant, a l'empresa E1, els detalls costarien 900 €; a l'empresa E2, costarien 940 €, i a l'empresa E3, costarien 1020 €. L'empresa que ofereix el millor preu és l'empresa E1 amb un preu de 900 €.

b) Sigui x, el nombre de vegades que s'aplica el descompte d'1 €. L'estudi es fa a partir de la hipòtesi que amb un preu de 80 euros es reservarien 100 habitacions dobles i que per cada euro que rebaixem el preu es reserven dues habitacions més.

La funció que dona els ingressos és el producte entre el preu de l'habitació doble i el nombre d'habitacions dobles reservades. Per tant, tenim

$$I(x) = (80 - x)(100 + 2x) = -2x^2 + 60x + 8000.$$

Per trobar el màxim d'ingressos, derivem la funció $I(x)$:
$I'(x) = -4x + 60$.
Igualem la deriva a zero i veiem que hi ha un extrem relatiu quan $x = 15$. Veiem que es tracta d'un màxim, perquè la derivada és positiva per a $x < 15$ i és negativa per a $x > 15$.
Per tant, el preu de l'habitació doble per maximitzar els ingressos ha de ser de $80 - 15 = 65$ €.

Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara.

a) Plantejar el producte de matrius: 0,25 punts. Realitzar el producte de matrius: 0,5 punts. Trobar l'empresa que ofereix el millor preu: 0,25 punts. Trobar el millor preu: 0,25 punts.

b) Obtenció de la funció que dona els ingressos en funció de x: 0,25 punts. Càlcul de la derivada: 0,25 punts. Obtenció del punt on s'assoleix el màxim: 0,25 punts. Justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Càlcul del preu de l'habitació doble amb el qual els ingressos són màxims: 0,25 punts.

4. PAU 2024 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 4

4.

a) Fem el producte

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 122 & 620 \\ 930 & 433 \\ 384 & 281 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 742 \\ 1363 \\ 665 \end{pmatrix}.$$

Clarament, la primera fila correspon al nombre total de menors de 18 anys que han anat al cinema aquella setmana, la segona al total de persones entre 18 i 65 anys i la tercera al total de majors de 65 anys.

Per la propietat associativa del producte de matrius, només cal trobar una matriu $C = (a \quad b \quad c)$ que multiplicada pel producte $A \cdot B$, que acabem de calcular, ens doni els ingressos totals per la venda d'entrades. Observem que

$$C \cdot A \cdot B = C \cdot (A \cdot B) = (a \quad b \quad c) \cdot \begin{pmatrix} 742 \\ 1363 \\ 665 \end{pmatrix} = 742 \cdot a + 1363 \cdot b + 665 \cdot c$$

I, per tant, per obtenir els ingressos totals és suficient definir $C = (a \quad b \quad c) = (5 \quad 8{,}5 \quad 6{,}5)$. Els ingressos totals de la setmana són 19618 euros.

b) Comencem calculant el producte C·D·B

$$C \cdot D \cdot B = (5 \quad 8{,}5 \quad 6{,}5) \begin{pmatrix} 84 & 23 \\ 338 & x \\ 256 & 408 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (5 \quad 8{,}5 \quad 6{,}5) \begin{pmatrix} 107 \\ 338 + x \\ 664 \end{pmatrix}$$
$$= 7724 + 8{,}5x$$

Sabem, d'altra banda, que el total d'ingressos ha estat de 12076 euros. Per tant, $7724 + 8{,}5x = 12076 \rightarrow 8{,}5\,x = 4352 \rightarrow x = 512$.

Així doncs, el valor que ens faltava, el nombre d'adults que van assistir a la segona pel·lícula aquella setmana, fou de 512 persones.

a) Càlcul del producte $A \cdot B$: 0,5 punts. Interpretació del producte obtingut: 0,25 punts. Obtenció de la matriu C: 0,5 punts. Càlcul dels ingressos: 0,25 punts.

b) Plantejament del problema: 0,5 punts. Càlcul del valor de x: 0,5 punts.

---

5. PAU 2024 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4

4.

a)

Comencem calculant el producte que ens demanen

$$\begin{aligned} 10 \cdot A + 3 \cdot B + 18 \cdot C &= 10 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 18 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & 41 & 3 \\ 11 & 18 & 25 \\ 33 & -5 & 26 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comprovem que efectivament la matriu és màgica:

$10 + 41 + 3 = 54, 11 + 18 + 25 = 54, 33 - 5 + 26 = 54, 10 + 11 + 33 = 54, 41 + 18 - 5 = 54$ i $3 + 25 + 26 = 54$.

La constant màgica del Martí és 54.

b)

Ara sabem que el pare del Martí va néixer el 8 de setembre però no sabem quina edat té, que anomenarem x. Si calculem la seva matriu màgica obtenim

$$\begin{aligned} 8 \cdot A + 9 \cdot B + x \cdot C &= 8 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + 9 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & -17 + 3x & 9 \\ 1 + x & x & -1 + x \\ -9 + 2x & 17 - x & -8 + 2x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sabem que la suma de qualsevol fila o columna ha de sumar 153. A partir, per exemple, de la primera fila, obtenim que $8 - 17 + 3x + 9 = 153$ i, per tant, obtenim que $x = 51$.

Així doncs, el pare del Martí té 51 anys.

a) Càlcul de $10 \cdot A + 3 \cdot B + 18 \cdot C$: 0,5 punts. Comprovació que la matriu obtinguda és màgica: 0,5 punts. Obtenció de la constant màgica del Martí: 0,25 punts.

b) Plantejament del problema: 0,5 punts. Càlcul de la matriu màgica en funció de x: 0,5 punts. Obtenció de l'edat del pare del Martí: 0,25 punts.

6. PAU 2023 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 5

5.

a) Fem el producte de la matriu A per ella mateixa i igualem el resultat a la matriu identitat:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & 0 \\ 0 & 2a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observem que cal que $1 + 2a = 1$ i per tant $a = 0$.

b) Per a $a = -1$ fem els càlculs que ens demanen:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = -I \cdot A = -A$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = -A \cdot A = -A^2 = -(-I) = I.$$

Per tant, d'aquesta última igualtat deduïm que $A^{-1} = A^3 = -A$.
D'altra banda,
$A^{23} = A^{20} \cdot A^3 = (A^4)^5 \cdot A^3 = I \cdot A^3 = A^3 = -A.$

a) Càlcul A^2: 0,5 punts. Trobar el valor de a: 0,5 punts.

b) Càlcul de A^2, A^3 i A^4: 0,5 punts en total. Deduir el valor de A^{-1}: 0,5 punts. Deduir el valor de A^{23}: 0,5 punts.

