Matemàtiques aplicades a les ciències social

Matrius

Exercicis · 50 exercicis

Proves d'accés a la universitat (PAU) de Catalunya. Ordenats del més recent al més antic.
Retalls dels exàmens i pautes oficials (selecat.cat / universitats.gencat.cat).

1. PAU 2026 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4 (Opció A)

Exercici 4

[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 4	

La taula següent recull el nombre d'estudiants de grau (G), màster (M) i doctorat (D) matriculats a les tres facultats —Ciències (C), Enginyeria (E) i Lletres (L)— d'una petita universitat.

Facultat	*Grau (G)*	*Màster (M)*	*Doctorat (D)*	*Total*
Ciències (C)	450	172	41	663
Enginyeria (E)	445	178	45	668
Lletres (L)	438	183	48	669
Total	1.333	533	134	2.000

Trieu UNA de les dues opcions (A o B) i responeu a les qüestions que s'hi plantegen. **Indiqueu a la portada de l'examen l'opció escollida.**

OPCIÓ A

4.1. Si escollim un estudiant a l'atzar, quina és la probabilitat que sigui un estudiant de doctorat de la Facultat de Lletres?

Si escollim a l'atzar un estudiant que cursa un màster, quina és la probabilitat que estudiï a la Facultat d'Enginyeria?

[1,25 punts]

Puntuació de l'apartat 4.1	

4.2. Expresseu la informació de la taula (sense els totals) mitjançant una matriu 3×3 i calculeu, utilitzant un producte de matrius, el vector amb el nombre total d'estudiants de grau, màster i doctorat de la universitat.

Sabem que els estudiants de grau paguen 1.000 € de matrícula; els de màster, 1.500 €, i els de doctorat, 500 €. Per mitjà d'un producte de matrius, calculeu l'import total que ingressa la universitat en concepte de matrícules.

[1,25 punts]

Puntuació de l'apartat 4.2	

2. PAU 2025 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 4 (Opció A)

Exercici 4

Una empresa fabrica cotxes elèctrics i cotxes de motor de combustió. L'empresa té tres línies de fabricació: *L*1, *L*2 i *L*3. La taula següent mostra el nombre de vehicles de cada tipus que hi ha en aquest moment en cada línia. D'altra banda, sabem que el preu de venda dels vehicles elèctrics és de 40.000 € i el preu de venda dels vehicles de motor de combustió és de 30.000 €.

	Cotxes elèctrics	*Cotxes de motor de combustió*
L1	20	80
L2	30	100
L3	40	110

El cost mitjà de manteniment i consum per cada 100 km és d'1 € per als vehicles elèctrics i de 6 € per als de motor de combustió.

El 2 % de la producció de vehicles de motor de combustió surt de l'empresa amb algun defecte, mentre que només l'1 % dels vehicles elèctrics surt amb alguna tara.

OPCIÓ A

a) Obteniu, mitjançant un producte de matrius, la matriu que expressa els ingressos per cada línia un cop s'hagin venut tots els cotxes.

Si escollim a l'atzar un dels vehicles que hi ha ara a la fàbrica, quina és la probabilitat que sigui de motor de combustió si sabem que ha sortit defectuós?

[1,5 punts]

b) És més car comprar un cotxe elèctric, però té menys despeses per kilòmetres recorreguts que un de combustió. Determineu la funció que representa la despesa acumulada, entre la compra i els kilòmetres recorreguts, per a cada tipus de vehicle en funció del nombre de kilòmetres recorreguts, x. Si un conductor fa 20.000 km l'any, a partir de quants anys li sortirà més a compte el cotxe elèctric que el de combustió?

[1 punt]

3. PAU 2025 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4 (Opció B)

Exercici 4

Al Congrés Català d'Educació Matemàtica (C2EM), que se celebrarà a Lleida el proper mes de juliol, hi assistiran docents d'universitat, d'educació secundària i d'educació infantil i primària.

A hores d'ara, un 10 % dels docents inscrits són d'universitat, un 50 % són de secundària i la resta són d'infantil i primària. D'altra banda, un 40 % dels docents inscrits d'universitat, un 52 % dels docents inscrits de secundària i un 65 % dels docents inscrits d'infantil i primària són dones.

