Matemàtiques aplicades a les ciències social

Funcions: problemes d'optimització

Solucions · 36 exercicis

Proves d'accés a la universitat (PAU) de Catalunya. Ordenats del més recent al més antic.
Retalls dels exàmens i pautes oficials (selecat.cat / universitats.gencat.cat).

1. PAU 2026 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 3

3

3.1. Denotem per x el preu de l'entrada i per $f(x)$ la funció que dóna el nombre de persones que accedeixen al local. Sabem que $f(x)$ és una funció lineal de pendent -20 i que passa pel punt (15, 180). D'això deduïm que

$f(x) - 180 = -20(x - 15)$, és a dir que, $f(x) = 480 - 20x$.

Per saber a quin preu s'omple tot l'aforament de la sala cal resoldre $f(x) = 320$ i s'obté $x = 8$. És a dir, si baixen el preu de l'entrada a 8 euros hi assistiran 320 persones. Per saber ara a quin preu no ve ningú al local resolem $f(x) = 0$ i obtenim $x = 24$ euros.

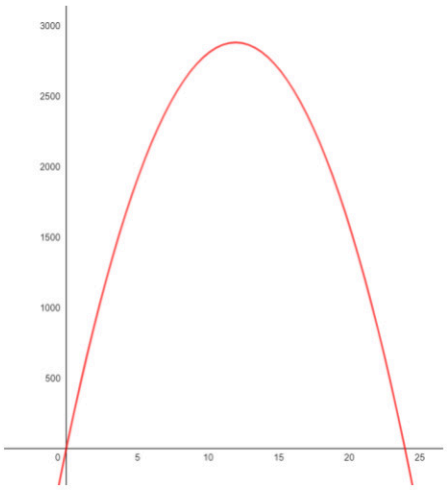
3.2. Els ingressos s'obtenen multiplicant el nombres de persones que assisteixen a la sala pel preu de l'entrada

$$I(x) = (480 - 20x) \cdot x = -20\,x^2 + 480\,x.$$

Si el preu és de 15 euros s'obtenen uns ingressos de $I(15) = 2700$ euros i per a 18 euros de $I(18) = 2160$ euros.

3.3. Ara hem de trobar el màxim de $I(x)$, que és un polinomi i per tant una funció contínua i derivable a tots els reals. Dins del context del problema té sentit considerar el domini $[8,24]$. Derivant obtenim $I'(x) = -40x + 480$, i igualant la derivada a zero s'obté com a solució $x = 12$. Podem comprovar fàcilment que és un màxim absolut ja que $I'(x) > 0$ quan $x \in [8,12)$ i $I'(x) < 0$ quan $x \in (12, 24]$.

Alternativament es pot representar la paràbola definida per $I(x)$ i trobar el vèrtex per obtenir el màxim:



Per tant, el preu que maximitza els ingressos és $x = 12$ euros i els ingressos màxims són $I(12) = 2880$ euros.

Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara. Si no és el cas es pot descomptar fins a un màxim de 0,25 punts.

3.1 Justificació correcta del nombre de persones en funció del preu: 0,25 punts. Càlcul del preu de l'entrada amb el que s'omple el local: 0,25 punts. Càlcul del preu de l'entrada amb el que no ve ningú: 0,25 punts.

3.2 Càlcul de la funció que dona els ingressos en funció del preu: 0,25 punts. Càlcul dels ingressos amb un preu de 15 euros: 0,25 punts. Càlcul dels ingressos amb un preu de 18 euros: 0,25 punts.

3.3 Càlcul de la derivada: 0,25 punts. Obtenció del preu amb el que s'assoleix el màxim: 0,25 punts. Justificació de que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Càlcul dels ingressos màxims: 0,25 punts.

2. PAU 2025 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 1

1.

a) Si x és el nombre de pereres addicionals a les 25 plantades inicialment, la producció de cada una de les $25 + x$ pereres serà de $370 - 10x$ peres.

La producció total serà el producte del nombre de peres per arbre pel nombre de pereres:

$$P(x) = (25 + x) \cdot (370 - 10x) \rightarrow P(x) = -10x^2 + 120x + 9250.$$

b) Per buscar el punt on s'assoleix el màxim de la funció de producció, calculem la derivada i la igualem a zero:

$$P'(x) = -20x + 120 \quad \rightarrow \quad P'(x) = 0 \quad \rightarrow \; x = 6$$

Observem que és un màxim perquè la derivada és positiva per a valors inferiors a 6 i, per tant, la funció és creixent per a $x < 6$, mentre que és negativa per a valors superiors a 6 i, per tant, la funció és decreixent per a $x > 6$.

Així doncs, el nombre total de pereres que caldrà plantar per hectàrea per obtenir una producció màxima serà de $25 + 6 = 31$ pereres per hectàrea.

La producció màxima serà de $P(6) = 31 \cdot 310 = 9610$ peres.

Per saber a partir de quin valor no hi haurà cap producció cal resoldre $P(x) = 0$

$$-x^2 + 12x + 925 = 0 \rightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (925)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-12 \pm 62}{-2}.$$

Tenim dues solucions: $x = -25$ i $x = 37$. La primera correspon a no plantar cap perera per hectàrea i la segona correspon a plantar 37 pereres addicionals per hectàrea. En aquest cas la producció serà nul·la. És a dir, la producció serà nul·la si no es planta cap perera per hectàrea o si es planta un total de $25 + 37 = 62$ pereres per hectàrea.

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara.

a) Determinar la funció que dona el nombre de pereres en funció de x: 0,25 punts. Determinar la funció que dona el nombre de peres per perera en funció de x:

0,25 punts. Determinar la funció que dona la producció de peres per hectàrea en funció de x: 0,5 punts.

b) Càlcul de la derivada: 0,25 punts. Trobar el valor on s'assoleix l'extrem relatiu i justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Nombre òptim de pereres per hectàrea: 0,25 punts. Producció màxima: 0,25 punts. Càlcul del nombre de pereres per hectàrea per tal que no hi hagi producció de peres: 0,5 punts.

3. PAU 2024 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 3

3.

a) Si el volum ha de ser de 4 litres $= 4000\ cm^3$ tenim que $x^2 \cdot y = 4000$ i, per tant, $y = \frac{4000}{x^2}$.

b) La superfície de la caixa en cm^2 ve donada per l'expressió

$$S(x) = x^2 + 4x \cdot y = x^2 + 4x \cdot \frac{4000}{x^2} = x^2 + \frac{16000}{x}$$

Si calculem la derivada, obtenim

$$S'(x) = 2x - \frac{16000}{x^2}$$

Trobem els extrems relatius igualant a zero

$$2x - \frac{16000}{x^2} = 0 \rightarrow x^3 = 8000 \rightarrow x = 20$$

Comprovem que es tracta d'un mínim perquè la derivada $S'(x)$ és negativa per a valors inferiors a $x = 20$, i, per tant, $S(x)$ és decreixent, mentre que $S'(x)$ és positiva per a valors superiors a $x = 20$ i, per tant, $S(x)$ és creixent.

Hem obtingut, per tant, que el costat de la base x ha de mesurar 20 cm.
L'alçària de la caixa serà de

$$y = \frac{4000}{x^2} = \frac{4000}{20^2} = 10\ cm.$$

Finalment, la quantitat de cartró és la superfície de la caixa amb aquests valors $S = 20^2 + \frac{16000}{20} = 400 + 800 = 1200\ cm^2$.

a) Trobar l'expressió algebraica: 0,5 punts.

b) Trobar la funció que cal optimitzar: 0,25 punts. Càlcul de la derivada: 0,5 punts. Obtenció del punt on s'assoleix el mínim: 0,25 punts. Justificar que es tracta d'un mínim: 0,25 punts. Trobar l'alçària: 0,25 punts. Trobar la quantitat de cartró: 0,5 punts.