---

7. PAU 2023 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2

2.

a) Cal fer el producte de matrius següent:

$$\begin{pmatrix} 0{,}15 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}10 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}60 & 0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 90 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 59 \\ 71 \end{pmatrix}$$

Per tant, per al curs vinent cal reservar 15 places de nivell principiant, 59 de nivell intermedi i 71 de nivell avançat.

b) Cal resoldre el sistema següent:

$$\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 \\ 51 \end{pmatrix}$$

Es pot fer per diversos mètodes, per exemple pel mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0{,}5 & 0{,}4 & 49 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 51 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 490 \\ 3 & 6 & 510 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 15 & 12 & 1\,470 \\ 15 & 30 & 2\,550 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 15 & 12 & 1\,470 \\ 0 & 18 & 1\,080 \end{array}\right)$$

I, per tant, $18y = 1\,080$, és a dir, $y = 60$ i $15x + 12 \cdot 60 = 1\,470$, d'on s'obté que $15x = 750$, és a dir, $x = 50$. Així doncs, actualment hi ha 50 alumnes matriculats en l'horari de matí i 60 en l'horari de tarda.

a) Plantejament: 0,5 punts. Producte de matrius: 0,5 punts. Interpretació del resultat: 0,25 punts.

b) Plantejament: 0,5 punts. Resolució: 0,5 punts. Solució final: 0,25 punts.

---

8. PAU 2023 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 5

5.

a) Comencem calculant A^2:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

Per tant,

$A^2 - 2\,A = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - 2a & 2ab - 2b \\ 0 & a^2 - 2a \end{pmatrix}$.

Finalment, aplicant que $A^2 - 2\,A = B$ tenim que

$\begin{pmatrix} a^2 - 2a & 2ab - 2b \\ 0 & a^2 - 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Per tant, s'ha de satisfer que

$$\left.\begin{matrix} a^2 - 2a = 0 \\ 2ab - 2b = 1 \end{matrix}\right\}$$

La primera equació ens dona $a(a - 2) = 0$ i, per tant, tenim dues possibles solucions, o bé $a = 0$ o bé $a = 2$.

Si $a = 0$, la segona equació ens queda

$$-2b = 1 \rightarrow b = \frac{-1}{2} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mentre que si $a = 2$, tenim

$$2b = 1 \rightarrow b = \frac{1}{2} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Ara tenim que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Comencem aïllant X en l'equació

$$2A = AX + B \rightarrow AX = 2A - B \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(2A - B)$$
$$\rightarrow X = 2I - A^{-1}B$$

en què I denota la matriu identitat d'ordre 2.

Calculem A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Per tant, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. I finalment,

$$X = 2I - A^{-1}B = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Càlcul de A^2: 0,25 p. Obtenció de les equacions: 0,5 p. Obtenció dels valors de a i b: 0,25 p. cada parell.

b) Aïllar la matriu X: 0,5 p. Càlcul de la inversa de A: 0,5 p. Resultat final: 0,25 p.

---

9. PAU 2022 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 5

5.

a) Comencem calculant els productes de les dues matrius:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1-a \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$$

Observem que, perquè les dues matrius siguin iguals, cal que $1 - a = 0$, és a dir, que $a = 1$.

Quan $a = 1$, observem que:

$$A \cdot B = B \cdot \text{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot I$$

b) Sabem que es compleix la igualtat $A \cdot B = 2 \cdot I$. Si multipliquem per ½ als dos costats de la igualtat, tenim que:

$$\frac{1}{2} \cdot A \cdot B = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot I = I$$

Així doncs, d'una banda, tenim que $\left(\frac{1}{2} \cdot A\right) \cdot B = I$, i per tant:

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'altra banda, tenim també que:

$$A \cdot \frac{1}{2} \cdot B = A \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot B\right) = I$$

Així que:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Criteris de correcció: a) Càlcul del valor de a: 0,75 punts. Comprovació de la igualtat: 0,5 punts. b) Si han calculat una de les dues matrius inverses: 0,75 punts; si les han calculat totes dues: 1,25 punts.

---

10. PAU 2022 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 5

5.

a)

[1,5 punts]

Calculem el producte P · A:

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3-a & -2a-1 \end{pmatrix}.$$

Sabem que una matriu quadrada és invertible si el rang de la matriu és màxim, és a dir, en aquest cas si el rang és 2.

Apliquem el mètode de Gauss. Si sumem a la segona fila la primera multiplicada per $(3-a)$, obtenim:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3-a & -2a-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 8-5a \end{pmatrix}.$$

Per tant, el rang de la matriu serà 2 i, per tant, la matriu $P \cdot A$ serà invertible sempre que $8-5a$ sigui diferent de zero. Com que $5a-8=0 \quad \rightarrow \quad a=8/5$ Obtenim que sempre que $a \neq \frac{8}{5}$ la matriu obtinguda del producte de $P \cdot A$ serà invertible.

b)

[1 punt]

Quan $a=2$ tenim que

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Hem de resoldre l'equació *P·A+X = I*. Obtenim:

$$X = I - P \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Criteris de correcció: a) Càlcul dels producte P·A: 0,5 p. Càlcul del rang de la matriu: 0,5 p. Obtenció del valor de a pel qual no és invertible: 0,5 p. b) Aïllar la X: 0,5 p. Càlcul de X: 0,5 p.

6

a)

[0,75 punts]

Sabem que $R_e = R_0 \cdot (1-p) = 15 \cdot (1-0{,}95) = 15 \cdot 0{,}05 = 0{,}75$. Com que aquest valor és inferior a 1, segons el model, no hi ha risc d'una epidèmia de xarampió.

b)

[0,75 punts]

En el cas de la grip espanyola $R_e = R_0 \cdot (1-p) = 4 \cdot (1-p)$. Imposem que

$$4 \cdot (1-p) < 1$$

Aïllant la p tenim que cal que $p > 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$. Per tant, caldria vacunar més d'un 75% de la població per aturar l'epidèmia.