OPCIÓ B

***a*)** L'organització del Congrés vol donar un detall diferent a cada grup de docents: el detall de tipus $D1$ per al grup de docents universitaris, el detall de tipus $D2$ per al grup de docents de secundària i el detall de tipus $D3$ per al grup de docents d'infantil i primària. Han demanat pressupost a tres empreses diferents, que anomenarem $E1$, $E2$ i $E3$. La matriu següent ens dona els preus unitaris, en euros, de cada detall de tipus $D1$, $D2$ i $D3$ (files) segons les empreses $E1$, $E2$ i $E3$ (columnes):

$$\begin{pmatrix} 1{,}25 & 1 & 1{,}25 \\ 0{,}75 & 1 & 1{,}15 \\ 1 & 0{,}85 & 0{,}80 \end{pmatrix}$$

La comanda de l'organització es pot representar com un vector fila (x, y, z), en què x representa la quantitat de detalls de tipus $D1$, y és la quantitat de detalls de tipus $D2$ i z correspon a la quantitat de detalls de tipus $D3$ que cal comprar.

L'organització treballa amb la previsió que al Congrés hi assistiran 1.000 persones en total i que els percentatges de cada grup de docents respecte al total seran els mateixos que els que hi ha en aquest moment de la inscripció.

Calculeu mitjançant un producte de matrius quina empresa ofereix el millor preu i quin és aquest preu.

[1,25 punts]

***b*)** Un hotel situat prop de l'espai on se celebrarà el Congrés ha fet un estudi de mercat. Inicialment es plantejaven oferir l'habitació doble a un preu de 80 € la nit i amb aquest preu estimaven que tindrien 100 reserves d'habitacions dobles. Però l'estudi mostra que la relació entre el preu de l'habitació doble i el nombre de reserves és lineal, de manera que per cada euro de descompte sobre el preu de l'habitació aconsegueixen dues reserves més.

Si anomenem x el nombre de vegades que s'aplica el descompte d'un euro, escriviu la funció que dona els ingressos de l'hotel en funció de x. Quin ha de ser el preu de l'habitació doble per a maximitzar els ingressos?

[1,25 punts]

4. PAU 2024 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 4

4. Un cinema disposa de dues sales en les quals es projecten dues pel·lícules diferents. La taula següent mostra el nombre de persones que han assistit a la projecció de cada pel·lícula la darrera setmana, agrupades per franges d'edat:

Franja d'edat	*Pel·lícula de la sala 1*	*Pel·lícula de la sala 2*
Menys de 18 anys	122	620
18-65 anys	930	433
Més de 65 anys	384	281

La informació de la taula anterior es registra amb la forma matricial $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 122 & 620 \\ 930 & 433 \\ 384 & 281 \end{pmatrix}$.

a) Considerant la matriu $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, calculeu el producte $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$. Expliqueu el significat de la matriu obtinguda.

Sabem que una entrada per a persones de menys de 18 anys costa 5 €, una entrada per a adults d'entre 18 i 65 anys costa 8,5 € i una entrada per a adults de més de 65 anys costa 6,5 €. Trobeu una matriu $\boldsymbol{C} = (a \quad b \quad c)$ de manera que el producte $\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ doni els ingressos setmanals totals obtinguts per la venda d'entrades, i calculeu els ingressos corresponents a aquesta setmana.

[1,5 punts]

b) Al cap d'uns mesos, el registre setmanal és donat per la matriu

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 84 & 23 \\ 338 & x \\ 256 & 408 \end{pmatrix},$$

però hi ha un valor que s'ha esborrat, el del nombre de persones entre 18 i 65 anys que han assistit a la segona pel·lícula, i l'hem denotat per x. Calculeu el valor de x sabent que els ingressos totals d'aquella setmana van ser de 12.076 €.

[1 punt]

5. PAU 2024 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4

4. Diem que una matriu és màgica si la suma dels elements de cada fila i de cada columna té com a resultat en tots els casos el mateix valor, que s'anomena *constant màgica*.