---

4. PAU 2024 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3

3.

a)

Si el tractor fa el recorregut a 40 km/h obtenim que el temps que trigarà a fer tot el trajecte és de $\frac{300}{40} = 7{,}5$ hores. Per tant, el cost total del trajecte sumant les despeses de gasoil i el salari del conductor serà

$$\left(5 + \frac{40^2}{98}\right) \cdot 7{,}5 \cdot 1{,}96 + 7{,}5 \cdot 14{,}70 = 423{,}75\,€$$

Anem ara a buscar la funció que ens dona el cost en funció de la velocitat, en quilòmetres per hora, x:

$$C(x) = \left(5 + \frac{x^2}{98}\right) \cdot \frac{300}{x} \cdot 1{,}96 + \frac{300}{x} \cdot 14{,}70 = \frac{7350}{x} + 6x$$

b)

Per trobar el cost més econòmic cal buscar el mínim de la funció $C(x)$. Comencem calculant la derivada:

$$C'(x) = -\frac{7350}{x^2} + 6$$

Si la igualem a zero obtenim que x=$\pm\sqrt{\frac{7350}{6}} = \pm 35$ km/h

Descartem la solució negativa perquè no té sentit en el context del problema i observem que la derivada $C'(x)$ és negativa per a valors inferiors a $x = 35$ i, per tant, la funció $C(x)$ és decreixent, mentre que és positiva per a valors superiors a $x = 35$ i, per tant, la funció $C(x)$ és creixent. Així, doncs, en $x = 35$ hi trobem un mínim local.

El cost a aquesta velocitat serà de

$$C(35) = \frac{7350}{35} + 6 \cdot 35 = 420\,€$$

a) Càlcul del temps necessari a 40 km/h: 0,25 punts. Càlcul del cost a 40 km/h: 0,5 punts. Obtenció de la funció que dona el cost en funció de x: 0,5 punts.

b) Càlcul de la derivada: 0,5 punts. Càlcul del punt on es troba el mínim: 0,25 punts. Justificació que es tracta d'un mínim: 0,25 punts. Càlcul del cost a aquesta velocitat: 0,25 punts.

5. PAU 2023 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

1.

a) Sigui x, el nombre de vegades que s'aplica el descompte de 5 €. La funció que dona els ingressos per la venda de bitllets és el producte entre el preu del bitllet i el nombre de bitllets venuts:

$$I(x) = (500 - 5x) \cdot (180 + 2x) = -10x^2 + 100x + 90\,000$$

b) Per trobar el màxim d'ingressos, derivem la funció $I(x)$:
$I'(x) = -20x + 100$.
Igualem la deriva a zero i veiem que hi ha un extrem relatiu quan $x = 5$. Veiem que es tracta d'un màxim, perquè la derivada és positiva per a $x < 5$ i és negativa per a $x > 5$.
Per tant, el preu del bitllet per maximitzar els ingressos ha de ser de $500 - 5 \cdot 5 = 475$ €. I, amb aquest preu, els ingressos de la companyia per la venda de bitllets seran de $I(x) = 475 \cdot 190 = 90\,250$ €.

a) Obtenció de la funció que dona el preu del bitllet en funció de x: 0,25 punts. Obtenció de la funció que dona el nombre de passatgers en funció de x: 0,25 punts. Obtenció de la funció que dona els ingressos en funció de x: 0,5 punts.

b) Càlcul de la derivada: 0,5 punts. Obtenció del punt on s'assoleix el màxim: 0,25 punts. Justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Càlcul del preu del bitllet: 0,25 punts. Obtenció dels ingressos màxims: 0,25 punts.

---

6. PAU 2022 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 1

1.

a) Els beneficis són la diferència entre els ingressos obtinguts per la venda i els costos de producció, és a dir, $B(x) = I(x) - C(x)$. Els ingressos obtinguts per la venda de x unitats són $I(x) = x \cdot p(x) = 47x - 0{,}06x^2$. Per tant:

$$B(x) = 47x - 0{,}06x^2 - 0{,}02x^2 - 3x - 100 = -0{,}08x^2 + 44x - 100$$

b) Per saber quantes unitats cal produir per obtenir el benefici màxim comencem calculant la derivada:

$$B'(x) = -0{,}16x + 44$$

Igualem la derivada a zero per trobar els extrems relatius:

$$B'(x) = -0{,}16x + 44 = 0$$

Així doncs, tenim un extrem relatiu per $x = 275$ unitats.

Veiem que es tracta d'un màxim, ja que la funció de beneficis és una paràbola amb el coeficient principal negatiu. També podem argumentar-ho veient que la derivada és positiva per a valors inferiors a 275 i, per tant, la funció és creixent; mentre que és negativa per a valors superiors i, per tant, els beneficis decreixen.

El benefici màxim que s'obté és:

$$B(275) = 5.950\ €$$

Criteris de correcció: a) Plantejament: 0,25 punts. Obtenció de la funció d'ingressos: 0,5 punts. Obtenció de la funció de beneficis: 0,5 punts. b) Càlcul de la derivada: 0,5 punts. Obtenció del punt on s'assoleix el màxim: 0,25 punts. Justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Obtenció dels beneficis màxims: 0,25 punts.

---

7. PAU 2021 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 4

4.

a) L'àrea del corral serà donada per l'expressió $A(x, y) = x \cdot y$.

Com que el perímetre està fixat i és de 40 metres, tenim que $2x + 2y = 40$. Aïllant d'aquesta expressió la variable y, obtenim que $y = 20 - x$, i substituint aquesta expressió en la funció àrea A, tenim que:

$$A(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$$

b) Com que volem trobar un màxim de la funció $A(x)$, derivarem la funció $A(x)$ i la igualarem a 0.

$A'(x) = 20 - 2x$.

Imposem $A'(x) = 0$ i obtenim $x = 10$ metres. Observem que es tracta d'un màxim perquè la derivada és positiva per a valors inferiors a 10 i és negativa per a valors superiors. Per tant, l'amplària del corral d'àrea màxima és de $x = 10$ metres.

Sabem que la llargària ve donada per l'expressió $y = 20 - x$. Substituint la x per 10, obtenim que $y = 10$ metres.

Deduïm, per tant, que en realitat es tracta d'un quadrat de costat $x = 10$ metres i tindrà per àrea $A(10) = 100\ m^2$.

Criteris de correcció: a) Obtenció de la relació entre l'amplària x i la llargària y: 0,5 p. Obtenció de l'àrea en funció de x: 0,75 p. b) Càlcul de la derivada: 0,25 p. Càlcul del valor pel qual s'obté el màxim: 0,25 p. Comprovació que es tracta d'un màxim: 0,25 p. Càlcul del valor de la llargària: 0,25 p. Càlcul de l'àrea màxima: 0,25 p.

---

8. PAU 2020 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3

3. El cost d'elaboració d'un menú en un restaurant és de 8 €. S'ha realitzat un estudi de mercat i s'ha arribat a la conclusió que si el preu del menú és de 18 € entren a dinar al restaurant 120 clients. També s'ha conclòs que la relació entre el preu del menú i el nombre de clients és lineal, de manera que, per cada euro que augmentem el preu del menú, disminueix en 4 el nombre de clients. I a l'inrevés, per cada euro que disminuïm el preu, augmenta en 4 el nombre de clients.
   a) Obteniu la funció que expressa el benefici del restaurant en funció del nombre d'euros en què augmentem o disminuïm el preu inicial del menú. *[1,25 punts]*
   b) Trobeu en quants euros cal augmentar o disminuir el preu inicial del menú per tal que el restaurant obtingui el màxim benefici. Quin seria el preu final del menú i quin seria el benefici obtingut amb aquest preu? *[1,25 punts]*

a) Comencem fent un esquema del plantejament. Anomenem x el sobrepreu sobre els 18 €.

Preu menú (€)	Benefici (€)	Nombre de clients	Benefici total (€)
18	10	120	$10 \cdot 120 = 1.200$
$18 + x$	$10 + x$	$120 - 4x$	$(10 + x)(120 - 4x)$

Per tant, la funció que expressa el benefici del restaurant és

$$B(x) = (10 + x)(120 - 4x) = 1200 + 80x - 4x^2.$$

b) Observem que la funció benefici és una paràbola amb coeficient de grau 2 negatiu i, per tant, tindrà el seu màxim en el vèrtex. També podem obtenir aquest màxim derivant i igualant a zero la derivada:

$$B'(x) = 80 - 8x.$$

Igualant a zero obtenim que hi ha un extrem relatiu en $x = 10$. Veiem clarament que es tracta d'un màxim perquè $B'(x) > 0$ per $x < 10$ i $B'(x) < 0$ per $x > 10$.

