Matemàtiques aplicades a les ciències social

Matemàtica financera i percentatges (temari anterior)

Solucions · 19 exercicis

Proves d'accés a la universitat (PAU) de Catalunya. Ordenats del més recent al més antic.
Retalls dels exàmens i pautes oficials (selecat.cat / universitats.gencat.cat).

1. PAU 2023 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 6

6.

a) Amb l'oferta 4×3 el cost de quatre ampolles d'aigua és

$0{,}70 \cdot 3 = 2{,}10$ euros.

Per calcular el preu amb el descompte del 20% comencem calculant el preu normal sense descompte de 4 ampolles

$0{,}70 \cdot 4 = 2{,}80$ euros

I ara restem al resultat un 20%

$2{,}80$ euros $- 0{,}20 \cdot 2{,}80$ euros $= 2{,}24$ euros

Per tant, aquesta setmana li costaran 2,10 euros i la setmana vinent 2,24 euros.

Anomenem ara x el percentatge de descompte que cal aplicar al total de 2,80 euros per tal d'obtenir 2,10 euros. L'equació que modelitza aquesta situació és la següent:

$$2{,}80 \text{ euros} - 2{,}80 \cdot \frac{x}{100} \text{ euros} = 2{,}10 \text{ euros}$$

$$2{,}80 \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right) = 2{,}10$$

$$1 - \frac{x}{100} = \frac{3}{4}$$

$$x = 25$$

Per tant, caldria aplicar un descompte del 25% per igualar l'oferta 4×3.

b) Per saber el descompte que caldria aplicar per igualar una oferta $m \times (m-1)$ igualem el cost d'ambdues promocions per obtenir el percentatge demanat:

$$0{,}70 \cdot m - 0{,}70 \cdot m \cdot \frac{x}{100} = 0{,}70 \cdot (m-1)$$

$$0{,}70 \cdot m \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right) = 0{,}70 \cdot m - 0{,}70$$

$$-0{,}70 \cdot m \cdot \frac{x}{100} = -0{,}70$$

Aïllant la x obtenim $x = \frac{100}{m}$ que és el percentatge que buscàvem.

Criteris de correcció:

a) Càlcul del preu amb l'oferta 4×3: 0,25 punts. Càlcul del preu amb l'oferta del 20%: 0,25 punts. Plantejament de l'equació per a trobar el percentatge: 0,5 punts. Resolució de l'equació i trobar el percentatge que iguala l'oferta: 0,5 punts.

b) Plantejament de la nova equació: 0,5 punts. Resolució: 0,5 punts.

2. PAU 2017 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 3

4. L'any 2008 la nòmina d'un treballador era de 1000 euros. L'any 2009, l'empresa on treballava va decidir rebaixar-li la nòmina en un 10%. L'any 2010, amb la intenció de recuperar la situació econòmica del treballador, l'empresa va decidir incrementar-li la nòmina en un 10%.
   a. Calculeu la nòmina del treballador que va resultar de la baixada del 10% de l'any 2009. *[0,5 punts]*
   b. Calculeu la nòmina del treballador que va resultar de la pujada del 10% de l'any 2010. *[0,5 punts]*
   c. Si una nòmina de 1.000 euros ha patit una rebaixa d'un 10%, quin increment s'ha d'aplicar a la nova nòmina per recuperar el sou de 1000 euros? *[1 punt]*

a) Calculem la nòmina del treballador que va resultar de la baixada del 10% de l'any 2009.

$$1000 - \frac{10}{100} \cdot 1000 = 900 \text{ euros}$$

b) Calculem la nòmina del treballador que va resultar de la pujada del 10% de l'any 2010.

$$900 + \frac{10}{100} \cdot 900 = 990 \text{ euros}$$

c) Si una nòmina de 1000 euros pateix una rebaixa d'un 10%, tindrem una nova nòmina de 900 euros. Si ara l'incrementem en un y % tindrem

$$900 + \frac{y}{100} \cdot 900$$

Imposem ara que aquest valor sigui 1000 i aïllem y

$$900 + \frac{y}{100} \cdot 900 = 1000$$

$$9\,y = 100$$

$$y = \frac{100}{9}.$$

Per tant, si una nòmina de 1000 euros pateix una rebaixa d'un 10% cal un increment del $\frac{100}{9}$ %, és a dir d'un 11,11%, per recuperar la nòmina de 1000 euros.