El Martí ha trobat una manera de crear matrius màgiques triant tres nombres qualssevol i multiplicant-los per les matrius següents:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ i } \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El Martí proposa als seus amics que cadascú construeixi la seva matriu màgica particular a partir del dia del seu aniversari, del mes del seu aniversari i de la seva edat.

a) Sabent que el Martí va néixer el 10 de març i que té 18 anys, calculeu $10 \cdot \boldsymbol{A} + 3 \cdot \boldsymbol{B} + 18 \cdot \boldsymbol{C}$. Comproveu que la matriu resultant és màgica i indiqueu quina és la seva constant màgica (el valor comú de la suma de les files i les columnes).
[1,25 punts]

b) El Martí ha calculat la matriu màgica del seu pare, que fa l'aniversari el 8 de setembre, i ha obtingut que la seva constant màgica és 153. Quina edat té el pare del Martí?
[1,25 punts]

6. PAU 2023 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 5

5. Considereu la matriu $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

a) Si anomenem $\boldsymbol{I}$ la matriu identitat d'ordre 2, trobeu el valor de a per al qual $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I}$.
[1 punt]

b) Per a $a = -1$, calculeu $\boldsymbol{A}^2$, $\boldsymbol{A}^3$ i $\boldsymbol{A}^4$. Feu servir els càlculs anteriors per a deduir el valor de $\boldsymbol{A}^{-1}$ i de $\boldsymbol{A}^{23}$.
[1,5 punts]

7. PAU 2023 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2

2. Un centre cívic ofereix cursos de francès de nivell principiant, intermedi i avançat. Els alumnes inscrits, si ho desitgen, tenen garantida una plaça per al curs següent. És per això que, abans d'acabar el curs, es fan les reserves de plaça per al curs vinent. De l'alumnat de nivell principiant, un 15 % vol repetir el mateix curs, un 50 % vol fer el curs intermedi i un 5 % vol passar directament al curs de nivell avançat. Pel que fa a l'alumnat de nivell intermedi, un 10 % vol repetir el curs i un 60 % vol fer el curs de nivell avançat. Finalment, de l'alumnat de nivell avançat, un 20 % vol repetir el curs. Cap alumne no demana reserva de plaça per a un curs de nivell inferior i la resta d'alumnes no volen continuar al centre el curs vinent. Aquest any hi ha hagut 100 alumnes matriculats de nivell principiant, 90 de nivell intermedi i 60 de nivell avançat.

a) Calculeu el nombre de places que cal reservar de cada nivell per al curs següent mitjançant un producte de matrius.
[1,25 punts]

***b*)** El mateix centre cívic ofereix dos horaris de ioga, un de matí i un de tarda. Per al proper curs, el 50 % dels alumnes que actualment fan ioga al matí volen continuar amb el mateix horari, mentre que un 30 % volen passar a l'horari de tarda. La resta d'alumnes de matí no continuaran. Pel que fa als alumnes que actualment fan ioga a la tarda, un 40 % volen passar a l'horari de matí i un 60 % volen continuar fent l'horari de tarda. Si sabem que per al curs següent cal reservar 49 places per a l'horari de matí i 51 places per a l'horari de tarda, quants alumnes hi ha matriculats actualment en cada horari?
[1,25 punts]

8. PAU 2023 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 5

5. Considereu les matrius $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, en què a i b són dos paràmetres reals.

***a*)** Trobeu els valors dels paràmetres a i b per als quals es compleix que $\boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.
[1,25 punts]

***b*)** Si $a = 1$ i $b = 1$, resoleu l'equació matricial $2\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} + \boldsymbol{B}$.
[1,25 punts]

9. PAU 2022 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 5

5. Considereu les matrius $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

***a*)** Calculeu per a quin valor de a les dues matrius commuten, és a dir, per a quin valor de a es compleix que $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$. Comproveu que per a aquest valor de a se satisfà que $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = 2 \cdot \boldsymbol{I}$, en què $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat d'ordre dos.
[1,25 punts]

***b*)** Per al valor de a trobat a l'apartat anterior, calculeu les matrius inverses de les matrius $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$. Podeu aplicar la relació $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = 2 \cdot \boldsymbol{I}$.
[1,25 punts]

10. PAU 2022 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 5

5. Considereu les matrius $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

***a*)** Trobeu per a quins valors de a és invertible la matriu obtinguda del resultat del producte $\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{A}$.
[1,5 punts]