Per tant, es conclou que per maximitzar els beneficis el restaurant ha d'apujar el menú en 10 €. El preu final del menú serà de 28 € i el benefici màxim obtingut amb aquest preu serà de $B(10) = 1.600$ €.

Criteris de correcció: a) Plantejament del problema: 0,5 p. Obtenció de la funció de beneficis: 0,75p. b) Obtenció dels euros que s'ha d'apujar el menú: 0'5 p. Justificació que és un màxim: 0,25 p. Obtenció del preu final del menú: 0,25 p. Obtenció dels beneficis màxims: 0,25 p.

9. PAU 2020 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 6

6. Un centre de formació organitza un curs subvencionat que té un cost fix de 9.000 € al qual cal sumar una quantitat que varia segons el nombre d'alumnes del curs i que ve donada per la funció $0{,}02x^3 - 24x$, en què x representa el nombre d'alumnes matriculats. El consell comarcal ha atorgat al centre una subvenció de 5.000 € per a l'organització del curs i l'ajuntament paga al centre 30 euros per cada alumne matriculat.
La despesa que ha d'assumir el centre és la diferència entre el cost total del curs i les dues subvencions rebudes.
Quants alumnes s'han de matricular al curs perquè la despesa sigui mínima per al centre i quina seria aquesta despesa? *[2,5 punts]*

El cost del curs, en funció del nombre d'alumnes matriculats x, serà: $C(x) = 9.000 + 0{,}02x^3 - 24x$.
La subvenció rebuda en funció del nombre d'alumnes serà: $S(x) = 5.000 + 30x$.
Per tant, la despesa en funció del nombre d'alumnes serà:

$$\begin{aligned} D(x) &= C(x) - S(x) \\ &= 9000 + 0,02x^3 - 24x - (5.000 + 30x) \\ &= 0{,}02x^3 - 54x + 4.000 \end{aligned}$$

Calculem la derivada: $D'(x) = 0{,}06x^2 - 54$. Igualant la derivada a zero obtenim que s'anul·la per $x = -30$ (que no té sentit en el nostre context) i per $x = 30$. Observem que $f'(x) < 0$ per $x \in (0{,}30)$ i, en canvi, $f'(x) > 0$ per $x > 30$. Per tant, en $x = 30$ hi ha un mínim.
Així doncs la despesa mínima s'obté amb 30 alumnes matriculats. Calculem $D(30) = 0{,}02 \cdot 30^3 - 54 \cdot 30 + 4.000 = 2.920$ €.
Per tant, la despesa és mínima si hi ha 30 alumnes matriculats i és de 2.920 €.

Criteris de correcció: a) Obtenció de la funció de costos: 0,25 p. Obtenció de la funció de subvencions: 0,25 p. Obtenció de la funció de despeses: 0,5 p. Càlcul de la derivada: 0,5 p. Obtenció del punt on s'obté el mínim: 0,5 p. Justificació de que es tracta d'un mínim: 0,25 p. Càlcul de la despesa mínima: 0,25 p..

10. PAU 2019 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 2

2. Per a la campanya d'aquest estiu, una botiga d'esports que ven patinets elèctrics espera vendre 40 patinets a un preu de 1.000 € per patinet. Segons un estudi de mercat, la relació entre el nombre de vegades que es rebaixa el preu del patinet en 50 € i el nombre de patinets venuts és lineal, i, per cada 50 € de rebaixa en el preu de venda de cada patinet, hi haurà un increment de les vendes de 10 patinets més.

a) Escriviu la funció d'ingressos de la botiga en funció del nombre de vegades que rebaixi en 50 € el preu inicial de 1.000 € del patinet. [1 punt]

b) Trobeu quin ha de ser el preu del patinet per tal d'obtenir els ingressos màxims. Trobeu també el nombre de patinets que es vendran i els ingressos que s'obtindran amb aquest preu. [1 punt]

a) La funció d'ingressos de la empresa serà el nombre de patinets multiplicat pel preu de cada patinet:

$$I(x) = (40 + 10x) \cdot (1.000 - 50x),$$

on x és el nombre de vegades que es rebaixa el preu de cada patinet en 50 euros. Fent el producte, obtenim que la funció d'ingressos serà la següent:

$$I(x) = -500x^2 + 8.000x + 40.000.$$

b) Per calcular els ingressos màxims, derivem la funció:

$$I'(x) = -1.000x + 8.000,$$

i, tot seguit, la igualem a zero:

$$I'(x) = 0 \to x = \frac{8.000}{1.000} = 8.$$

Comprovem que aquest valor correspon a un màxim perquè la derivada és positiva per $x < 8$ i negativa per $x > 8$.

El preu del patinet pel qual s'aconsegueixen els ingressos màxims serà de $1.000 - 50 \cdot 8 = 600$ euros, i el nombre de patinets que es vendran serà de $40 + 10 \cdot 8 = 120$ patinets. Finalment, els ingressos que s'obtindran seran de $120 \cdot 600 = 72.000$ euros.

Criteris de correcció: a) Obtenció del nombre de patinets venuts en funció de x: 0,25 p. Obtenció del preu del patinet en funció de x: 0,25 p. Obtenció de la funció d'ingressos: 0,5 p. b) Obtenció del punt on s'assoleix el màxim i comprovació que es tracta d'un màxim: 0,25 p. Obtenció del preu del patinet: 0,25 p. Càlcul del nombre de patinets que es vendran: 0.25 p. Càlcul dels ingressos que s'obtindran: 0,25 p.

---

11. PAU 2019 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 5

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

12. PAU 2018 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 5

5. Una companyia de mòbils va presentar fa un any un telèfon intel·ligent al preu de 750€. Recentment, un estudi de mercat ha arribat a la conclusió que, amb aquest preu, compren el telèfon 2.000 clients al mes, i que la relació entre aquestes dues variables és lineal, de manera que per cada 10 euros que s'incrementa el preu del mòbil, el compren 100 clients menys, i a l'inrevés: per cada 10 euros de descompte sobre el preu inicial de 750 euros, el compren 100 clients més.
   a. Deduïu que la funció que determina els ingressos mensuals de la companyia segons el preu del mòbil és $I(p) = -10p^2 + 9500p$. *[1 punt]*
   b. Trobeu quin ha de ser el preu del mòbil per a obtenir ingressos, el preu del mòbil que dona els ingressos mensuals més elevats i el valor d'aquests ingressos màxims. *[1 punt]*

a) El preu del mòbil serà $p = 750 + 10x$, en què x és el nombre de vegades que s'augmenta el preu de l'abonament en 10 euros. El nombre de mòbils que es vendran al mes serà $N = 2000 - 100x$.
L'ingrés mensual I vindrà donat pel preu del mòbil p multiplicat pel nombre de mòbils que es venguin N, és a dir, $I = p \cdot N$. Si volem posar la funció d'ingrés en funció del preu del mòbil, caldrà aïllar la x en funció del preu p $\left(p = 750 + 10x \rightarrow x = \frac{p-750}{10}\right)$, llavors el nombre de mòbils en funció del preu p serà: $N = 2000 - 100\left(\frac{p-750}{10}\right) \rightarrow N = -10p + 9500$. Així que la funció d'ingressos serà: $I(p) = p \cdot (-10p + 9500)$.
Obtenim, per tant, la paràbola $I(p) = -10p^2 + 9500p$.

b) Perquè hi hagi ingressos cal que $I(p) > 0 \rightarrow -10p^2 + 9500p > 0 \rightarrow p \cdot (-10p + 9500) > 0$. Per tant, o bé $p > 0$ i $-10p + 9500 > 0$, d'on obtenim $0€ < p < 950€$, o bé caldria que $p < 0$ i que $(-10p + 9500) < 0$, que no té sentit per la naturalesa del problema.