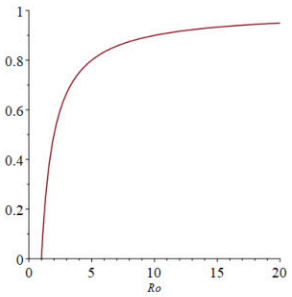
c)

[1 punt]

El llindar de vacunació és donat per $R_0 \cdot (1-p) < 1$. Aïllant, obtenim que cal que $p > 1 - \frac{1}{R_0}$. Per tant, la funció que ens determina el llindar del mínim de vacunació necessària, en funció de R_0, és $p(R_0) = 1 - \frac{1}{R_0}$.

Per fer un esbós de la funció entre 1 i 20 podem buscar els valors de la funció en els dos extrems $p(1) = 0$ i $p(20) = \frac{19}{20} = 0.95$. També veiem que la funció és sempre creixent perquè la derivada és $p'(R_0) = \frac{1}{R_0^2} > 0$ i, per tant, no té extrems relatius.

La gràfica de la funció és:



Criteris de correcció: a) Càlcul i justificació que no hi ha risc d'epidèmia en aquest cas: 0,75 p. b) Plantejament: 0,25 p. Càlcul: 0,5 p. c) Obtenció de la

11. PAU 2022 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 3

3.

[2,5 punts]

Considerem la igualtat

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -3 & -8\end{pmatrix}.$$

Fent el primer producte de matrius tenim

$$\begin{pmatrix}a & b\\ a & b+c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -3 & -8\end{pmatrix}.$$

Si ara realitzem el segon producte obtenim

$$\begin{pmatrix}a-b & 2a-3b\\ a-b-c & 2a-3b-3c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -3 & -8\end{pmatrix}.$$

Hem de resoldre, per tant, el sistema

$$\begin{cases}a-b=-1\\ 2a-3b=-2\\ a-b-c=-3\\ 2a-3b-3c=-8\end{cases}$$

Si el resolem per el mètode de Gauss tenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & -1\\ 2 & -3 & 0 & -2\\ 1 & -1 & -1 & -3\\ 2 & -3 & -3 & -8\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -2\\ 0 & -1 & -3 & -6\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & -3 & -6\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Obtenim per tant la solució $c=2$, $b=0$ i $a=-1$. Per tant, la matriu que buscàvem és

$$X=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Criteris de correcció: Plantejament del producte de matrius: 0,5 punts. Càlcul dels dos productes de matrius. 0,5 punts cadascun. Plantejament del sistema d'equacions: 0,5 punts. Resolució del sistema d'equacions: 0,5 punts.

12. PAU 2021 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 1

1.

a) Fem el producte de $v \cdot A$.

$$v \cdot A = (1 \quad 1 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 13{,}5 & 13{,}2 & 4{,}2 \\ 11 & 12{,}5 & 3{,}8 \\ 15 & 14 & 2{,}7 \end{pmatrix} = (39{,}5 \quad 39{,}7 \quad 10{,}7)$$

El vector resultant correspon als ingressos totals en milers d'euros del conjunt dels tres locals en els mesos de gener, febrer i març de 2020 respectivament.

D'altra banda,

$$A \cdot w = \begin{pmatrix} 13{,}5 & 13{,}2 & 4{,}2 \\ 11 & 12{,}5 & 3{,}8 \\ 15 & 14 & 2{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30{,}9 \\ 27{,}3 \\ 31{,}7 \end{pmatrix}$$

i en cada fila hi ha els ingressos totals durant els 3 mesos de cada un dels locals, en milers d'euros.

b) Per calcular el rang de la matriu *B* diagonalitzarem seguint el mètode de Gauss. En el primer pas substituïm la fila 2, F2, per F2-F1, on F1 denota la fila 1, i la fila 3, F3, per F3-2·F1. En el segon pas substituïm F3 per F3+F2.

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \\ 4 & 11 & x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & x-8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x-7 \end{pmatrix}$$

Per tant, perquè la matriu B tingui rang 2 cal que $x = 7$.

Criteris de correcció: a) Càlcul dels productes: 0,25 p. cadascun. Interpretació del resultat: 0,75 p. b) Si es fa algun procediment per intentar validar que el rang de la matriu és 2: 0,5 p. Càlculs 0,5 p. Obtenció del resulta final: 0,25 p.

13. PAU 2021 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 5

5.

a) Comencem calculant les diferents potències de A:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

...

Per tant, deduïm que:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'altra banda, per comprovar si la matriu de l'enunciat és la inversa de la matriu A^n, multipliquem les dues matrius per veure si obtenim la matriu identitat:

$$A^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, efectivament, es tracta de la matriu inversa de A^n.

b) Per resoldre l'equació matricial, comencem aïllant la matriu X respectant les normes del producte de matrius:

$$A^{10}X - A^{20} = A \Longrightarrow A^{10}X = A + A^{20} \Longrightarrow X = (A^{10})^{-1}(A + A^{20}).$$

Utilitzant el que hem vist a l'apartat anterior, tenim, per tant, que:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 20 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 21 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Criteris de correcció: a) Obtenció de l'expressió de A^n: 0,75 p. Comprovació que es tracta de la matriu inversa de A^n: 0,5 p. b) Aïllar l'equació matricial: 0,5 p. Càlculs dels productes de matrius: 0,5 p. Obtenció de la solució final: 0,25 p.

---

14. PAU 2021 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 6

6.

a)

Calculem les matrius que ens demanen:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 2a & a^2 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 2a & a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 3a^2 & a^3 \end{pmatrix} \quad \text{i}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 3a^2 & a^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 0 \\ 4a^3 & a^4 \end{pmatrix}.$$

b)

Deduïm doncs que en general $A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ na^{n-1} & a^n \end{pmatrix}$ i per tant,

$$A^{100} = \begin{pmatrix} a^{100} & 0 \\ 100a^{99} & a^{100} \end{pmatrix}.$$

Criteris de correcció: a) Càlcul de les potències de matrius A^2 i A^3: 0,5 p. cadascuna. Càlcul de A^4: 0,25 p.. b) Observar la relació i deducció de la matriu A^{100}: 1,25 p.

