Matemàtiques aplicades a les ciències social

Geometria analítica del pla (temari anterior)

Solucions · 21 exercicis

Proves d'accés a la universitat (PAU) de Catalunya. Ordenats del més recent al més antic.
Retalls dels exàmens i pautes oficials (selecat.cat / universitats.gencat.cat).

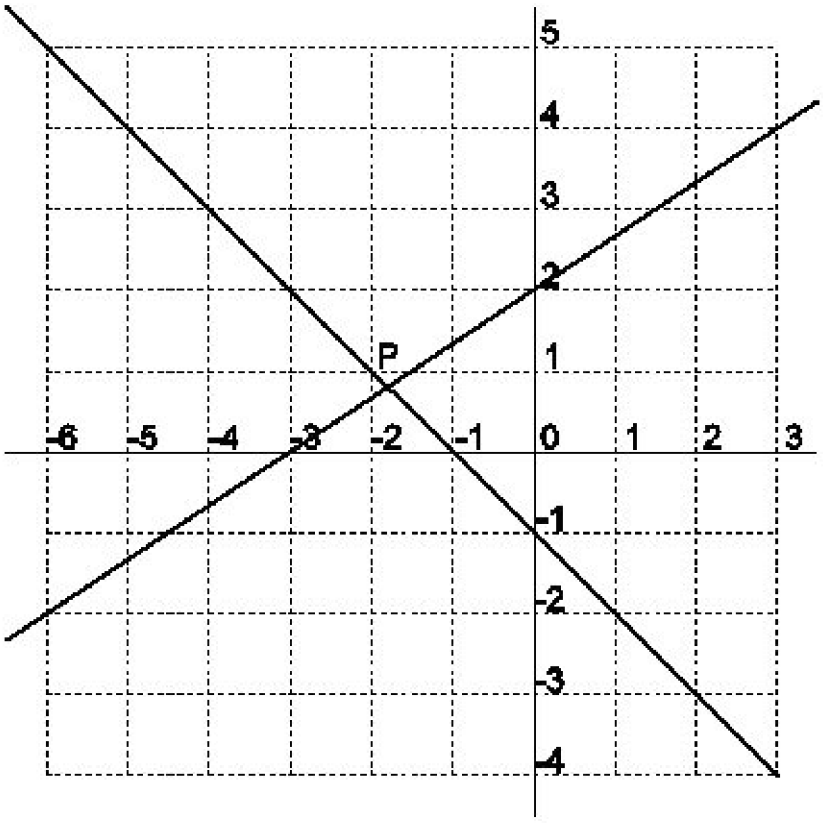
1. PAU 2008 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 1

QÜESTIONS

1. Cadascuna de les rectes del gràfic passa per almenys dos punts de coordenades enteres.

a) Trobeu les equacions de les dues rectes. [1 punt]

b) Trobeu el punt d'intersecció P. [1 punt]



Solució: a) Una recta passa pel punt $(0,2)$ i té pendent $\frac{2}{3}$. Per tant la seva equació és: $\boxed{y=\frac{2}{3}x+2}$. L'altra passa pel punt $(0,-1)$ i té pendent -1. La seva equació és: $\boxed{y=-x-1}$.

b) El punt d'intersecció s'obté resolent el sistema format per les equacions de les dues rectes:

$$\begin{cases} -2x + 3y = 6 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

que té per solució: $x=-\frac{9}{5}$, $y=\frac{4}{5}$. Per tant, $\boxed{P=\left(-\frac{9}{5},\frac{4}{5}\right)}$.

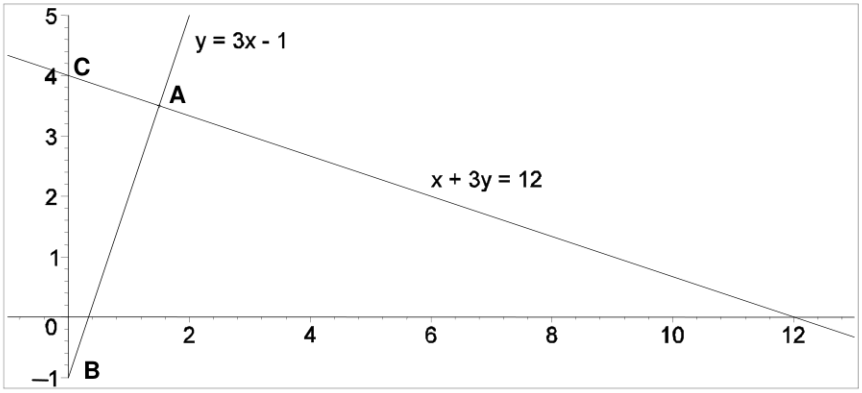
2. PAU 2003 · Setembre · Sèrie única · Exercici 6