Per trobar el màxim ingrés derivem: $I'(p) = -20p + 9500$, i igualem a zero: $I'(p) = 0 \rightarrow p = 475$ €. Comprovem que correspon als ingressos màxims ja que $I'(p) > 0$, per a $p < 475$ i $I'(p) < 0$, per a $p > 475$. Finalment, per calcular el valor d'aquests ingressos màxims, només cal calcular el valor de la funció Ingrés per a $p = 475 \rightarrow I(475) = 475 \cdot (-10 \cdot 475 + 9500) = 475 \cdot 4750 = 2.256.250€$

També es pot resoldre tenint en compte que la gràfica de la funció d'ingrés és una paràbola i obtenint-ne el màxim.

Criteris de correcció: a) Plantejament del problema: 0,25 p. Obtenció de la funció d'ingressos: 0,75 p. b) Obtenció de l'interval de valors perquè hi hagi ingressos: 0,5 p. Obtenció del preu pel qual s'obté el màxim: 0,25 p. Justificació que es tracta d'un màxim i obtenció dels beneficis màxims: 0,25 p.

13. PAU 2017 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 2

2. Un gimnàs cobra una quota de 42 euros mensuals i té 2000 usuaris. Un estudi de mercat afirma que per cada euro que s'apuja (o s'abaixa) la quota es perden (o es guanyen) 20 usuaris.
   a) Expresseu el nombre d'usuaris del gimnàs en funció de la quota, tenint en compte que la relació entre les dues variables és lineal. Per a quin valor de la quota el gimnàs es quedaria sense usuaris? *[1 punt]*
   b) Determineu en quin preu cal fixar la quota per obtenir un benefici mensual màxim. Quin seria aquest benefici i quants usuaris tindria el gimnàs en aquest cas? *[1 punt]*

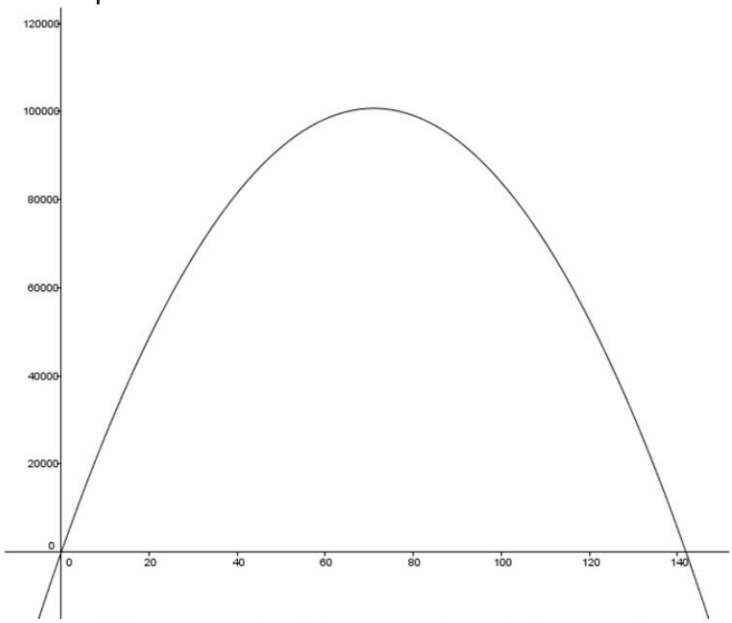
a) Denotem per x la quota del gimnàs i per $f(x)$ la funció que dona el nombre d'usuaris del gimnàs en funció de la quota. Sabem que $f(x)$ és una funció lineal de pendent -20 i que passa pel punt (42, 2.000), d'on es dedueix que $f(x) = 2.840 - 20x$. Per saber per a quin valor de quota el gimnàs es quedaria sense usuaris cal resoldre $f(x) = 0$, i s'obté $x = 142$. És a dir, a partir de 142 euros de quota el gimnàs no tindria cap usuari.

b) La funció que dona el benefici mensual en funció de la quota s'obté multiplicant el nombre d'usuaris per la quota que paguen:

$$B(x) = (2.840 - 20x) \cdot x = -20\,x^2 + 2.840\,x.$$

Ara hem de trobar el màxim de $B(x)$, que és un polinomi i, per tant, una funció contínua i derivable a tot el seu domini $[0, \infty)$. Derivant, obtenim $B'(x) = -40x + 2.840$, i igualant la derivada a zero s'obté com a solució $x = 71$. Podem comprovar fàcilment que és un màxim absolut ja que $B'(x) > 0$ quan $x \in [0,71)$ i $B'(x) < 0$ quan $x > 71$.

Alternativament es pot representar la paràbola definida per $\mathrm{B(x)}$ i trobar el vèrtex per a obtenir el màxim:



El benefici mensual màxim que s'assoleix quan la quota és de 71 euros és de 100.820 euros i el gimnàs tindria 1.420 usuaris.

Criteris de correcció: a) Determinació de la funció que dona el nombre d'usuaris: 0,5 p. Determinació del valor de la quota pel qual el gimnàs es queda sense usuaris: 0,5 p. b) Determinació de la funció que dona els beneficis: 0,25 p. Determinació del màxim: 0,25 p. Justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 p. Determinació del nombre d'usuaris en aquest cas: 0,25 p.

---

14. PAU 2017 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 5

6. El preu en euros d'una pedra preciosa és cinc vegades el quadrat del seu pes en grams. Si tenim una pedra preciosa de 8 grams i ens plantegem partir-la en dos trossos:
   a. Quin pes ha de tenir cadascun dels trossos perquè el conjunt valgui el mínim possible? *[1 punt]*
   b. Quin és el preu mínim i el preu màxim que pot valer aquest conjunt? *[1 punt]*

a) Anomenem x i y el pes en grams de cadascun dels dos trossos. D'una banda tenim la condició $x + y = 8$, d'on $y = 8 - x$. D'altra banda, els possibles valors de x corresponen a l'interval $[0,8]$. El preu vindrà donat per la funció
$P(x) = 5x^2 + 5y^2 = 5x^2 + 5(8 - x)^2 = 10x^2 - 80x + 320.$
Per a trobar el mínim, fem la derivada i igualem a zero $P'(x) = 0$, és a dir, $20x - 80 = 0$, d'on obtenim $x = 4$. Com que la funció $P'(x)$ és negativa per als valors inferiors a $x = 4$ i positiva per als punts superiors, deduïm que es tracta d'un mínim.
Per tant, el preu mínim s'obté quan els dos trossos pesen 4 grams cadascun.
b) Els màxims i mínims absoluts de la funció els trobarem entre els relatius i els extrems de l'interval $[0,8]$. Observem que $P(0) = P(8) = 320$ i $P(4) = 160$. Per tant, el preu mínim que podem pagar és de 160 euros quan els dos trossos són de 4 grams i el preu màxim és de 320 euros quan tenim un únic tros, és a dir, un tros de 0 grams i l'altre de 8 grams.

Criteris de correcció: a) Determinació de la condició: 0,25 p. Determinació de la funció del preu: 0,25 p. Obtenció de la derivada: 0,25 p. Obtenció del mínim:

15. PAU 2016 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 1

1. Una fàbrica de mobles de cuina ven 1000 unitats mensuals d'un model d'armari a 200 euros per unitat. Per tal de reduir-ne l'estoc, fa una oferta als compradors i estima que, per cada euro de reducció del preu, les vendes mensuals del producte s'incrementaran en 100 unitats.

   (a) Quantes unitats caldrà vendre per a d'obtenir el màxim d'ingressos mensuals? (1,5 punts)

   Si anomenem x a la reducció del preu de venda en euros, aleshores la funció que ens dóna els beneficis serà $B(x) = (200 - x) \cdot (1000 + 100x) = -100x^2 + 19000x + 200000$. La seva derivada és $B'(x) = -200x + 19000$, que val 0 quan $x = 95$. Com que la funció és una paràbola amb coeficient del terme quadràtic negatiu, aquest valor correspon a un màxim: els ingressos màxims s'obtindran quan es redueixi el preu en 95 euros, és a dir, quan el nombre d'unitats venudes sigui $1000 + 100 \cdot 95 = 10500$ unitats.

   (b) A quant pujaran aquests ingressos? (0,5 punts)

   La quantitat màxima ingressada serà $B(95) = 1102500$ euros.