15. PAU 2020 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 1

1. Considerem la matriu $A = \begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix}$. Estudieu per a quins valors de x la matriu inversa de la matriu A coincideix amb la seva oposada, és a dir, $A^{-1} = -A$. *[2,5 punts]*

Hem de trobar els valors de $\boldsymbol{x}$ per als quals es compleix que $\boldsymbol{A^{-1} = -A}$.
D'una banda, $-\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{x} & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{-5} & \boldsymbol{x} \end{pmatrix}$.
D'altra banda, sabem que $\boldsymbol{A \cdot A^{-1} = I}$, on $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat d'ordre 2. Per tant, hem de trobar els valors de $\boldsymbol{x}$ per als quals es compleix:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{-2} \\ \boldsymbol{5} & \boldsymbol{-x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{-x} & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{-5} & \boldsymbol{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix}.$$

Comencem fent el primer producte:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{-2} \\ \boldsymbol{5} & \boldsymbol{-x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{-x} & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{-5} & \boldsymbol{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{-x^2 + 10} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-x^2 + 10} \end{pmatrix}.$$

Com que sabem que

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{-x^2 + 10} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-x^2 + 10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix},$$

hem de resoldre l'equació $\boldsymbol{-x^2 + 10 = 1}$, que té per solucions $\boldsymbol{x = -3}$ i $\boldsymbol{x = 3}$.

Criteris de correcció: Plantejament del problema: 0,5 p. Càlcul del producte de matrius: 0,75 p. Obtenció de l'equació: 0,5 p. Obtenció de les solucions: 0,75 p.

16. PAU 2020 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 5

5. Considereu les matrius $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

   a) Comprova que es compleix que $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^2$. *[1,25 punts]*
   b) Resoleu l'equació matricial $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$ en què $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat d'ordre 2. *[1,25 punts]*

a) Per fer aquesta comprovació comencem calculant la matriu A^2:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per comprovar que $A^{-1} = A^2$ hem de veure que $A^2 \cdot A = I$. Fem, doncs, el càlcul de $A^2 \cdot A$:

$$A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Com que, efectivament hem obtingut que $A^2 \cdot A = \mathrm{I}$ aleshores $A^{-1} = A^2$.

Evidentment, una altra solució correcta alternativa seria trobar A^{-1} i comprovar que efectivament $A^{-1} = A^2$.

b) Si aïllem la X respectant la no commutativitat de les matrius obtenim

$$X = A^{-1} \cdot (I - B).$$

Però com què $A^{-1} = A^2$ podem resoldre l'equació fent

$$X = A^{-1} \cdot (I - B) = A^2 \cdot (I - B) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right) =$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Un altre cop tenim una solució alternativa que passaria per considerar $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ i trobar la solució del sistema de quatre equacions i quatre incògnites que se'n deriva.

Criteris de correcció: a) Plantejament: 0,75 p. Càlculs: 0,5 p. b) Plantejament: 0,75 p. Càlculs: 0,5 p.

17. PAU 2020 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 1

SÈRIE 3

---

1. La taula següent reflecteix el preu unitari, expressat en euros, de tres productes P_1, P_2 i P_3, subministrats a un restaurant per dues empreses diferents E_1 i E_2 :

	E_1	E_2
P_1	6	5
P_2	5	8
P_3	9	7

El restaurant haurà de fer dues comandes. Aquesta setmana necessita 8 unitats del producte P_1, 5 unitats del producte P_2 i 12 unitats del producte P_3. Mentre que per la setmana vinent necessitarà 10 unitats del producte P_1, 15 unitats del producte P_2 i 7 unitats del producte P_3.

a) Escriviu en forma matricial la informació que relaciona el preu unitari i les empreses subministradores i també la informació de les quantitats de cada una de les dues comandes que vol fer el restaurant. *[1,25 punts]*
b) Calculeu a quina de les dues empreses ha d'encarregar el restaurant cada una de les comandes per tal que li surti més econòmica i a quin preu li sortirà cadascuna. *[1,25 punts]*

a) La matriu que relaciona el preu unitari de cada producte amb l'empresa subministradora és:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 8 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

I les matrius files de les dues comandes són:

$$B = (8 \quad 5 \quad 12) \text{ i } C = (10 \quad 15 \quad 7)$$

b) Per saber el preu total, en euros, de la primera comanda a cada una de les empreses calculem:

$$B \cdot A = (8 \quad 5 \quad 12)\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 8 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} = (181 \quad 164).$$

Per tant la primera comanda és més econòmic fer-la a l'empresa E_2 i ens costarà 164 €.

Per saber el preu de la segona comanda a cada una de les empreses calculem:

$$C \cdot A = (10 \quad 15 \quad 7)\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 8 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} = (198 \quad 219).$$

Per tant la segona comanda és més econòmic fer-la a l'empresa E_1 i ens costarà 198 €.

Criteris de correcció: a) Obtenció de la matriu A: 0,75 p. Obtenció dels vectors de les comandes: 0,25 p. cadascun. b) Plantejament: 0,25 p. Càlcul dels dos productes de matrius: 0,25 p. cadascun. Obtenció dels preus finals de les dues comandes: 0,25 p. Cadascun.

18. PAU 2019 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 1

1. Volem enviar una data codificada. Per a fer-ho, considerem el vector de tres components $X = (d\ m\ a)$, en el qual d expressa el dia, m el mes i a l'any. Tot seguit, fem l'operació $X \cdot A + B$, en què A i B són les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ i } B = (5 \quad -5 \quad 5).$$

El resultat d'aquesta operació és el vector codificat que enviem.

a) Si la data que volem enviar és l'1 de gener de 2019, és a dir, si $X = (1\ 1\ 2019)$, quin és el vector codificat que enviarem? [0,75 punts]

b) Si el vector codificat que ens ha arribat és (2036 1 −13), quina és la data sense codificar? [1,25 punts]

a) Si calculem el vector codificat obtenim

$$(1 \quad 1 \quad 2019) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (5 \quad -5 \quad 5) = (2025 \quad -4 \quad 3).$$

Per tant, el vector que hem d'enviar és $(2025 \quad -4 \quad 3)$.

b) En aquest cas, si $(x\ y\ z)$ és el vector de la data sense codificar, tenim

$$(x \quad y \quad z) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (5 \quad -5 \quad 5) = (2036 \quad 1 \quad -13).$$

Fent les operacions, trobem que hem de resoldre el sistema següent:

$$\begin{cases} x + z + 5 = 2036 \\ y - 5 = 1 \\ -x - y + 5 = -13 \end{cases}$$

Aquest sistema té per solucions $x = 12$, $y = 6$ i $z = 2019$. És a dir, la data buscada és el 12 de juny de 2019.