Criteris de correcció: a) Càlcul del nou valor de la nòmina: 0,5 p. b) Càlcul del nou valor de la nòmina: 0,5 p. c) Plantejament del problema: 0,5 p. Resolució: 0,5 p.

3. PAU 2013 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 3

3. Els dos darrers anys, el valor de les accions en Borsa d'una empresa ha baixat un 20% anual.
   a. Aquest any, en canvi, les accions han pujat un 30%. Quin és el percentatge global de pèrdua en aquests tres anys? *[1 punt]*
   b. Quin hauria de ser el percentatge de guanys d'aquest tercer any si el balanç global dels tres anys acaba sent equilibrat, és a dir, sense pèrdues ni guanys? *[1 punt]*

a. Suposem que una acció té un valor de C euros a l'inici del període. Aleshores el valor de l'acció serà:

- en acabar el primer any: 0,8 C.
- en acabar el segon any: $0{,}8^2\,C = 0{,}64C$.
- en acabar el tercer any: $1{,}3 \cdot 0{,}64C = 0{,}832C$.

Per tant, el balanç final ha estat de $1 - 0{,}832 = 0{,}168$. S'han produït unes pèrdues globals del 16,8%.

Criteris de correcció: 0,5 p. pels càlculs al final de cada any. 0,5 p. pel percentatge final.

b. El valor final ha de ser igual al valor inicial. Per tant, ha de ser $C = 0{,}64 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right) C$ d'on obtenim x = 56,25%.

Criteris de correcció: 0,75 punts pel plantejament, 0,25 p. pel càlcul.

4. PAU 2003 · Setembre · Sèrie única · Exercici 1

QÜESTIONS

1. Es van imposar 6000 € ara fa 3 anys i s'han recuperat 6652,31 €. Determineu la taxa anual equivalent (TAE).

Solució:

Els 6000 € a un interès anual equivalent r, esdevenen en 3 anys 6652,31 €. Per tant $6000 \cdot (1+r)^3 = 6652{,}31$. Aïllant r obtenim

$$r = \sqrt[3]{\frac{6652{,}31}{6000}} - 1 = 0{,}035000 = 3{,}5\%$$

que és la TAE demanada.

Puntuació: 2 punts.

5. PAU 2003 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 2

2. Una entitat financera ofereix un pla de jubilació que garanteix un 40% d'interès en 10 anys. Determineu la taxa anual equivalent (TAE) que garanteix.

Solució:

Al cap de 10 anys, una unitat monetària a un interès anual equivalent r s'haurà convertit en $(1+r)^{10}$. Com que el capital garantit augmenta en un 40%, el valor anterior ha de ser igual a 1,40. Per tant, la taxa anual equivalent és:

$$\boxed{r=\sqrt[10]{1,4}-1=0,03422=3,42\%}$$

Puntuació: 2 punts.

6. PAU 2003 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 5

10. Hem demanat un préstec de 1000 € a retornar en 2 anys a un interès del 8 % nominal (s'entén compost i anual). El crèdit es retorna pagant quotes mensuals iguals al finalitzar cada mes. Una part de la quota mensual serveix per anar amortitzant el deute i l'altra correspon als interessos que ha generat aquest deute. La part de la quota mensual que correspon als interessos s'obté aplicant el tipus d'interès al capital pendent abans de pagar la quota i la resta serveix per a amortitzar el deute.

d) Quina quota fixa mensual haurem de pagar per eixugar el préstec?
e) Quina quantitat del deute hem amortitzat amb la primera quota?
f) Quin capital ens queda pendent d'amortitzar després d'haver abonat la segona quota?

Puntuació: apartats a) i c): 1.5 punts cadascun; apartat b): 1 punt.Total: 4 punts.

Solució:

a) Fixem la data focal al final dels dos anys. El capital de 1000 € a un interès del 8% mensual acumulat haurà esdevingut en 12 mesos $1000\cdot\left(1+\frac{0,08}{12}\right)^{24}$ €. La primera quota a abonada al final del primer mes haurà esdevingut $a\left(1+\frac{0,08}{12}\right)^{23}$ € i les restants tindran la mateixa expressió amb exponents decreixents fins a la darreara quota que s'abona al final, i té el valor a. Per tant, les quotes valorades a la data focal formen una progressió aritmètica de raó $1+\frac{0,08}{12}$ que hem de sumar. Aquesta suma és $a\frac{\left(1+\frac{0,08}{12}\right)^{24}-1}{\frac{0,08}{12}}$. Resulta doncs

$$1000\cdot\left(1+\frac{0,08}{12}\right)^{24}=a\frac{\left(1+\frac{0,08}{12}\right)^{24}-1}{\frac{0,08}{12}}$$

d'on obtenim la quota

$$a=1000\frac{0,08}{12}\frac{\left(1+\frac{0,08}{12}\right)^{24}}{\left(1+\frac{0,08}{12}\right)^{24}-1}=45,23\ €.$$

b) Fem la taula mes per mes dels valors del capital abans d'abonar la quota, els interessos devengats, la quota abonada, el capital amortitzat i el capital pendent:

Mes	Capital inicial	Interessos devengats	Quota Abonada	Capital Amortitzat	Capital pendent
1	1000	$1000\frac{0,08}{12}=6,67$	45,23	$45,23-6,67=38,56$	$1000-38,56=961,44$
2	961,44	6,41	45,23	38,22	922,62

Per tant, el capital amortitzat després d'abonada la primera quota és de 38,56 €.

c) A partir de la taula anterior obtenim el capital pendent després d'abonar la segona quota que és de 922,44 €.

7. PAU 2002 · Setembre · Sèrie única · Exercici 4

4. En començar l'any 2001, el nombre de refugiats sota l'empara de l'ACNUR (organisme de l'ONU) era de 12,10 milions.

a) Durant l'any 2000 el nombre de refugiats va augmentar un 4%. Quants n'hi havia en començar l'any 2000?

b) Durant l'any 2001 el nombre de refugiats va augmentar un 10%. Quants n'hi havia al final del 2001?

c) Suposant que a partir del 2002 hi haurà una disminució del 10% anual, en quin any hi arribarà a haver menys d'un milió de refugiats?

Puntuació: Apartats a) i b): 0,5 punts cadascun. Apartat c): 1 punt. Total: 2 punts.

Solució:

a) En començar l'any 2000 n'hi havia: $\frac{12,1}{1,04} = \boxed{11,63}$ milions.

b) A finals de 2001 n'hi havia: $12,1 \cdot 1,10 = \boxed{13,31}$ milions.

c) Sigui t el nombre d'anys comptats a partir de l'inici de 2002. Seguint la hipòtesi, el nombre de refugiats en funció de t ha de ser menor que 1. En fórmula:

$$13,31 \cdot (0.9)^t < 1$$

O sigui:

$$(0.9)^t < \frac{1}{13,31}.$$

Prenent logaritmes resulta:

$$t \cdot \log 0,9 < -\log 13,31$$

d'on finalment:

$$t > -\frac{\log 13,31}{\log 0,9} = 24,57$$

és a dir, que hi haurà menys d'un milió d'habitants en arribar a la data de $\boxed{2026,57}$, és a dir, durant l'any 2026, o més precisament cap a mitjans de 2026.

Nota: Per cada error en un apartat que correspongui a un còmput equivocat de l'inici o de la fi del període es restaran 0,26 punts. Calcular el valor de t però oblidar-se d'obtenir la data final explícita en l'apartat c) restarà 0,26 punts. Acceptem com a correcte la resposta 2026 o 2027. Arrodoniu la nota final resultant a mig punt.

8. PAU 2002 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 4

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

9. PAU 2002 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 3

3. En les rebaixes d'estiu una botiga anuncia que tots els articles estan rebaixats un 20%.
   a) Si un article rebaixat ens ha costat 40 €, quant costava abans de les rebaixes?
   b) Acabades les rebaixes el botiguer pensa que, apujant el preu de tots els productes un 20%, tornarà al preu d'abans de les rebaixes. Creieu que és així? Quina variació percentual es produeix disminuint el 20% el preu original i després augmentant un 20% el preu rebaixat?
   c) Quin ha de ser l'augment de preu que hauria d'aplicar als productes rebaixats per tornar al preu d'abans de les rebaixes?

Puntuació: Apartats a) i c) : 0,5 punts cadascun. Apartat b): 1 punt. Total: 2 punts.

Solució:

a) El preu abans de la rebaixa era de $\frac{40}{0,8} = 50€$.

b) No serà igual, ja que el percentatge del nou preu sobre el preu inicial serà $0,8 \cdot 1,2 = 0,96 = 96\%$, i per tant hi haurà una $\boxed{\text{rebaixa del } 4\%}$.

c) Per tal que el nou preu sigui idèntic al preu d'abans de les rebaixes, cal aplicar un augment r tal que $0,8(1+r) = 1$, d'on resulta $\boxed{r = 0,25 = 25\%}$.