***b*)** Si $a = 2$, trobeu la matriu $\boldsymbol{X}$ que satisfà l'equació matricial $\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}$, en què $\boldsymbol{I}$ denota la matriu identitat d'ordre 2.
[1 punt]

11. PAU 2022 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 3

3. Calculeu la matriu $\boldsymbol{X}$ que verifica $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$, sabent que

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \text{ i } \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}.$$

[2,5 punts]

12. PAU 2021 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 1

Qüestions			
	4		
	5		
	6		
Suma de notes parcials			
Qualificació final			

Etiqueta de l'alumne/a

Ubicació del tribunal .....

Número del tribunal .....

Etiqueta de qualificació

Etiqueta del corrector/a

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

1. La taula següent mostra els ingressos, en milers d'euros, d'una botiga que disposa de tres locals, durant els mesos de gener, febrer i març de 2020.

	Gener	*Febrer*	*Març*
Local 1	13,5	13,2	4,2
Local 2	11	12,5	3,8
Local 3	15	14	2,7

Hem recollit la informació anterior en la matriu $\boldsymbol{A}$, en què cada fila indica un local i cada columna el mes corresponent:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 13{,}5 & 13{,}2 & 4{,}2 \\ 11 & 12{,}5 & 3{,}8 \\ 15 & 14 & 2{,}7 \end{pmatrix}.$$

a) Considereu els vectors $\boldsymbol{v} = (1 \quad 1 \quad 1)$ i $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Feu les operacions $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{w}$. Interpreteu en cada cas el resultat obtingut.

[1,25 punts]

b) La matriu $\boldsymbol{B}$ recull els resultats del trimestre següent, és a dir, els ingressos corresponents als mesos d'abril, maig i juny de 2020:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \\ 4 & 11 & x \end{pmatrix}.$$

Desconeixem la dada corresponent al mes de juny del local 3, que hem denominat x, però sabem que el rang de la matriu $\boldsymbol{B}$ és 2. Trobeu el valor de x.

[1,25 punts]

13. PAU 2021 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 5

5. Considereu la matriu $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Trobeu l'expressió general de $\boldsymbol{A}^n$. Demostreu que la inversa de $\boldsymbol{A}^n$ és $\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
[1,25 punts]

b) Trobeu la matriu $\boldsymbol{X}$ que satisfà l'equació matricial $\boldsymbol{A}^{10} \cdot \boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}^{20} = \boldsymbol{A}$.
[1,25 punts]

14. PAU 2021 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 6

6. Considereu la matriu $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, en què a és un nombre real.

a) Calculeu $\boldsymbol{A}^2$, $\boldsymbol{A}^3$ i $\boldsymbol{A}^4$.
[1,25 punts]

b) Deduïu quant valdrà la matriu $\boldsymbol{A}^{100}$.
[1,25 punts]

Etiqueta de l’alumne/a

Institut d’Estudis Catalans

Qüestions	4		
	5		
	6		
Suma de notes parcials			
Qualificació final			

Etiqueta de l'alumne/a

Ubicació del tribunal .....

Número del tribunal .....

Etiqueta de qualificació

Etiqueta del corrector/a

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

1. Considerem la matriu $A = \begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix}$. Estudieu per a quins valors de x la matriu inversa de la matriu A coincideix amb la seva oposada, és a dir, $A^{-1} = -A$.

[2,5 punts]

16. PAU 2020 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 5

5. Considereu les matrius $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Comproveu que es compleix que $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^2$.
[1,25 punts]

b) Resoleu l'equació matricial $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$, en què $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat d'ordre 2.
[1,25 punts]

17. PAU 2020 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 1

1. La taula següent reflecteix el preu unitari, expressat en euros, de tres productes P_1, P_2 i P_3, subministrats a un restaurant per dues empreses diferents E_1 i E_2:

	E_1	E_2
P_1	6	5
P_2	5	8
P_3	9	7

El restaurant haurà de fer dues comandes: una aquesta setmana i una altra la setmana que ve. Aquesta setmana necessita 8 unitats del producte P_1, 5 unitats del producte P_2 i 12 unitats del producte P_3; mentre que per a la setmana vinent necessitarà 10 unitats del producte P_1, 15 unitats del producte P_2 i 7 unitats del producte P_3.