6.

a) Dibuixeu el gràfic de les rectes $3x-y-1=0$ i $x+3y-12=0$.
b) Demostreu que les dues rectes anteriors són perpendiculars.
c) Calculeu el punt d'intersecció de les dues rectes.
d) Considereu el triangle format per les dues rectes anteriors i per l'eix d'ordenades. Calculeu-ne l'àrea.

Solució:

a) Fem el gràfic. La recta $3x-y-1=0$ talla els eixos en els punts $(0,-1)$ i $\left(\frac{1}{3},0\right)$. La recta $x+3y=12$ talla els eixos en els punts $(12,0)$ i $(0,4)$.



b) Els vectors perpendiculars a la primera i segona rectes són $(3,-1)$ i $(1,3)$. Fem el producte escalar i tenim $\boxed{3\cdot 1+(-1)\cdot 3=0}$, i per tant són perpendiculars.

c) La intersecció l'obtenim resolent el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} 3x-y & = & 1 \\ x+3y & = & 12 \end{array}\right\}$$

que dóna com a resultat el punt $\boxed{\left(\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right)}$.

d) El triangle *ABC* té base *CB* = $4-(-1)=5$ i altura sobre *A* de longitud $\frac{3}{2}$ (abscissa de *A*). Per tant, la seva superfície és: $\boxed{S=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{3}{2}=\frac{15}{4}=3,75}$.

Puntuació de cada apartat 1 punt. Total: 4 punts.

3. PAU 2003 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 4

4. Expliqueu quina condició han de verificar A i B si les rectes d'equacions

$$Ax+By+C=0 \quad \text{i} \quad \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}$$

a) són paral·leles;
b) són perpendiculars.

Solució:

a) Si les rectes són paral·leles, el vector perpendicular a la primera recta (A,B) ha de ser perpendicular al vector director de la segona $(2,3)$. Per tant la condició és $2A+3B=0$.
b) Si les rectes han de ser perpendiculars, el vector director de la primera recta $(-B,A)$ ha de ser perpendicular al vector director de la segona $(2,3)$. Per tant la condició és $-2B+3A=0$.

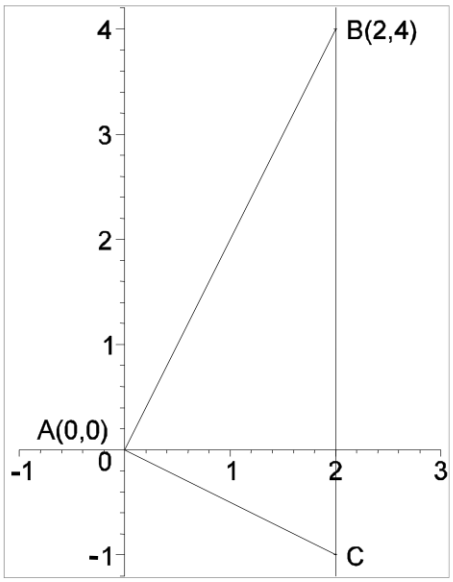
Puntuació de cada apartat, 1 punt. Total: 2 punts.

4. PAU 2003 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 6

6. Un triangle rectangle té el vèrtex A, corresponent a l'angle recte, a l'origen de coordenades. Un altre dels seus vèrtexs és el punt $B(2,4)$ i la hipotenusa té per equació la recta $x=2$. Calculeu

a) les equacions dels costats AB i AC;
b) el tercer vèrtex C;
c) l'àrea del triangle.

Solució:



a) La recta AB té per equació $y=2x$. La recta AC és perpendicular a l'anterior i passa també pel punt $A(0,0)$. Per tant tindrà pendent $-\frac{1}{2}$ i la seva equació serà $y=-\frac{1}{2}x$.

b) El tercer vèrtex C és la intersecció de les dues rectes $y=-\frac{1}{2}x$ i $x=2$, per tant és el punt $\boxed{C(2,-1)}$.

c) La hipotenusa del triangle és vertical i per tant, la seva longitud és $y_B-y_C=4-(-1)=5$. L'altura sobre la hipotenusa és simplement $x_C=x_B=2$. Per tant l'àrea del triangle és $S=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 5=5$.