16. PAU 2015 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 2

2. Un hotel cobra 45 € per habitació i nit. Per aquest preu té ocupades 165 habitacions cada nit. S'ha fet un estudi a partir del qual s'ha deduït que, per cada euro que s'apugi el preu de l'habitació, se n'ocuparà una menys cada nit.

   a. Si x és la quantitat que s'apuja el preu de l'habitació per sobre dels 45 € inicials, determineu la funció que ens dóna els ingressos diaris de l'hotel en funció de x. Indiqueu també quins seran els ingressos màxims que pot obtenir l'hotel. [1 punt]

   La funció que ens dóna els ingressos serà $I(x) = (165 - x)(45 + x) = -x^2 + 120x + 7425$.

   Per a calcular els ingressos màxims calculem la derivada: $I'(x) = -2x + 120$. Aquesta derivada val 0 quan x = 60, que serà màxim perquè I(x) és una paràbola amb coeficient principal negatiu. I(60) = 11025, que serà la quantitat màxima que es pot ingressar.

   b. Indiqueu entre quins preus obtindrà ingressos l'hotel. [1 punt]

   $I(x) > 0$ si $-45 < x < 165$. Per tant el preu de l'habitació, que és x + 45, haurà d'estar entre 0 € i 210 €.

17. PAU 2015 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 1

1. Un arbre té un volum de 30 m^3 i, per la qualitat de la seva fusta, es ven a 50 € per metre cúbic. Cada any l'arbre augmenta el volum en 5 m^3. Alhora, la qualitat de la fusta disminueix, i també el preu, que cada any és un euro per metre cúbic més barat. D'aquí a quants anys aconseguirem el màxim d'ingressos per la venda de la fusta de l'arbre? Quins seran aquests ingressos? *[2 punts]*

   Anomenem x la quantitat d'anys que passen des del moment inicial. El volum de l'arbre al cap de x anys, expressat en m^3, serà V(x) = 30 + 5x. El preu de la fusta de l'arbre al cap de x anys, expressat en €/m^3, serà P(x) = 50 – x. L'ingrés que prové de la fusta de l'arbre al cap de x anys, expressat en euros, serà I(x) = V(x)·P(x):

   $$I(x) = (30 + 5x)(50 - x) = 1500 + 220x - 5x^2$$
   $$I'(x) = 220 - 10x$$
   $$I'(x) = 0 \text{ quan } x = 22.$$

   A més, aquesta derivada és positiva quan x < 22 i negativa després. Per tant, es tracta d'un màxim.

   L'ingrés màxim de la fusta es donarà al cap de 22 anys. Quan això passi, aquest ingrés màxim serà de $I(22) = 1500 + 220\cdot 22 - 5\cdot 22^2 = 3920$ €.

---

18. PAU 2015 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 3

3. El preu, expressat en milers d'euros, del robí africà és el doble del quadrat del seu pes en grams, mentre que el preu del robí tailandès és quatre vegades el cub del seu pes en grams. Ens han enviat un paquet amb dos robins, un de cada classe, que en total pesen 2 grams.

   a. Si els dos robins pesessin el mateix, quin preu hauríem de pagar? [1 punt]

   La funció que ens dóna el preu d'un robí de cada classe, de x grams, és:

   $$P(x) = 2x^2 + 4x^3.$$

   Per tant, P(1) = 6. Pagarem 6000 €.

   b. Quant ha de pesar cada robí perquè el preu del paquet sigui mínim? Quin és aquest preu mínim? [1 punt]

   Si anomenem x al pes del robí tailandès, tindrem:

   $$P(x) = 2(2-x)^2 + 4x^3 = 4x^3 + 2x^2 - 8x + 8.$$

   D'aquí $P'(x) = 12x^2 + 4x - 8 = 4(x+1)\left(x - \frac{2}{3}\right)$, que s'anul·la quan x = -1 i quan x = 2/3. Com que abans d'aquest valor P' < 0 i després és P' > 0, x = 2/3 correspon a un mínim. Per tant, e4l tailandès hauria de pesar 2/3 de gram, i l'africà 4/3 de gram. El preu, en aquest cas, serà $P\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{128}{27} \approx 4.74$ mil·lers d'euros.

---

19. PAU 2013 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 4

4. Una empresa agrícola ha recollit un total de 40 tones de fruita que produeixen un benefici de 0,80 euros/kg. Cada setmana que passa es produeix una pèrdua de 400 kg. de fruita, però el benefici augmenta en un cèntim per kg.
   a. Quin és el benefici obtingut si venem la fruita al cap de 9 setmanes? Quin percentatge de fruita hem hagut de llençar? *[1 punt]*
   b. Quina setmana de venda serà la que obté un benefici màxim? *[1 punt]*

a. El preu de la fruita passades 9 setmanes és 0,80 + 9.0,01 = 0,89 €/kg. Passat aquest temps l'empresa haurà de llençar 400.9=3600 kg de fruita. Per tant:

i) El benefici que s'ha obtingut és $36400 \cdot 0{,}89 = 32396\,€$.

ii) Ha calgut llençar $\frac{3600}{40000} \cdot 100 = 9\%$ de la fruita.

b. Si anomenem x al nombre de setmanes que han de passar obtenim:

$$B(x) = (0{,}80 + 0{,}01x)(40000 - 400x) = 32000 + 80x - 4x^2$$

Aleshores B'(x) = 80 – 8x, que s'anul·la quan x = 10. En tractar-se d'una paràbola amb coeficient de segon grau negatiu podem afirmar, sense fer operacions, que es tracta d'un màxim. Per tant, els màxims beneficis s'obtenen passades 10 setmanes.

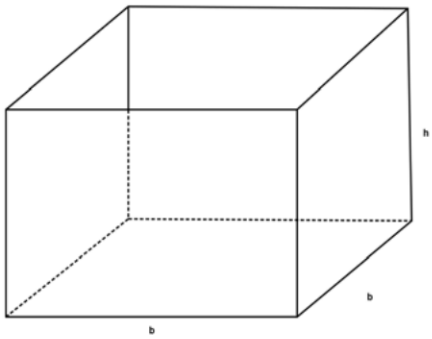
20. PAU 2013 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 3

3. En un hort hi ha plantades 50 pomeres. Cada arbre produeix 800 pomes. Per cada arbre addicional que hi plantem, la producció de cada arbre es redueix en 10 pomes. Quants arbres més ens cal plantar per a obtenir la producció més alta possible? Quina és aquesta producció? *[2 punts]*

Anomenarem x al nombre d'arbres addicionals que plantem. Aleshores, la producció en funció de x serà $P(x) = (50 + x)(800 - 10x) = 40000 + 300x - 10x^2$. La seva derivada és $P'(x) = 300 - 20x$, i s'anul·la a x = 15. Per a valors menors que aquest, la derivada és positiva i, per a valors més grans de 15, és positiva. Per tant, aquest valor correspon a un màxim de la funció. La producció màxima serà de 42.250 pomes.

21. PAU 2012 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 5

5. Disposem de 48 cm^2 de material per a fabricar una capsa de base quadrada, sense tapa. Calculeu les dimensions de la capsa de volum més gran que podem construir en aquestes condicions. Quin serà el volum de la capsa? *[2 punts]*



L'àrea total de la capsa serà: $4bh + b^2 = 48$, i el seu volum és $V = b^2 h$. Aïllant h de la primera equació obtenim $h = \frac{48 - b^2}{4b}$. Per tant, la funció que cal maximitzar és

$V(b) = b^2 \cdot \frac{48 - b^2}{4b} = \frac{1}{4}\left(48b - b^3\right)$. La seva derivada és $V'(b) = \frac{1}{4}\left(48 - 3b^2\right)$. Els seus extrems relatius són aquells valors tals que la derivada val zero:

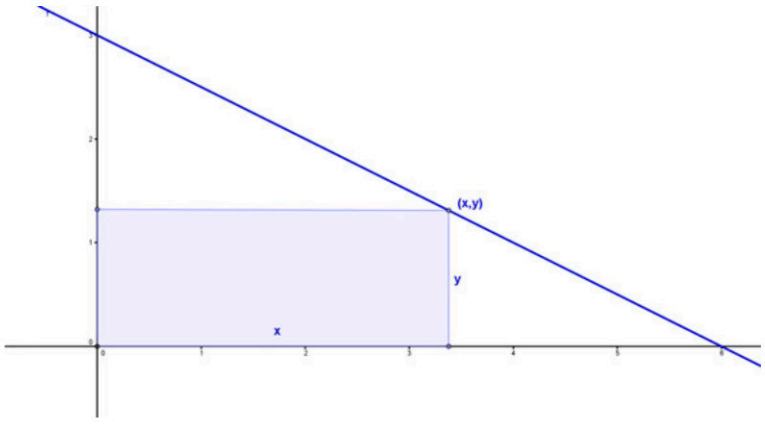
$$48 - 3b^2 = 0 \rightarrow b^2 = 16 \rightarrow b = \pm 4.$$

És clar que només ens interessa la solució positiva. Per a b = 4 obtenim h = 2. A més, per a valors més petits que b = 4 la derivada és positiva i per a valors més grans és negativa. Per tant, aquest valor és un màxim; la capsa més gran tindrà base de 4 cm. de costat i de 2 cm. d'alçada. El seu volum és de 32 cm^3.