a) Escriviu en forma matricial la informació que relaciona el preu unitari dels productes i les empreses subministradores, i també la informació de les quantitats de productes demanats en cada una de les dues comandes que ha de fer el restaurant.
[1,25 punts]

b) Calculeu a quina de les dues empreses ha d'encarregar el restaurant cada una de les comandes perquè li surti més econòmica i a quin preu li sortirà cadascuna.
[1,25 punts]

18. PAU 2019 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 1

1. Volem enviar una data codificada. Per a fer-ho, considerem el vector de tres components $\boldsymbol{X} = (d\ m\ a)$, en el qual d expressa el dia, m el mes i a l'any. Tot seguit, fem l'operació $\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$, en què $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ són les matrius

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ i } \boldsymbol{B} = (5\ \ -5\ \ 5).$$

El resultat d'aquesta operació és el vector codificat que enviem.

a) Si la data que volem enviar és l'1 de gener de 2019, és a dir, si $X = (1\ \ 1\ \ 2019)$, quin és el vector codificat que enviarem? [0,75 punts]

b) Si el vector codificat que ens ha arribat és $(2036\ \ 1\ \ -13)$, quina és la data sense codificar? [1,25 punts]

19. PAU 2019 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2

2. Resoleu les qüestions següents:

a) Considereu la matriu $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculeu els valors de a i b per tal que es verifiqui la igualtat $\boldsymbol{M}^2 + a \cdot \boldsymbol{M} + b \cdot \boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$, en què $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat $\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{0}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és la matriu nul·la.

[1 punt]

b) Considereu la matriu $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Trobeu totes les matrius $\boldsymbol{B}$ que commuten amb la matriu $\boldsymbol{A}$, és a dir, que compleixen que $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$.

[1 punt]

20. PAU 2019 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 6

6. En una oficina tenen tres proveïdors que els subministren el material. La matriu $\boldsymbol{P}$ ens dona els preus unitaris, en euros, de cada un dels articles $A1$, $A2$ i $A3$, segons els proveïdors $p1$, $p2$ i $p3$.

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 11 & 12 & 13 \\ 13 & 13 & 12 \end{pmatrix}$$

Representem una comanda de x unitats de $A1$, y unitats de $A2$ i z unitats de $A3$ per un vector fila $C = (x\ y\ z)$.

a) Expliqueu què representen cadascun dels elements del vector que resulta de multiplicar $C \cdot P$.

[0,5 punts]

b) Si hem de comprar 25 unitats de $A1$, 10 de $A2$ i 15 de $A3$, quin dels tres proveïdors ens ofereix un millor preu per a tota la comanda? Quin és aquest preu?

[1,5 punts]

Institut d'Estudis Catalans

21. PAU 2018 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 5

5. Resoleu les preguntes següents:

a) Trobeu les matrius $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ que compleixen que $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ i $2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$.

[1 punt]

b) Determineu el valor de a, b, c i d perquè es verifiqui que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & c \\ 2 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b & -5 \\ d & -7 \end{pmatrix}$.

[1 punt]

22. PAU 2018 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

1. Considereu les matrius M de la forma $M = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, en què a és un nombre real.

a) Determineu a de manera que $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -2a & -1 \end{pmatrix}$.
[1 punt]

b) Determineu a de manera que $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, en què M^{-1} representa la matriu inversa de M. És a dir, $M \cdot M^{-1} = I$, en què I és la matriu identitat d'ordre 2.
[1 punt]

23. PAU 2018 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 5

5. Un fabricant d'automòbils produeix els models Record i Astrid. Desa la producció en tres naus. A la primera nau té 150 vehicles del model Record i 120 vehicles del model Astrid. A la segona guarda 80 Record i 140 Astrid. Finalment, a la tercera nau emmagatzema 250 Record i 125 Astrid. A més, el preu dels automòbils Record és de 6.520 €, mentre que cada Astrid val 8.130 €. Tota aquesta informació està recollida en les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 150 & 120 \\ 80 & 140 \\ 250 & 125 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 6.520 \\ 8.130 \end{pmatrix} \text{ i } \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Què representa la matriu $B \cdot A$? Calculeu-la.
[1 punt]

b) Què representa la matriu $B \cdot A \cdot P$? Calculeu-la.
[1 punt]