Criteris de correcció: a) Obtenció del producte de $X \cdot A$: 0,5 p. Obtenció del resultat final de l'apartat: 0,25 p. b) Plantejament de la igualtat matricial: 0,25 p. Obtenció de les equacions: 0,5 p. Resolució del sistema d'equacions: 0.25 p. Expressió de la resolució del problema en forma de data: 0,25 p.

19. PAU 2019 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2

2. Resoleu les qüestions següents:

a) Considereu la matriu $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculeu els valors de a i b per tal que es verifiqui la igualtat $\boldsymbol{M}^2 + a \cdot \boldsymbol{M} + b \cdot \boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$, en què $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat $\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és la matriu nul·la. *[1 punt]*

b) Considereu la matriu $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Trobeu totes les matrius $\boldsymbol{B}$ que commuten amb la matriu $\boldsymbol{A}$, és a dir, que compleixen que $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$. *[1 punt]*

a) Comencem calculant M^2:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}.$$

Per tant, tenim el sistema:

$$\begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Que ens dona el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} 14 + 2a + b = 0 \\ 5 + 5a = 0 \\ 2 + 2a = 0 \\ 11 - a + b = 0 \end{cases}$$

Tant de la segona com de la tercera equacions deduïm que $a = -1$, i substituint el valor de a, tant a la primera com a la quarta equació, obtenim que $b = -12$.

b) Hem de trobar els valors de x, y, z i t per als quals es compleix que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si fem els dos productes cal que es compleixi la igualtat:

$$\begin{pmatrix} z & t \\ x - z & y - t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x - y \\ t & z - t \end{pmatrix}.$$

Per tant, cal que $z = y$, $t = x - y$, $x - z = t$ (però com que $z = y$, tornem a obtenir que $t = x - y$) i $y - t = z - t$ (que ens torna a donar que $z = y$).

Per tant, les úniques condicions que hem obtingut són $z = y$ i $t = x - y$. És a dir, la matriu A commutarà amb totes les matrius de la forma

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & x - y \end{pmatrix},$$

per a qualsevol valor de x i de y.

Criteris de correcció: a) Càlcul de M^2: 0,25 p. Obtenció de les equacions: 0,25 p. Obtenció dels valors de a i b: 0,5 p. b) Plantejament: 0,25 p. Càlcul dels productes de matrius: 0,25 p. Obtenció del sistema: 0,25 p. Obtenció de la solució final: 0,25 p.

---

20. PAU 2019 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 6

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

21. PAU 2018 · Setembre · Sèria 3 · Exercici 5

5. Resoleu les preguntes següents:

a) Trobeu les matrius ***A*** i ***B*** que compleixen que $A-2B=\begin{pmatrix}1 & 13\\ 0 & -5\end{pmatrix}$ i $2A+3B=\begin{pmatrix}2 & -9\\ 7 & 4\end{pmatrix}$.

[1 punt]

b) Determineu el valor de a, b, c i d perquè es verifiqui que $\begin{pmatrix}1 & 2\\ a & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & c\\ 2 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b & -5\\ d & -7\end{pmatrix}$.

[1 punt]

a) Observem que $2(A-2B)-(2A+3B)=-7B$. Per tant,

$$-7B=2\begin{pmatrix}1 & 13\\ 0 & -5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -9\\ 7 & 4\end{pmatrix}.$$

D'aquí obtenim que $B=\begin{pmatrix}0 & -5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. I, d'altra banda, $A=2B+\begin{pmatrix}1 & 13\\ 0 & -5\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0 & -5\\ 1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 13\\ 0 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

b) Calculem el producte de matrius $\begin{pmatrix}1 & 2\\ a & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & c\\ 2 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & c-8\\ 2 & ac-4\end{pmatrix}$. Per tant, tenim que $\begin{pmatrix}4 & c-8\\ 2 & ac-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b & -5\\ d & -7\end{pmatrix}$. D'aquí obtenim que $b=4$, $c-8=-5$, és a dir, $c=3$, $d=2$ i $ac-4=-7$, per tant, $3a=-3$, és a dir, $a=-1$.

Criteris de correcció: a) Càlcul de la matriu A: 0,5 p. Càlcul de la matriu B: 0,5 p. b) Càlcul del producte de matrius: 0,5 p. Obtenció del valor dels quatre paràmetres: 0,5 p.

$ax+b$

22. PAU 2018 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

1. Considereu les matrius M de la forma $M = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ en què a és un nombre real.
   a. Determineu a de manera que $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -2a & -1 \end{pmatrix}$. *[1 punt]*
   b. Determineu a de manera que $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, en què M^{-1} representa la matriu inversa de M. És a dir, $M \cdot M^{-1} = I$, en què I és la matriu identitat d'ordre 2. *[1 punt]*

a) Comencem calculant M^2: $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-a^2 & 2a \\ -2a & -a^2 \end{pmatrix}$. Sabem que $\begin{pmatrix} 4-a^2 & 2a \\ -2a & -a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -2a & -1 \end{pmatrix}$. Obtenim, per tant, que cal que es compleixi que $4 - a^2 = 3$ i que $-a^2 = -1$. En ambdós casos tenim que $a^2 = 1$, que té per solucions $a = 1$ i $a = -1$.

b) Sabem que $M \cdot M^{-1} = I$. Però com que sabem la forma que ha de tenir M^{-1}, tenim que $M \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 2+2a \\ 0 & -a \end{pmatrix}$. I imposant que aquesta darrera matriu ha de ser igual a la matriu identitat, tenim que $-a = 1$, és a dir, que $a = -1$, i que $2 + 2a = 0$, que també es compleix quan $a = -1$. Per tant, l'única solució és $a = -1$.
Alternativament es pot calcular la matriu inversa M^{-1} i igualar a la forma que ha de tenir segons l'enunciat del problema.

Criteris de correcció: a) Càlcul de M^2: 0,5 p. Plantejament de la igualtat matricial: 0,25 p. Obtenció dels dos possibles valors de a: 0,25 p. b) Plantejament del problema: 0,5 p. Obtenció del valor de a: 0,5 p.