10. PAU 2002 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 4

4. Quants anys han de passar perquè un capital de 5000 € posat a un interès compost del 2,5% anual es converteixi en un capital final de 6092 €?

Puntuació: Plantejament: 1 punt. Determinació del temps: 1 punt. Total: 2 punts.

Solució: El plantejament és:

$$5000 \cdot (1,025)^t = 6092$$

$$(1,025)^t = \frac{6092}{5000} = 1,2184$$

Prenent logaritmes obtenim:

$$t = \frac{\log 1,2184}{\log 1,025} = 7,9999 \approx 8$$

resultant

$$t = 7,9999 \approx 8$$

Ha d'estar $\boxed{8 \text{ anys}}$.

Nota: S'acceptarà com a bona una solució obtinguda per tempteig, sense utilitzar logaritmes, sempre que el resultat sigui correcte i els càlculs estiguin explicitats.

11. PAU 2001 · Setembre · Sèrie única · Exercici 1 (Qüestions)

Qüestions

1. Abonats 4 milions resten per pagar 8 milions. A un interès compost de l'11% , en tres anys es converteixen en

$$8 \cdot (1,11)^3 = 10.941.048 \text{ ptes.} \qquad [2 \text{ punts}]$$

12. PAU 2001 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 1 (Qüestions)

1. El capital inicial C es converteix en:

$$C \cdot (1,09)^2 \cdot \left(1 + \frac{0,05}{2}\right)^6 = 796.084$$

d'on $\boxed{C = 577.780}$ ptes .

Nota pels correctors: La interpretació habitual del tant per cent semestral correspon a l'interès nominal anual, amb abonament semestral d'interessos. No obstant, algú ho pot interpretar com l'interès que s'abona cada semestre. Amb aquesta interpretació el plantejament seria $C \cdot (1,09)^2 \cdot (1,05)^6 = 796.084$, i el resultat $C = 500.000$ ptes. S'acceptaran com a vàlides les dues interpretacions, sense descomptar punts per la segona. [2 punts]

13. PAU 2001 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 4 (Qüestions)

4. Si la TAE és del 5%, l'interés anual nominal per un abonament mensual d'interessos és:

$$1,05 = \left(1 + \frac{r_m}{12}\right)^{12}$$

d'on $$r_m = 12\left(\sqrt[12]{1,05} - 1\right) = 0,048889484 = 4,89\%$$

Per tant, el primer anunci és correcte, mentre que el segon anunci és incorrecte, ja que si l'abonament d'interessos és trimestral i la TAE és també del 5%, l'interés nominal anual hauria de ser un xic superior a l'anterior. El càlcul explícit de l'interés nominal anual pel cas del segon anunci, si la TAE és del 5% és:

$$r_s = 4\left(\sqrt[4]{1,05} - 1\right) = 0,049088937 = 4,90\%$$

si be no s'exigeix que s'avalui.

Nota pels correctors: Avalueu 1 punt per cada cas. En el segon apartat n'hi ha prou amb un raonament sense fer els càlculs explícits. [2 punts]

14. PAU 2001 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 1 (Qüestions)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

15. PAU 2000 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 1 (Qüestions)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

16. PAU 2000 · Setembre · Sèrie 6 · Exercici 4 (Qüestions)

4. Les 20 000 pessetes representen un 2% del milió de pessetes del préstec. Si es considera $1 + i_t = 1,02$ i i_a és l'interès anual equivalent (en tant per u), s'ha de complir

$$1 + i_a = (1 + i_t)^4 = (1,02)^4 = 1,08243$$

Per tant l'interès anual equivalent és del 8,24%.

17. PAU 2000 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2 (Qüestions)

2. a) A interès simple ens donaran 24.000 pessetes l'any d'interès i per tant 240.000 en 10 anys. En acabar els 10 anys tindrem doncs 540.000 pessetes.

   b) A interès compost tindrem

$$C = 300.000(1 + \frac{7}{100})^{10} = 590.145$$

   pessetes. Hem arrodonit el resultat a pessetes.

Per tant és més beneficiós aquest procediment. a diferència entre els capitals acumulats per als dos procediments és de $590.145 - 540.000 = 50.145$ pessetes.

No tingueu en compte els possibles errors derivats d'un arrodoniment no gaire bo de $1,07^{10}$. Compteu 1 punt pels correctes resultats de cada un dels dos procediments financers (interès simple i compost).

18. PAU 2000 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 2 (Problemes)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

19. PAU 2000 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 4 (Qüestions)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.