Puntuació: apartat a) 2 punts, apartats b) i c) 1 punt cadascun. Total: 4 punts.

5. PAU 2003 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 3

8. Considereu els punts del pla $A(2,-1)$ i $B(0,3)$ i la recta r d'equació $x+y-2=0$. Calculeu les coordenades d'un punt C de r que estigui alineat amb A i B.

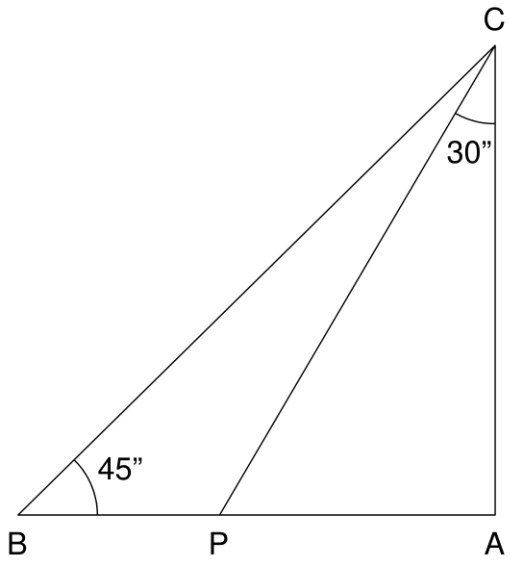
Puntuació: 2 punts.

Solució:

La recta AB té per equació $y+1=-2(x-2)$. Hem de trobar la intersecció amb la recta $x+y-2=0$. Resolent el sistema obtenim el punt $\boxed{C(1,1)}$.

6. PAU 2003 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 4

9. Calculeu el perímetre del triangle rectangle ABC, sabent que la longitud del segment CP és $2\sqrt{3}$.



Puntuació: 2 punts.

Solució:

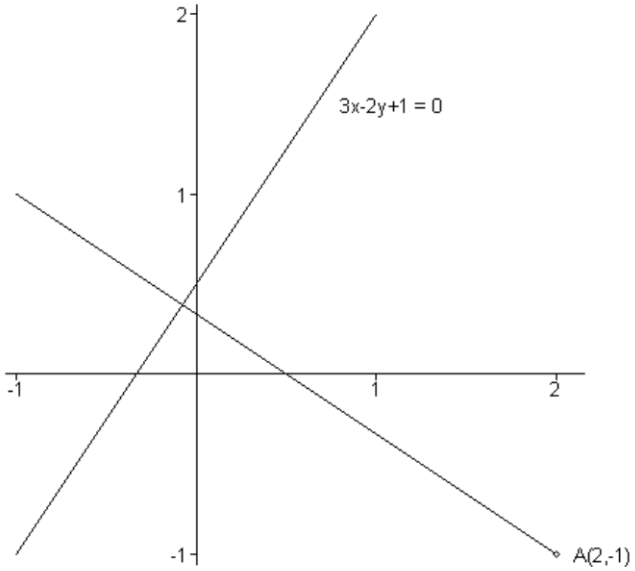
Considerant el triangle rectangle APC obtenim $AC=PC\frac{\sqrt{3}}{2}=3$. Per ser ABC un triangle isòsceles resulta $AB=AC=3$. Com a més a més és rectangle, la hipotenusa és $BC=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$. Per tant el perímetre és $\boxed{p=6+3\sqrt{2}}$.

7. PAU 2002 · Setembre · Sèrie única · Exercici 2

2. El costat BC d'un triangle està sobre la recta d'equació $3x-2y+1=0$. El vèrtex A té coordenades $(2,-1)$. Determineu el peu de l'altura relativa a A.

Puntuació: Plantejament: 1 punt. Determinació del peu de l'altura: 1 punt. Total: 2 punts.

Solució: Fem un esbós de la gràfica:



L'equació de l'altura, perpendicular al costat BC que passa per $A(2,-1)$ és

$$2(x-2)+3(y+1)=0$$

és a dir: $2x+3y=1$. El peu de l'altura és el punt d'intersecció d'ambdues rectes, o sigui la solució del sistema:

$$\left.\begin{aligned}3x-2y&=-1\\2x+3y&=1\end{aligned}\right\}$$

que és: $x=-\dfrac{1}{13}$, $y=\dfrac{5}{13}$.