24. PAU 2017 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 5

5. Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Comproveu que $A^3 - I = 0$, en què I és la matriu identitat d'ordre 2.
[1 punt]

b) Calculeu A^{11} utilitzant la informació de l'apartat *a*.
[1 punt]

25. PAU 2017 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3

3. Considereu les matrius $A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 5 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ i $C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ m & n\end{pmatrix}$, en què m i n són dos nombres reals.

a) Comproveu que es compleix la igualtat $(A-B)\cdot(A+B)=A^2-B^2$.
[1 punt]

b) Determineu m i n de manera que les matrius B i C commutin, és a dir, $B\cdot C=C\cdot B$.
[1 punt]

26. PAU 2017 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 6

6. Considereu les matrius $A=\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Calculeu el valor del paràmetre a per al qual es compleix que $A\cdot B=B\cdot A$.
[1 punt]

b) Per al valor $a=2$, trobeu una matriu X tal que $A\cdot X\cdot A=B$.
[1 punt]

27. PAU 2016 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 6

6. Considereu les matrius $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

a) Calculeu les matrius $A\cdot B$ i $B\cdot A$.
[1,5 punts]

b) Justifiqueu si en algun cas és possible calcular P^2 quan P és una matriu no quadrada.
[0,5 punts]

Institut d'Estudis Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

28. PAU 2015 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 5

5. Trobeu les matrius A i B sabent que $A-2B=\begin{pmatrix}0 & -3\\ -3 & 4\end{pmatrix}$ i que $2A+3B=\begin{pmatrix}7 & 15\\ 8 & -6\end{pmatrix}$.
[2 punts]

29. PAU 2015 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 4

4. Siguin les matrius $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 2 & -a\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}b & c\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

a) Calculeu les matrius $A+B$ i $A\cdot B$.
[1 punt]

b) Determineu els valors de a, b i c que compleixen que $A+B=A\cdot B$.
[1 punt]

30. PAU 2015 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 4

4. Donades les matrius $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, calculeu la matriu X que compleix $X \cdot A + B^2 = 2 \cdot I_2$, on $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és la matriu identitat d'ordre 2.
[2 punts]

31. PAU 2014 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 4

4. Siguin les matrius $A=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ i $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, determineu x per tal que es verifiqui l'equació $A^2 - 6A + 5I = \mathbf{0}$, on $\mathbf{0}$ és la matriu en què tots els elements són 0.

32. PAU 2014 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 3

3. Siguin les matrius $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ i $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determineu una matriu X que verifiqui $A \cdot X = I$.
[1 punt]

b) Determineu una matriu Y que verifiqui $A \cdot Y \cdot A = B$.
[1 punt]

33. PAU 2013 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 4

4. Siguin les matrius $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix} -2 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Resoleu l'equació matricial $X + 2A = X \cdot A$, on X és la matriu incògnita.
[1 punt]

b) Hi ha cap matriu Y que verifiqui $Y \cdot A = B$? I que verifiqui $A \cdot Y = B$? Justifiqueu les respostes.
[1 punt]

34. PAU 2013 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 3

3. Sigui la matriu $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculeu A^2, A^3 i A^4.
[1 punt]

b) Calculeu A^{201} i A^{344}.
[1 punt]

35. PAU 2013 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 2

2. Siguin les matrius

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & a\\ -2 & 0\end{pmatrix} \text{ i } \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ b & -1\end{pmatrix}.$$

a) Determineu el valor dels paràmetres a i b que fa que $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$.
[1 punt]

b) Determineu el valor de a per al qual es verifica $\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A}$.
[1 punt]

36. PAU 2012 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 6

6. Considerem les matrius $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

a) Trobeu una matriu $\boldsymbol{X}$ que compleixi que $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}$.
[1 punt]

b) Calculeu $\boldsymbol{C}^3$.
[1 punt]

37. PAU 2012 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 6

6. Siguin les matrius $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & -8\end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}8 & 3\\ 4 & -1\end{pmatrix}$.