---

23. PAU 2018 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 5

5. Un fabricant d'automòbils produeix els models Record i Astrid. Desa la producció en tres naus. A la primera nau té 150 vehicles del model Record i 120 vehicles del model Astrid. A la segona guarda 80 Record i 140 Astrid. Finalment, a la tercera nau emmagatzema 250 Re-cord i 125 Astrid. A més, el preu dels automòbils Record és de 6.520 €, mentre que cada Astrid val 8.130 €. Tota aquesta informació està recollida en les matrius següents:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 150 & 120 \\ 80 & 140 \\ 250 & 125 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 6.520 \\ 8.130 \end{pmatrix} \text{ i } \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Què representa la matriu $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$? Calculeu-la. *[1 punt]*
b) Què representa la matriu $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P}$? Calculeu-la. *[1 punt]*

a) El producte $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ ens dona el nombre de cotxes que tenim de cada model:
$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = (\,480 \;\; 385\,)$.
b) El producte $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P}$ ens dona el valor total dels cotxes emmagatzemats:
$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P} = 6.259.650$.

Criteris de correcció: a) Significat de la matriu: 0,75p. Càlcul: 0,25 p. b) Significat de la matriu: 0,75p. Càlcul: 0,25 p.

---

24. PAU 2017 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 5

5. Considereu la matriu $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$.

   a. Comproveu que $\mathbf{A}^3 - \mathbf{I} = 0$, en què $\mathbf{I}$ és la matriu identitat d'ordre 2. *[1 punt]*
   b. Calculeu $\boldsymbol{A}^{11}$ utilitzant la informació de l'apartat *a*. *[1 punt]*

a. Calculem la matriu A^3 i comprovem que efectivament dona la matriu identitat:

$$\mathrm{A}^3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} = \mathrm{A}^2 \cdot \mathrm{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b. Utilitzant l'apartat anterior tenim que

$$\mathrm{A}^{11} = \mathrm{A}^3 \cdot \mathrm{A}^3 \cdot \mathrm{A}^3 \cdot \mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Criteris de correcció: a) Càlcul de la matriu A^3 i verificació de la condició: 1 p. b) Raonament de com utilitzar la relació de l'apartat anterior: 0,5 p. Càlcul de la matriu A^{11}: 0,5 p.

25. PAU 2017 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3

3. Considereu les matrius $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \mathrm{m} & \mathrm{n} \end{pmatrix}$, on m i n són dos nombres reals.

   a) Comproveu que es compleix la igualtat $(\mathrm{A} - \mathrm{B}) \cdot (\mathrm{A} + \mathrm{B}) = \mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2$. *[1 punt]*

   b) Determineu m i n per tal que les matrius B i C commutin, és a dir, $\mathrm{B} \cdot \mathrm{C} = \mathrm{C} \cdot \mathrm{B}$. *[1 punt]*

a) Tenim $\mathrm{A} - \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ i $\mathrm{A} + \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$, per tant

$$(\mathrm{A} - \mathrm{B}) \cdot (\mathrm{A} + \mathrm{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 10 \\ 10 & 25 \end{pmatrix}$$

D'altra banda $\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 26 & 10 \\ 10 & 26 \end{pmatrix}$ i $\mathrm{B}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'on es dedueix que es verifica la igualtat demanada.

Alternativament, podem desenvolupar $(A-B)\cdot(A+B)$ i argumentar que per comprovar que es compleix la igualtat n'hi ha prou de veure que A i B commuten:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix},$$
$$B\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 5\\ 5 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}.$$

b) Calculem els dos productes:

$$B\cdot C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ m & n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m & n\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$C\cdot B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ m & n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ n & m\end{pmatrix}$$

Per tant commuten si i només si $m=-1$ i $n=1$.

Criteris de correcció: a) Càlcul de $A-B$: 0,25 p. Càlcul de $A+B$: 0,25 p. Càlcul de A^2: 0,25 p. Càlcul de B^2: 0,25 p. b) Càlcul de $B\cdot C$: 0,25 p. Càlcul de $C\cdot B$: 0,25p.

26. PAU 2017 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 6

0,25 p. b) Obtenció de l'interval de valors de la variable: 0,5 p. Obtenció dels preus màxim i mínim: 0,5 p.

---

6. Considereu les matrius: $A=\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

   a. Calculeu el valor del paràmetre a per al qual es compleix que $A\cdot B=B\cdot A$. *[1 punt]*

   b. Per al valor $a=2$, trobeu una matriu X, tal que $A\cdot X\cdot A=B$. *[1 punt]*

   a) Calculem els productes $A\cdot B$ i $B\cdot A$:

   $$A\cdot B=\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a & -a+1\\ 0 & 2\end{pmatrix} \text{ i } B\cdot A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix},$$

   per tal que es compleixi la igualtat cal que $a=1$.

   b) Aïllant obtenim que $X=A^{-1}\cdot B\cdot A^{-1}$,

   $A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ i fent els productes obtenim $X=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}4 & -5\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

Criteris de correcció: a) Càlcul dels productes de matrius: 0,25 p. cadascun. Trobar el valor del paràmetre a: 0,5 p. b) Aïllar l'equació matricial: 0,25 p. Càlcul de la inversa: 0,5 p. Determinació de la matriu X: 0,25 p.

27. PAU 2016 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 6

6. Considereu les matrius $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Calculeu les matrius $A\cdot B$ i $B\cdot A$. [1,5 punts]

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & -3 & 8 \end{pmatrix},\ B\cdot A=\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

b. Justifiqueu si en algun cas és possible calcular P^2 quan P és una matriu no quadrada. [0,5 punts]

En no ser quadrada, el nombre de columnes de la primera matriu, P, no coincidirà amb el nombre de files de la segona, que és la mateixa. Per tant, mai no es pot calcular el quadrat d'una matriu no quadrada.

28. PAU 2015 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 5

5. Trobeu les matrius A i B sabent que

$$A-2B=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{i que} \quad 2A+3B=\begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}.$$ [2 punts]

$2A-4B=\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$. Resolent el sistema obtenim $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

29. PAU 2015 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 4

4. Siguin les matrius $A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -a \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b & c \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculeu les matrius A + B i A · B. *[1 punt]*

b. Determineu els valors de *a*, *b* i *c* que fan A + B = A · B. *[1 punt]*

a. $A+B=\begin{pmatrix} 1+b & a+c \\ 3 & 1-a \end{pmatrix}$ $A\cdot B=\begin{pmatrix} b+a & c+a \\ 2b-a & 2c-a \end{pmatrix}$.

b. A + B = A · B ens porta al sistema: $\left.\begin{array}{l} 1+b=b+a \\ a+c=c+a \\ 3=2b-a \\ 1-a=2c-a \end{array}\right\}$, que té com a solució

$a=1, b=2, c=\frac{1}{2}$.