Per tant, el peu de l'altura és $\boxed{A'=\left(-\dfrac{1}{13},\dfrac{5}{13}\right)}$

8. PAU 2002 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 3

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

9. PAU 2002 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 5

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

10. PAU 2002 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 6

6. Un triangle té dos vèrtexs A i B en els punts $A=(0,0)$ i $B=(2,0)$. L'àrea val 3. Sabent que el tercer vèrtex C té ordenada positiva i està situat sobre la recta $2x-y-5=0$, calculeu les coordenades de C i el perímetre del triangle. Feu-ne la gràfica corresponent.

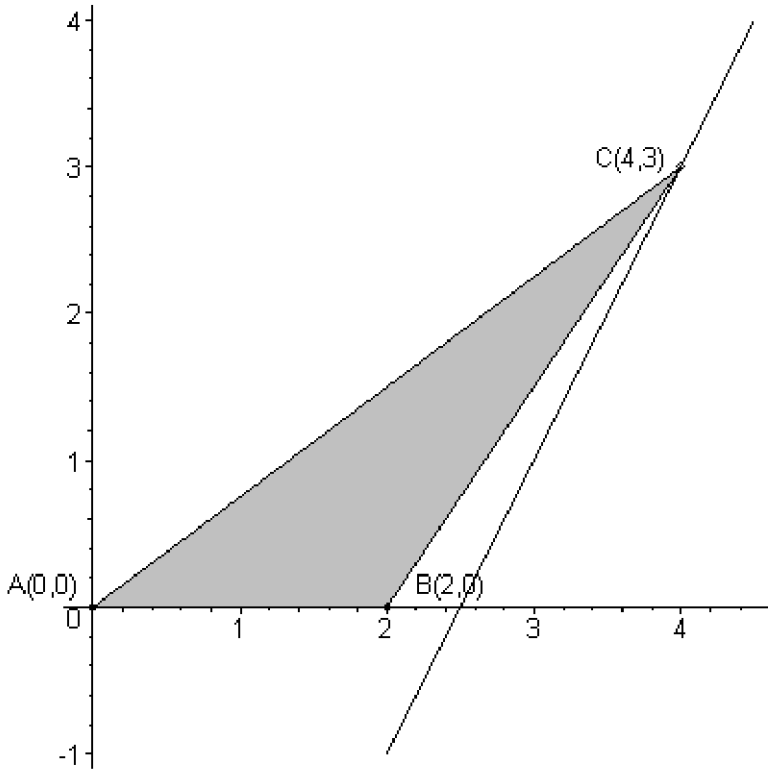
Puntuació: Plantejament: 1 punt. Determinació del vèrtex C: 1 punt. Perímetre: 1 punt. Gràfica: 1 punt. Total 4 punts.

Solució: La base del triangle val 2. Com la seva àrea val 3, la seva altura val $\frac{2S}{b}=\frac{2\cdot 3}{2}=3$. Per tant, el vèrtex C és la intersecció de la recta $2x-y-5=0$ amb $y=3$, que dóna el punt $\boxed{C(4,3)}$.

El perímetre val:

$$p=2+\sqrt{2^2+3^2}+\sqrt{4^2+3^2}=7+\sqrt{13}$$

Finalment la gràfica és:



11. PAU 2001 · Setembre · Sèrie única · Exercici 3 (Qüestions)

3. Recta paral.lela: $6(x-4)-15(y-1)=0$, o sigui $\boxed{2x-5y-3=0}$.

   Recta perpendicular: $15(x-4)+6(y-1)=0$, o sigui $\boxed{5x+2y-22=0}$.

   Nota pels correctors: Puntueu 1 punt per les rectes i un punt per la gràfica.

   [2 punts]

12. PAU 2001 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 2 (Problemes)

2. a)

$$p = \sqrt{(3-0)^2+(7-3)^2}+\sqrt{(6-3)^2+(0-7)^2}$$
$$+\sqrt{(0-6)^2+(3-0)^2} = 5+\sqrt{58}+3\sqrt{5} \approx 19,323977$$

[1 punt]

b) Tenim $\vec{BC}=(3,-7)$. Per tant, la recta perpendicular que passa pel punt A és:

$3(x-0)-7(y-3)=0$, és a dir $3x-7y+21=0$ [1 punt]

c) L'equació de la recta BC és:

$y-7=-\frac{7}{3}(x-3)$, és a dir $7x+3y-42=0$

Per tant, la distància al punt A és:

$$h=\left|\frac{7\cdot 0+3\cdot 3-42}{\sqrt{7^2+3^2}}\right|=\frac{33}{\sqrt{58}}=\frac{33\sqrt{58}}{58}\approx 4,3331122$$ [1 punt]

d) L'àrea del triangle és $\frac{1}{2}$ del producte de la base BC per l'altura h.

$$S=\frac{1}{2}h\cdot\overline{BC}=\frac{1}{2}\frac{33}{\sqrt{58}}\sqrt{3^2+7^2}=\frac{33}{2}$$

Alternativament:

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & 3 & 1\\ 6 & 0 & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots\end{vmatrix}=\frac{33}{2}$$ [1 punt]

13. PAU 2001 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 3 (Qüestions)

3. El punt d'intersecció de les dues rectes s'obté resolent el sistema format per les equacions de r i s, i té per solució:

$\boxed{x=1,\quad y=-1}$. La recta que passa per $(1,-1)$ i és paral.lela a $3x+5y-1=0$ és: $3(x-1)+5(y+1)=0$ o, el que és equivalent,

$$\boxed{3x+5y+2=0}$$

Nota pels correctors: Puntueu 1 punt per trobar el punt de tall i 1 punt per l'equació de la recta. [2 punts]

14. PAU 2001 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 3 (Qüestions)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

15. PAU 2001 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 4 (Qüestions)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

16. PAU 2000 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 3 (Qüestions)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

17. PAU 2000 · Setembre · Sèrie 6 · Exercici 1 (Qüestions)

1. a) L'equació d'una recta paral·lela a la recta $4x+y-3=0$ és de la forma $4x+y+k=0$. Si ha de passar per $(3,-1)$ s'ha de complir

$$4\times 3+(-1)+k=0\Leftrightarrow k=-11$$

de forma que l'equació d'aquesta recta serà $\boxed{\boxed{4x+y-11=0}}$.

Si una recta és perpendicular a $4x+y-3=0$ tindrà una equació de la forma $x-4y+k=0$. Si passa per $(3,-1)$ es compleix

$$3-4\times(-1)+k=0\Leftrightarrow k=-7$$

Per tant l'equació de la perpendicular serà $\boxed{\boxed{x-4y-7=0}}$.

b) Aquí els alumnes han de fer un dibuix de les tres rectes que estigui d'acord amb els càlculs de l'apartat anterior.

Compteu un punt per cada apartat.

18. PAU 2000 · Setembre · Sèrie 6 · Exercici 2 (Qüestions)

2. Bastarà imposar que la recta $x+ay=a$ passi pel punt d'intersecció de les rectes $3x+y=5$ i $x-3y=-5$ que és la solució del sistema

$$\left.\begin{array}{l}3x+y=5\\x-3y=-5\end{array}\right\}\quad\Leftrightarrow\quad x=1,\ y=2$$

Per tant s'ha de tenir

$$1+2a=a\Leftrightarrow\boxed{\boxed{a=-1}}$$

També es podria imposar que el determinant de la matriu ampliada del sistema

$$\left.\begin{array}{l}3x+5=5\\x-3y=-5\\x+ay=a\end{array}\right\}$$

sigui diferent de 0.

No descompteu més de mig punt per petits errors de càlcul.

19. PAU 2000 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1 (Problemes)

1. a) El vertex $C = (c_1, c_2)$ ha de complir

$$(c_1, c_2) - (1, 4) = (4, 1) - (0, 0)$$

per tant $C = (5, 5)$.

b) Vectors directors de les diagonals : $C - A = (5, 5), B - D = (3, -3)$.
Són perpendiculars ja que el seu producte escalar és zero: $(5, 5) \cdot (3, -3) = 15 - 15 = 0$.
Equació de la diagonal $AC : y = x$. Equació de la diagonal $BD : y = -x + 5$.
Punt d'intersecció de les diagonals : $(5/2, 5/2)$.
Aquest punt és justament $(A + C)/2$ i $(B + D)/2$.

Compteu 1 punt per l'apartat a), i 3 per l'apartat b). Concretament $1,5$ per comprovar que les diagonals són perpendiculars i $1,5$ pel càlcul i justificació del punt mig.

20. PAU 2000 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 1 (Problemes)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

21. PAU 2000 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 3 (Qüestions)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.