22. PAU 2012 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 4

4. Un triangle té vèrtexs O(0,0), A(6,0), B(0,3).
   a. Dibuixeu-lo i escriviu l'equació de la recta que conté el segment AB. *[0,5 punts]*
   b. Considerem un punt P situat sobre el segment AB, i dibuixem el rectangle que té diagonal OP i dos costats sobre els eixos de coordenades. Determineu les coordenades de P que fan màxima l'àrea del rectangle. *[1,5 punts]*

a. L'equació de la recta que conté el segment AB és $y = -\frac{1}{2}x + 3$. El triangle, i el rectangle de què ens parlen a l'apartat b., són aquests:



b. Com que el punt (x,y) es troba sobre la recta, les seves coordenades han de ser de la forma $\left(x,-\frac{1}{2}x+3\right)$. L'àrea del rectangle és, per tant,

$$A(x)=x\left(-\frac{1}{2}x+3\right)=-\frac{1}{2}x^2+3x$$

$A'(x)=-x+3=0$ quan x = 3. A més, quan x < 3 la derivada positiva i quan x > 3 és negativa: x = 3 correspon a un màxim relatiu. El punt demanat és, per tant, $P\left(3,\frac{3}{2}\right)$.

23. PAU 2011 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 4

4.

Anomenarem x al primer nombre i y al segon. Aleshores l'enunciat es tradueix com:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y & = & 25 \\ S & = & 2x^2+3y^2 \end{array}\right\}.$$

D'aquí obtenim $S(x)=2x^2+3(25-x)^2=5x^2-150x+1875$. La funció derivada és $S'(x)=10x-150=10(x-15)$, que s'anul·la quan x = 15. Abans de x = 15 S' és negativa, i després és positiva. Per tant, x = 15, y = 10 correspon a un mínim.

24. PAU 2010 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4

Pregunta 4

a.

La funció cost mitjà serà, per tant, $Q(q)=\frac{q^2}{100}+4+\frac{20}{q}$. Per tant,

$Q(5)=\frac{25}{100}+4+\frac{20}{5}=8{,}25$;

$Q(20)=\frac{400}{100}+4+\frac{20}{20}=9$.

b.

$Q'(q)=\frac{q}{50}-\frac{20}{q^2}=\frac{q^3-1000}{50q^2}$. Aquesta derivada s'anul·la quan q = 10.

Si q < 10, Q' és negativa. Si q > 10, Q' és positiva. Per tant, q = 10 correspon a un mínim, i el cost corresponent és $Q(10)=7$.

25. PAU 2010 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 2

Pregunta 2

Les dimensions de la finestra seran de x dm. horitzontals per y dm. verticals. D'una banda tenim que $x \cdot y = 100$ d'on $y = \frac{100}{x}$. Per tant, el cost de la finestra serà $C(x) = 6x + \frac{2400}{x}$, funció de la que hem de trobar el seu mínim. Tindrem $C'(x) = 6 - \frac{2400}{x^2}$. Aquesta derivada s'anul·la quan x = 20, que correspon a un mínim ja que la funció C(x) és decreixent quan x < 20 i és creixent quan x > 20. Per tant, les dimensions de la finestra que la fan el més barata possible són de 20 dm. horitzontals per 5 dm. verticals.

26. PAU 2009 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 6

6. El preu de cost d'una unitat d'un cert producte és de 120 €. Si es ven a 150 € la unitat, el compren 500 clients. Per cada 10 € d'augment en el preu, les vendes disminueixen en 20 clients.

a) Trobeu una fórmula mitjançant la qual obtinguem els beneficis. [2 punts]
b) Calculeu a quin preu p per unitat hem de vendre el producte per a obtenir un benefici màxim. [1 punt]
c) En el cas anterior, trobeu el nombre d'unitats que es venen i calculeu el benefici màxim. [1 punt]

Solució:

Si es donen els beneficis en termes del preu p la solució és:

a) Sigui $c(p)$ el nombre de compradors en funció de p. Tindrem:
$c(p) = 500 - 2(p - 150)$ i $b(p) = c(p)(p - 120) = -2p^2 + 1040p - 96000$.
b) Per trobar el màxim de la paràbola fem la derivada i igualem a zero:
$b'(p) = -4p + 1040$, d'on resulta $p = 260€$. Es tracta d'un màxim ja que $b''(p) = -4$.
c) Substituint obtenim: $c(p) = 500 - 2(p - 150) = 500 - 2 \cdot 110 = 280$ i el benefici és $b(260) = 39200€$.

Alternativament, es pot fer utilitzant com a paràmetre el nombre x d'augments de 10€ a partir del preu inicial de 150€. Llavors la solució és:

a) Per un preu de $P(x) = 150 + 10x$, el nombre de compradors serà de $C(x) = 500 - 20x$. Per tant, el benefici serà de
$B(x) = C(x)(P(x) - 120) = (500 - 20x)(150 + 10x - 120) = 200(-x^2 + 22x + 75)$.
b) Per trobar el màxim de la paràbola fem la derivada i igualem a zero: $B'(x) = 200(-2x + 22)$, d'on resulta $x = 11$ i $P = P(11) = 150 + 11 \cdot 10 = 260€$. Es tracta d'un màxim ja que $B''(x) = -400$.
c) El nombre d'unitats que es venen és $C(11) = 500 - 20 \cdot 11 = 280$, i el benefici és $B(11) = 39200€$.

27. PAU 2008 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 6

6. Un equip de treballadors ha de fer la collita d'un camp de pomeres a partir de l'1 d'octubre i només poden treballar durant un dia. Si la collita es fa l'1 d'octubre, es colliran 60 tones i el preu serà de 2000 €/tona. Sabem que a partir d'aquest dia, la quantitat que es pot collir augmenta en una tona cada dia, però el preu de la tona disminueix en 20 €/dia.
a) Determineu la fórmula que expressa els ingressos que s'obtenen en funció del nombre de dies que es deixen passar des de l'1 d'octubre per fer la collita. [1 punt]
b) Trobeu quants dies han de passar perquè els ingressos per la collita siguin màxims. [1 punt]
c) Digueu quin és el valor màxim dels ingressos per la collita. [1 punt]
d) Trobeu quants dies han de passar perquè els ingressos per la collita siguin els mateixos que si es fes el dia 1 d'octubre. [1 punt]

a) La quantitat de tones que es cullen en funció del nombre t de dies que es deixen passar a partir de l'1 d'octubre és: $Q(t) = 60 + t$. El preu per tona és $P(t) = 2000 - 20t$. Per tant, els ingressos són:
$$\boxed{I(t) = Q(t)P(t) = (60+t)(2000 - 20t) = -20t^2 + 800t + 120000}.$$

b) La funció derivada és: $I'(t) = -40t + 800$. Per trobar el punt on els ingressos tenen un màxim relatiu cal que la derivada sigui 0. Per tant resulta $\boxed{t = 20 \text{ dies}}$. I realment és un màxim relatiu ja que $I''(t) = -40$ és negativa.

c) El valor màxim dels ingressos és $\boxed{I(20) = 80 * 1600 = 128000 €}$.

d) Perquè els ingressos tornin a ser els del dia 1 d'octubre cal que $f(t) = -20t^2 + 800t + 120000 = f(0) = 120000$.
O sigui $-20t^2 + 800t = 0$ i per tant $20t(-t + 40) = 0$, i la solució no nul·la és $\underline{t = 40 \text{ dies}}$.