30. PAU 2015 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 4

4. Donades les matrius $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, calculeu la matriu *X* que compleix $X\cdot A+B^2=2\cdot I_2$, on $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ és la matriu identitat d'ordre 2. [2 punts]

Aïllant la matriu X obtenim $X=\left(2\cdot I_2-B^2\right)\cdot A^{-1}$. Fent els càlculs obtenim $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ i, d'aquí obtenim $X=\begin{pmatrix}-7 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & -\frac{7}{2}\\ 4 & \frac{5}{2}\end{pmatrix}$.

---

31. PAU 2014 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 4

4. Siguin les matrius $A=\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}$ i $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, determineu x per tal que es verifiqui l'equació $A^2-6A+5I=0$, on 0 és la matriu en què tots els elements són 0. *[2 punts]*

$$\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}-6\cdot\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}x^2-6x+5 & 0\\ 0 & x^2-6x+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Resolent l'equació obtenim x = 1, x = 5.

---

32. PAU 2014 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 3

3. Siguin les matrius $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
   a. Determineu una matriu X tal que A · X = I. *[1 punt]*
   b. Determineu una matriu Y tal que A · Y · A = B. *[1 punt]*

a. La matriu X que verifica la condició és la matriu inversa de A, que és $A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

b. $A\cdot Y\cdot A=B\rightarrow Y=A^{-1}\cdot B\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}8 & -13\\ -5 & 8\end{pmatrix}$.

---

33. PAU 2013 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 4

4. Siguin les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \end{pmatrix}$.
   a. Resoleu l'equació matricial $X + 2A = X \cdot A$, on X és la matriu incògnita. *[1 punt]*
   b. Hi ha cap matriu Y que verifiqui $Y \cdot A = B$? I que verifiqui $A \cdot Y = B$? Justifiqueu les respostes. *[1 punt]*

a. Aïllant X a l'equació obtenim $X \cdot (A - Id) = 2A$. Ara, ja sigui calculant $(A - Id)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ o bé plantejant un sistema de quatre equacions amb quatre incògnites, obtenim $X = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

Criteris de correcció: Aïllar X: (0.5 p. Càlcul de X: 0.5 p.

b. La primera de les respostes és positiva ja que $Y \cdot A = B \rightarrow Y = B \cdot A^{-1}$; aquest producte podrà efectuar-se ja que el nombre de columnes de B és igual al nombre de files de A^{-1}. També es pot respondre calculant-ho directament. Per la mateixa raó no és possible efectuar $A \cdot Y = B \rightarrow Y = A^{-1} \cdot B$.

Criteris de correcció: 0.5 punts per cada justificació, a criteri del corrector.

34. PAU 2013 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 3

3. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   a. Calculeu A^2 i A^3, A^4. *[1 punt]*
   b. Calculeu A^{201} i A^{344}. *[1 punt]*

a. $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. $A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b. Com a conseqüència de l'apartat anterior, $A^{201} = A^{200} \cdot A = A$. Com que 344 és múltiple de 4, $A^{344} = Id$.

35. PAU 2013 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 2

2. Siguin les matrius:

$$A=\begin{pmatrix}2 & a\\ -2 & 0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}3 & 0\\ b & -1\end{pmatrix}$$

a. Determineu el valor dels paràmetres a i b que fa que $A\cdot B=B\cdot A$. *[1 punt]*

b. Determineu el valor de a pel qual es verifica $A^2=2A$. *[1 punt]*

a. $A\cdot B=\begin{pmatrix}6+ab & -a\\ -6 & 0\end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix}6 & 3a\\ 2b+2 & ab\end{pmatrix}$, que implica a = 0, b = - 4.

b. $A^2=\begin{pmatrix}2 & a\\ -2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & a\\ -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-2a & 2a\\ -4 & -2a\end{pmatrix}$. $2A=\begin{pmatrix}4 & 2a\\ -4 & 0\end{pmatrix}$. Seran iguals quan a = 0.

36. PAU 2012 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 6

6. Donades les matrius $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$,

a. Trobeu una matriu X tal que A·B + X = C. *[1 punt]*

b. Calculeu C^3. *[1 punt]*

a. Aïllant tenim X = C – A·B. A més, $A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$. Per tant, $X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

b. $C^3=C^2\cdot C=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ -2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 2\\ -1 & -5\end{pmatrix}$.

37. PAU 2012 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 6

7. Siguin les matrius $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & -8\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}8 & 3\\ 4 & -1\end{pmatrix}$.
   a. Determineu les matrius X i Y tals que X – 2Y = A i 2X – Y = B. *[1 punt]*
   b. Calculeu $(A+2\cdot Id)^2$, on Id és la matriu identitat. *[1 punt]*

a. Resolent el sistema com un sistema numèric obtenim $X=\frac{1}{3}(2B-A)$, $Y=\frac{1}{3}(B-2A)$ d'on, operant, obtenim $X=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 10/3 & 2\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 8/3 & 5\end{pmatrix}$.

b. $(A+2\cdot Id)^2=\begin{pmatrix}3 & -3\\ -2 & -6\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}15 & 9\\ 6 & 42\end{pmatrix}$.

38. PAU 2012 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 3

3. Considerem les matrius $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ -1 & 0 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 5\end{pmatrix}$.
   a. Justifiqueu si és possible efectuar A·B o B·A. En cas afirmatiu, calculeu-ho. *[1 punt]*
   b. Calculeu B^2 i B^3. *[1 punt]*

a. No és possible calcular A·B perquè el nombre de columnes de A és diferent del nombre de files de B. Sí que podem calcular B·A:

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ -1 & 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ -5 & 0 & 20\end{pmatrix}$$

b. $B^2=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -6\\ 0 & 25\end{pmatrix}$, $B^3=B^2\cdot B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -6\\ 0 & 25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -31\\ 0 & 125\end{pmatrix}$ 𝕊

39. PAU 2011 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 5

5.

a. Si A·B ha de ser una matriu quadrada d'ordre 2, aleshores la matriu B ha de tenir tres files. Per tant,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

D'aquí obtenim a = 19, b = 19, c = 6, d = 7. La matriu serà $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 19 & 19 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$.

b. $(A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

40. PAU 2011 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4

4.

a. Si A·B ha de ser una matriu quadrada d'ordre 2, cal que la matriu B tingui tres files. Per tant,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

D'aquí obtenim a = 2, b = -3, c = 1, d = 2. La matriu serà $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

b. $$(A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

41. PAU 2011 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 3

3.

a. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

b. $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}$.