a) Determineu les matrius $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{Y}$ que compleixin que $\boldsymbol{X}-2\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}$ i $2\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{B}$.
[1 punt]

b) Calculeu $(\boldsymbol{A}+2\cdot\boldsymbol{Id})^2$, on $\boldsymbol{Id}$ és la matriu identitat.
[1 punt]

38. PAU 2012 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 3

3. Considerem les matrius $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ -1 & 0 & 4\end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 5\end{pmatrix}$.

a) Justifiqueu si és possible efectuar $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ o $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$. En cas afirmatiu, calculeu-ho.
[1 punt]

b) Calculeu $\boldsymbol{B}^2$ i $\boldsymbol{B}^3$.
[1 punt]

39. PAU 2011 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 5

5. Considereu la matriu $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ -3 & 1 & -2\end{pmatrix}$.

a) Una matriu $\boldsymbol{B}$, la primera fila de la qual és $(2, 1)$, té dues columnes i compleix que $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. Completeu-la.

[1 punt]

b) Calculeu $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^{-1}$.

[1 punt]

40. PAU 2011 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4

4. Considereu la matriu $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

a) Una matriu $\boldsymbol{B}$, la primera fila de la qual és $(1, 0)$, té dues columnes i compleix que $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 3 & -5\end{pmatrix}$. Completeu-la.

[1 punt]

b) Feu els càlculs pertinents per a comprovar que $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^{t}=\boldsymbol{B}^{t}\cdot\boldsymbol{A}^{t}$.

[1 punt]

41. PAU 2011 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 3

3. Considereu les matrius $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

a) Calculeu les matrius inverses de $\boldsymbol{A}$ i de $\boldsymbol{B}$.

[1 punt]

b) Determineu una matriu $\boldsymbol{X}$ de manera que $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

[1 punt]

42. PAU 2010 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 5

5. Considereu les matrius següents:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 5 & -4\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

a) Determineu la matriu X perquè $X + BC = A^2$.

[1 punt]

b) Calculeu les matrius C^6 i C^7.

[1 punt]

43. PAU 2010 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 5

5. Considereu les matrius següents:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Comproveu si aquestes dues matrius compleixen $(A + B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$.
[1 punt]

b) Si P i Q són matrius quadrades qualssevol d'ordre 3, quina condició s'ha de produir perquè es compleixi $(P + Q)^2 = P^2 + 2P \cdot Q + Q^2$?
[1 punt]

44. PAU 2010 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 6

6. Donades les matrius següents:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calculeu A^{-1} i B^{-1}.
[1 punt]

b) Determineu X perquè es compleixi l'equació $A \cdot X \cdot B = 2C$.
[1 punt]

45. PAU 2008 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 2

2. Donades les matrius següents:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ i } B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Calculeu $A^2 + 2AB + B^2$.
[1 punt]

b) Calculeu $(A + B)^2$.
[1 punt]

46. PAU 2006 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 4

4. Indiqueu TOTS els productes de dues matrius diferents que es poden fer amb les matrius següents:

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}, \quad D=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad E=\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}.$$

Puntuació total: 2 punts.

47. PAU 2006 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2

2. Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, esbrineu si existeix una matriu C que compleixi $B \cdot C = A$, i si s'escau, calculeu-la.

Puntuació total: 2 punts.

48. PAU 2005 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 1

1. Un magatzem de rodes de vehicles de diferents tipus té l'estoc de components (en centenars d'unitats) donat per la taula següent:

	Pneumàtics	Embellidors	Llantes
Utilitaris	3,1	0,3	2,1
Berlines	1,6	1,1	0,6
Tot terrenys	0,9	0	0,2

La quantitat de quilos de primera matèria necessària per a cada component és:

	Acer	Cautxú
Pneumàtics	0,1	4,6
Embellidors	1	0,05
Llantes	5	0

a) Calculeu el total d'acer acumulat en el magatzem.
b) Calculeu el total de cautxú acumulat en el magatzem.

Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. Total: 2 punts.

49. PAU 2005 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 2

2. Siguin les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Trobeu la matriu $X = A \cdot (B - C)$.

Puntuació: total 2 punts.

50. PAU 2005 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2

2. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculeu A^{55}.

Puntuació: total 2 punts. Les respostes sense raonar no puntuen.