28. PAU 2008 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 4

4. Una fàbrica de televisors ven cada aparell a 300 €. Les despeses de fabricar x televisors són $D(x) = 200x + x^2$, en què $0 \le x \le 80$.
a) Suposant que es venen tots els televisors que es fabriquen, doneu la funció dels beneficis que s'obtenen després de fabricar i vendre x televisors. [1 punt]
b) Determineu el nombre d'aparells que convé fabricar per obtenir el benefici màxim, i també quin és aquest benefici màxim. [1 punt]

Puntuació: Apartat a) 0.5 punts; apartat b) funció beneficis 0.5 punts; benefici màxim 1 punt. Total: 2 punts.

Solució: a) Els ingressos són $\boxed{I(x) = 300x}$.

b) El benefici és $\boxed{B(x) = 300x - (200x + x^2) = 100x - x^2}$. Per trobar el benefici màxim determinem la derivada i igualem a 0: $B'(x) = 100 - 2x$. Per tant l'extrem relatiu s'obté per $\boxed{x = 50}$. Es tracta òbviament d'un màxim ja que és una paràbola amb coeficient a negatiu (també es pot veure pel signe de la derivada segona que és negatiu). El benefici màxim és $\boxed{B(50) = 2500 €}$.

29. PAU 2006 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 5

5. Si el preu de l'entrada d'un cinema és de 6 €, hi van 320 persones. El propietari sap per experiència que per cada augment de 0,25 € en el preu de l'entrada hi van 10 espectadors menys. Trobeu:

a) la funció que determina el nombre d'espectadors en funció del preu de l'entrada;
b) la funció que determina els ingressos del cinema en funció del preu de l'entrada;
c) el preu de l'entrada per tal que els ingressos del propietari siguin màxims;
d) el nombre d'espectadors que aniran al cinema quan el preu sigui el que correspon als ingressos màxims i aquests ingressos màxims.

Puntuació cada apartat: 1 punt. Total: 4 punts.

Solució:

a) La funció és una recta que passa pel punt $(6,320)$ i té pendent $-\frac{10}{0,25}=-40$. Per tant és:

$$e(p)=320-40(p-6)=560-40p\,.$$

b) Els ingressos s'obtenen multiplicant el nombre d'espectadors pel preu:

$$i(p)=e(p)\cdot p=-40p^2+560p\,.$$

c) La funció que dóna els ingressos és una paràbola amb un màxim en el punt en què s'anul·la la derivada $i'(p)=-80p+560$, i que correspon a $p=7$ €.

d) Per aquest preu, el nombre d'espectadors resultant és: $e(7)=560-40\cdot 7=280$. Els ingressos màxims seran: $i(7)=280\cdot 7=1960$ €.

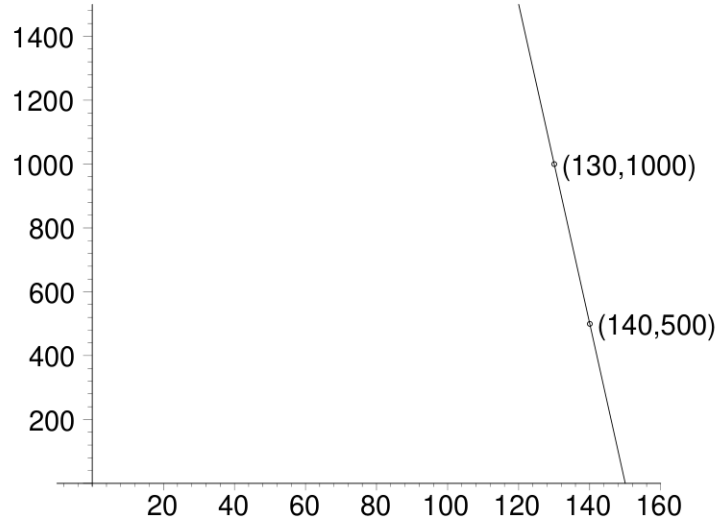
30. PAU 2005 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 5

5. Si una joguina es ven a 130 € la compren 1000 persones. Per cada euro que augmenta (o disminueix) aquest preu, disminueix (o augmenta), respectivament, el nombre de compradors en 50.

a) Feu un gràfic del nombre de joguines que es venen en funció del preu de venda i doneu la fórmula que ho expressa.
b) El preu de cost d'una joguina és de 80 €. Calculeu el preu p que dona un benefici total màxim.
c) Trobeu el nombre de joguines que es venen si el preu és p i calculeu el benefici màxim.

Puntuació: Apartat a) 2 punts; apartat b) 1 punt; apartat c) 1 punt. Total: 4 punts.

Solució: a) Gràfica del nombre de joguines que es venen en funció del preu:



L'equació de la gràfica serà: $\boxed{v(p)=1000-50(p-130)=-50p+7500}$.

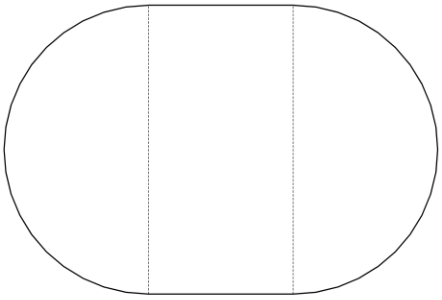
b) El benefici total serà el nombre de joguines venudes $v(p)$ multiplicat pel benefici en cada una que és $p-80$. Per tant la funció benefici total en termes del preu de venda serà:
$B(p)=v(p)\cdot(p-80)=(7500-50p)(p-80)=-50p^2+11500p-600000$.

La gràfica d'aquesta funció és una paràbola amb un màxim en el seu vèrtex que correspon a
$\boxed{p=\frac{11500}{100}=115\ €}$.

c) El nombre de joguines venudes serà $\boxed{v(115)=-50\cdot115+7500=1750}$, i el benefici màxim $\boxed{B(115)=(7500-50\cdot115)(115-80)=1750\cdot35=61250\ €}$.

31. PAU 2004 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 6

6. Es vol construir una piscina que tingui per base un rectangle i dos semicercles adjunts tal com s'indica a la figura següent:



Sabent que el perímetre de la piscina ha de ser de 30 m, calculeu les seves dimensions per tal que la superfície sigui màxima.

Puntuació: plantejament 2 punts; resolució 2 punts. Total: 4 punts. En cas d'error en els càlculs que portin a un resultat que no sigui un cercle, es descomptarà 1 punt.

Solució: Anomenem r al radi dels semicercles i x a la distància entre els dos centres dels semicercles. El perímetre és $30 = 2\pi r + 2x$, que ens permet expressar x en termes de r. Tindrem: $x = 15 - \pi r$. La superfície és:

$$s = \pi r^2 + 2rx = \pi r^2 + 2r(15 - \pi r) = 30r - \pi r^2 .$$

Per trobar el valor màxim derivem i igualem a 0 la derivada: $s'(x) = 30 - 2\pi r$. I finalment $30 - 2\pi r = 0$, dóna $\boxed{r = \frac{15}{\pi} \approx 4.77}$ m, que determina un valor de $\boxed{x = 0}$. Per tant, la piscina ha de ser circular.

32. PAU 2003 · Setembre · Sèrie única · Exercici 5

PROBLEMES

5. Disposem de material per a poder impermeabilitzar 200 m^2 de superfície. Volem fer una bassa de base rectangular en la qual la llargada mesuri el triple que l'amplada i amb la profunditat adequada per a gastar tot el material. Interessa que el volum d'aigua que càpiga a la bassa sigui màxim.

a) Escriviu la relació que hi ha entre l'altura i el costat petit de la base de la bassa.
b) Escriviu la funció que dóna la capacitat de la bassa en funció del costat petit de la base.
c) Calculeu les dimensions de la bassa per tal que la capacitat sigui màxima. (Els resultats s'han de precisar fins als centímetres).
d) Determineu-ne el volum.