42. PAU 2010 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 5

5. Siguin les matrius $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 5 & -4\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.
   a. Determineu la matriu X que verifica $X+BC=A^2$.
   b. Calculeu les matrius C^6 i C^7.

a.

$A^2=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B\cdot C=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 5 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 1\\ -4 & 5\end{pmatrix}$. Per tant, $X=A^2-B\cdot C=\begin{pmatrix}-6 & -1\\ 4 & -5\end{pmatrix}$.

b.

$C^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $C^4=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, ... És a dir, les potències parells seran la identitat, i les senars valdran C.

43. PAU 2010 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 5

Pregunta 5

a.

$A+B=\begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & -2 & -3\end{pmatrix}$; $(A+B)^2=\begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & -2 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & -2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

D'altra banda,

$A^2=\begin{pmatrix}2 & -3 & -5\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & -3 & -4\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}2 & -3 & -5\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & -3 & -4\end{pmatrix}$; $B^2=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$

$A\cdot B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Per tant.

$A^2+2A\cdot B+B^2=\begin{pmatrix}2 & -3 & -5\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & -3 & -4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -4 & -6\\ -2 & 5 & 6\\ 2 & -4 & -5\end{pmatrix}$. No són iguals.

b.

$(P+Q)^2=P^2+P\cdot Q+Q\cdot P+Q^2$, que serà el mateix que $P^2+2P\cdot Q+Q^2$ quan es verifiqui P·Q = Q·P, és a dir, les matrius P i Q commutin.

44. PAU 2010 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 6

Pregunta 6

a.

$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$. Tenim que $A^{-1} = A$.

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$ Per tant, $B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

b.

$A \cdot X \cdot B = 2C \to X = A^{-1} \cdot 2C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 12 & -8 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

45. PAU 2008 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 2

2. Donades les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Calculeu $A^2 + 2AB + B^2$; [1 punt]

b) Calculeu $(A+B)^2$. [1 punt]

Solució:

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$2AB = 2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 2 & 6 \end{pmatrix},$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$\underline{\left| A^2 + 2AB + B^2 \right.} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 2 & 15 \end{pmatrix}\Bigg|}.$$

b) $\underline{\left| (A+B)^2 \right.} = \left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \right)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 15 & 2 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}\Bigg|}$.

46. PAU 2006 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 4

4. Indiqueu TOTS els productes de dues matrius diferents que es poden fer amb les matrius següents.

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad E=\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$$

Puntuació: Total 2 punts.

Solució: Cal que el nombre de columnes de la primera matriu sigui igual al nombre de files de la segona, ja que es multipliquen files per columnes. Per tant, són possibles els productes següents:

$A\cdot C$, $A\cdot D$	columnes de A igual a 2 i files de la segona matriu igual a 2.
$B\cdot A$, $B\cdot C$, $B\cdot D$	columnes de B igual a 2 i files de la segona matriu igual a 2.
$C\cdot B$	columnes de C igual a 3 i files de la segona matriu igual a 3.
$D\cdot E$	columnes de D igual a 1 i files de la segona matriu igual a 1.
$E\cdot A$, $E\cdot C$, $E\cdot D$	columnes de E igual a 2 i files de la segona matriu igual a 2.

Nota pel corrector: Descompteu 0.2 punts per cada producte impossible i per cada oblit i arrodoniu al final.

47. PAU 2006 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2

2. Donades les matrius $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, esbrineu si existeix una matriu C que compleixi $B\cdot C=A$, i si s'escau, calculeu-la.

Puntuació total: 2 punts.

Solució: Escrivim el producte

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Per trobar els valors possibles formem el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x+3z &= 2 \\ 2x+6z &= 1 \end{aligned}\right\}$$
$$\left.\begin{aligned} y+3t &= 3 \\ 2y+6t &= 2 \end{aligned}\right\}$$

que és incompatible. Per tant no existeix cap matriu C.

48. PAU 2005 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 1

1. Un magatzem de rodes de vehicles de diferents tipus, té un estoc de components (en centenars d'unitats) donat per la taula següent:

	Cobertes	Tapacubs	Llantes
Utilitaris	3,1	0,3	2,1
Berlines	1,6	1,1	0,6
Tot terrenys	0,9	0	0,2

La quantitat de quilos de matèria primera necessària per cada component és:

	Acer	Cautxú
Cobertes	0,1	4,6
Tapacubs	1	0,05
Llantes	5	0

a) Calculeu el total d'acer acumulat en el magatzem.
b) Calculeu el total de cautxú acumulat en el magatzem.

Puntuació: Apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. Total 2 punts.

Solució: Considerem la matriu $A=\begin{pmatrix}310 & 30 & 210\\ 160 & 110 & 60\\ 90 & 0 & 20\end{pmatrix}$. Les quantitats de cobertes, tapacubs i llantes totals són: $(1,1,1)\cdot A=(560,140,290)$.

a) Per obtenir el total d'acer acumulat, només cal fer el producte

$$\boxed{\underline{\text{acer}}=(560,140,290)\cdot\begin{pmatrix}0.1\\ 1\\ 5\end{pmatrix}=\underline{1646\ \text{kg}}}$$

b) El total de cautxú acumulat serà:

$$\boxed{\underline{\text{cautxu}}=(560,140,290)\cdot\begin{pmatrix}4.61\\ 0.05\\ 0\end{pmatrix}=\underline{2583\ \text{kg}}}$$

49. PAU 2005 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 2

2. Siguin les matrius $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ i $C=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. Trobeu la matriu $X=A\cdot(B-C)$.

Puntuació: Total 2 punts.

Solució: $X=A\cdot(B-C)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}$

50. PAU 2005 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2

2. Sigui la matriu $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Calculeu A^{55}.

Puntuació: Total 2 punts. Les respostes sense raonar no puntuen.

Solució: El quadrat de A és $A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Per tant, tota potència parell de A serà la matriu unitat i tota potència senar serà igual a A. Així

$$\boxed{A^{55}=A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}}$$

Nota pels correctors: Cal que donin un raonament, però no s'exigirà un rigor excessiu en la resposta. L'absència de raonament concloent es penalitzarà amb 1 punt.