Solució:

a) Anomenem x al costat petit de la base i y a la profunditat. La superfície total a impermeabilitzar és $S = 3x \cdot x + 2x \cdot y + 2 \cdot 3x \cdot y = 3x^2 + 8xy$, que ha de ser igual a 200. Per tant la relació demanada és $\boxed{3x^2 + 8xy = 200}$.

b) El volum de la bassa, expressat en termes de x, serà

$$\boxed{V = 3x \cdot x \cdot y = 3x^2 y = 3x \cdot \frac{200 - 3x^2}{8}}.$$

c) Per tal que la capacitat sigui màxima igualem la derivada a 0 per obtenir els extrems relatius. $V'(x) = \frac{3}{8}\left(200 - 9x^2\right)$, i igualant a 0 obtenim $x^2 = \frac{200}{9}$. Dels dos valors de x, únicament un és positiu i té sentit en el problema. Per tant, $V(x)$ té un extrem relatiu per $\boxed{x = \frac{10\sqrt{2}}{3} = 4,71 \text{ m}}$. Es tracta d'un màxim ja que la funció és una paràbola amb vèrtex cap a munt (el signe del coeficient de x^2 és negatiu). Per tant és el valor buscat. El costat llarg serà $\boxed{3x = 10\sqrt{2} = 14,14 \text{ m}}$, i la profunditat $\boxed{y = \frac{200 - 3x^2}{8x} = \frac{200 - \frac{200}{3}}{\frac{80\sqrt{2}}{3}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} = 3,54 \text{ m}}$.

d) Finalment el volum és $\boxed{V = \frac{10\sqrt{2}}{3} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{4} = \frac{500\sqrt{2}}{3} = 235,702 \text{ m}^3}$.

Puntuació de cada apartat 1 punt. Total: 4 punts.

33. PAU 2003 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 6

11. Amb un llistó de fusta de 300 cm de llarg volem fabricar el marc d'un quadre.

a) Determineu la relació que hi ha entre la base i l'alçada del marc.
b) Determineu la funció que expressa la superfície del quadre en termes de la base del marc.
c) Feu un gràfic d'aquesta funció on es posin de manifest els seus intervals de creixement i decreixement i els extrems relatius.
d) Trobeu les dimensions del marc que fan màxima la superfície del quadre. Trobeu el valor de la superfície.

Puntuació de cada apartat 1 punt. Total: 4 punts.

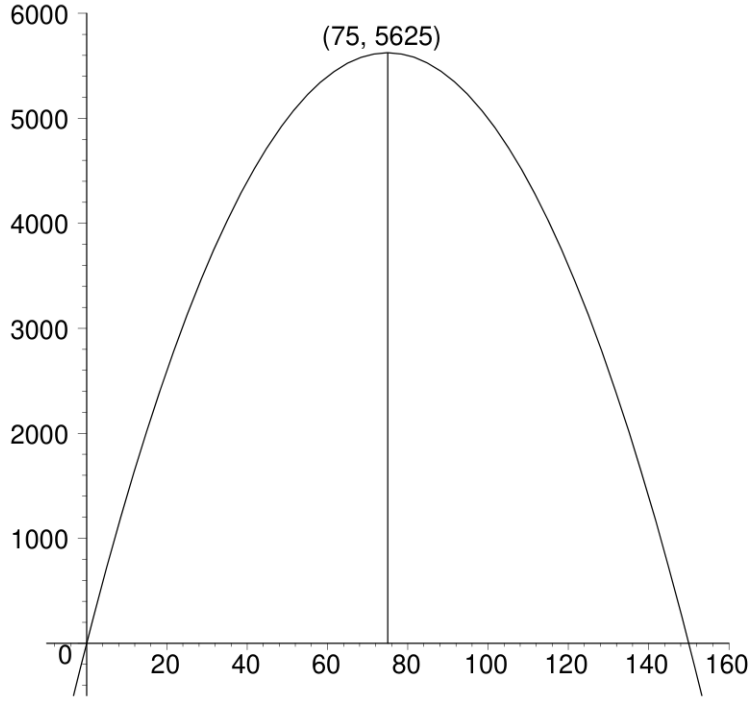
Solució:

a) Anomenant x a la base del marc i y a l'alçada tenim $2(x+y)=300$, que simplificada dóna: $\boxed{x+y=150}$.

b) La superfície del quadre expressada en termes de x resulta

$$\boxed{S(x)=xy=x(150-x)=-x^2+150x}$$

c) El gràfic de $S(x)$ és una paràbola. El vèrtex (màxim) s'obté igualant la derivada $S'(x)=-2x+150$ a 0, d'on resulta el punt $(75,5625)$. Les interseccions amb l'eix de les x són $x=0$ i $x=150$. Per tant el gràfic és el següent:



d) Com hem vist a l'apartat c) el màxim de $S(x)$ és el punt $(75,5625)$. Es tracta realment d'un màxim ja que la paràbola té el coeficient de x^2 negatiu. El valor de la superfície és $\boxed{S(75)=5625\ \text{cm}^2}$.

34. PAU 2002 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 5

5. El preu de cost d'una joguina és de 80 €. Venuda a 130 € la compren 1000 persones. Per cada € que augmenta o disminueix aquest preu, el nombre de compradors disminueix o augmenta, respectivament, en 60.

a) A quin preu s'ha de vendre la joguina per obtenir un benefici màxim?

b) Calculeu també el benefici màxim i el nombre de compradors corresponent.

Puntuació: Plantejament: 2 punts. Apartats a) i b): 1 punt cadascun. Total: 4 punts. Sigueu benvolents amb els arrodoniments a cèntim d'euro.

Solució: Fem un esquema del plantejament, essent x el sobrepreu sobre els 130 €.

Preu de venda/unitari	Benefici/unitari	Nombre compradors	Benefici total
130	50	1000	$50\cdot 1000 = 50000$
$130+x$	$50+x$	$1000-60x$	$(50+x)(1000-60x)$

Per tant, el benefici és

$$B(x) = 50000 - 2000x - 60x^2$$

Hem de trobar el màxim de la paràbola. La derivada de $B(x)$ és

$$B'(x) = -120x - 2000$$

Igualant a zero resulta:

$$x = -\frac{2000}{120} = -16,667$$

que correspon a un benefici màxim, ja que B ve donat per una paràbola amb coeficient de x^2 negatiu. Així, el preu de venda òptim és $\boxed{P_0 = 130 - 16,667 = 113,33€}$ i correspon a un nombre de compradors $\boxed{C_0 = 1000 - 60\cdot(-16,667) = 2000}$ i a un benefici

$$\boxed{B_0 = 33,33\cdot 2000 = 66660,00€}$$

35. PAU 2001 · Setembre · Sèrie única · Exercici 1 (Problemes)

Problemes

1. a) $x = 1.200 - 12p$. [0,5 punts]

   b) $C(p) = 13.250 - 120p$. [0,5 punts]

   c) $I(p) = x\cdot p = -12p^2 + 1.200p$. [0,5 punts]

   d) $B(p) = I(p) - C(p) = -12p^2 + 1.320p - 13.250$. [0,5 punts]

   e) Perquè el benefici sigui màxim cal que la derivada s'anul.li:

   $$B' = -24p + 1.320$$

   Per $B' = 0$ el preu és $\boxed{p = 55}$ milers de ptes.

   El benefici corresponent és $\boxed{B(55) = 23.050}$ milers de ptes i el nombre d'unitats venudes és $\boxed{x(55) = 540}$ unitats . [2 punts]

36. PAU 2001 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 1 (Problemes)

1. a) El cost unitari de cada peça és:

$$Q(x)=\frac{C(x)}{x}=\frac{2x^2+20x+3200}{x}=2x+20+\frac{3200}{x}$$

Per trobar els extrems relatius de $Q(x)$ hem d'igualar la derivada a zero.

$$Q'(x)=2-\frac{3200}{x^2}$$

Posant $Q'(x)=0$ resulta $x^2=1600$ i $x=\pm 40$. De les dues solucions, únicament té sentit $x=40$. Com que

$$Q''(x)=\frac{6400}{x^3}$$

i $Q''(40)>0$, $x=40$ correspon a un mínim. [3 punts]

b) El cost diari és: $C(40)=7.200$ ptes. [0,5 punts]

c) El preu de cost unitari és: $Q(40)=180$ ptes. [0,5 punts]