Matemàtiques aplicades a les ciències social

Funcions: anàlisi d'una funció donada

Solucions · 162 exercicis

Proves d'accés a la universitat (PAU) de Catalunya. Ordenats del més recent al més antic.
Retalls dels exàmens i pautes oficials (selecat.cat / universitats.gencat.cat).

1. PAU 2026 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 1

Exercici 1

a) Comencem calculant l'ingrés setmanal en funció del preu.

$$I(p) = p \cdot d(p) = p\,(500 - 10p - p^2) = 500p - 10p^2 - p^3,$$

per a valors de p tals que $0 < p < 15$.

Per a trobar el màxim, hem de calcular la derivada d'aquesta funció

$$I'(p) = 500 - 20p - 3p^2.$$

L'igualem a zero, $I'(p) = 0$,

$$500 - 20p - 3p^2 = 0.$$

I resolem l'equació de segon grau

$$p = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4(-3)(500)}}{2(-3)} = \frac{20 \pm \sqrt{6400}}{2(-3)} = \frac{20 \pm 80}{-6}.$$

Trobem dues solucions, $-\frac{50}{3}$ i 10. En el context del problema, només té sentit la solució positiva $p = 10$ €.

Com que la derivada és contínua, per a comprovar que efectivament es tracta d'un màxim, estudiem el signe de la derivada abans i després d'aquest valor:

$$I'(9) = 77 \; i \; I'(11) = -83.$$

Observem, per tant, que la funció és creixent per a valors inferiors a $p = 10$ i és decreixent per a valors superiors. Per tant, a $p = 10$ hi trobem un màxim. La demanda quan $p = 10$ és

$$d(10) = 500 - 10 \cdot 10 - 10^2 = 300 \text{ unitats.}$$

I l'ingrés setmanal amb aquest preu serà

$$I(10) = 10 \cdot 300 = 3\,000 \text{ €}.$$

Hem obtingut, per tant, que l'ingrés màxim s'obté amb un preu de 10 €, amb el qual obtenim una demanda de 300 unitats i uns ingressos de 3 000 €.

b) Per tal de calcular l'elasticitat-preu comencem calculant la derivada de la demanda

$$d'(p) = -10 - 2p.$$

Ara apliquem la fórmula que ens donen per a trobar l'elasticitat-preu de la demanda

$$E(p) = \frac{p}{d(p)} qd'(p) = \frac{p \cdot (-10 - 2p)}{500 - 10p - p^2}, \qquad 0 < p < 15.$$

Ara calculem el valor de l'elasticitat de la demanda per als dos preus que ens demanen.

$$E(5) = -\frac{4}{17} = -0{,}2353$$

i

$$E(10) = -1.$$

Observem que el valor de l'elasticitat de la demanda és de -0,2353 per a un preu de 5 € i de -1 per a un preu de 10 €.

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara.

a) Obtenció de l'equació de l'ingrés setmanal: 0,25 punts. Càlcul de la derivada: 0,25 punts. Obtenció del màxim: 0,25 punts. Justificació de l'afirmació que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Obtenció de la demanda associada a aquest preu: 0,25 punts. Obtenció de l'ingrés associat a aquest preu: 0,25 punts.

b) Obtenció de l'expressió que dona l'elasticitat de la demanda: 0,5 punts. Càlcul del valor de l'elasticitat de la demanda pels preus de 5 € i de 10 €: 0,25 punts, cadascun.

OPCIÓ B

a) En primer lloc, hem de resoldre l'equació $f(t) = 20$, és a dir,

$$\frac{100t}{t^2 + 4} = 20.$$

Obtenim

$$100t = 20(t^2 + 4).$$

Simplificant i reordenant els termes, ens queda l'equació de segon grau

$$t^2 - 5t + 4 = 0.$$

Les solucions d'aquesta equació són $t = 1$ i $t = 4$.
Per tant, el nombre de famílies inscrites als tallers és exactament 20 el primer i el quart dia posteriors a l'inici de la campanya.

Per determinar el valor màxim de la funció, calculem la derivada de $f(t)$ i la igualem a zero:

$$f'(t) = \frac{100(t^2 + 4) - 100t \cdot 2t}{(t^2+4)^2}.$$

Imposant $f'(t) = 0$ i simplificant el numerador, obtenim

$$100(t^2 + 4 - 2t^2) = 0,$$

és a dir,

$$100(4 - t^2) = 0.$$

Aquesta equació té dues solucions: $t = 2$ i $t = -2$. Atès que, en el context del problema $t \geq 0$, es descarta la solució negativa.
Utilitzant la continuïtat de la derivada, per a comprovar que $t = 2$ correspon a un màxim, estudiem el signe de la derivada:
si $0 < t < 2$, aleshores $f'(t) > 0$ i la funció és creixent;
si $t > 2$, aleshores $f'(t) < 0$ i la funció és decreixent.
Per tant, en $t = 2$ la funció assoleix un màxim. Calculem ara el valor d'aquest màxim:

$$f(2) = \frac{100 \cdot 2}{2^2 + 4} = 25.$$

Així, el nombre màxim de famílies inscrites és de 25 i s'assoleix el segon dia des de l'inici de la campanya.

b) Hem de calcular ara el producte de la matriu de repartiment percentual pel vector d'hores totals:

$$R \cdot h = \begin{pmatrix} 0{,}50 & 0{,}30 & 0{,}20 \\ 0{,}30 & 0{,}50 & 0{,}20 \\ 0{,}20 & 0{,}20 & 0{,}60 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 21 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21{,}3 \\ 20{,}7 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

El vector obtingut indica el nombre total d'hores que ha dedicat cadascun dels tres amics a la preparació de les activitats: la primera component correspon a la Carme; la segona, al Saïd, i la tercera, al Martí.
Observem, per tant, que la persona que ha dedicat més hores a la preparació és la Carme, amb 21,3 hores.

Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara.

a) Plantejament de l'equació que cal resoldre: 0,25 punts. Obtenció de les dues solucions: 0,5 punts. Càlcul de la derivada: 0,25 punts. Obtenció i comprovació de l'extrem: 0,25 punts. Obtenció del nombre màxim de famílies inscrites: 0,25 punts.

b) Càlcul del producte de matrius: 0,5 punts. Interpretació del producte: 0,25 punts. Obtenció de la persona que hi ha dedicat més hores: 0,25 punts.

3. PAU 2026 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

1.

1.1. Com que $f(0) = 700$ i $f(10) = 3.200$, a l'inici té 700 seguidors i al cap de 10 setmanes en té 3.200.

Comencem calculant la derivada de la funció

$$f'(t) = 30t^2 - 240t + 450 = 30(t^2 - 8t + 15).$$

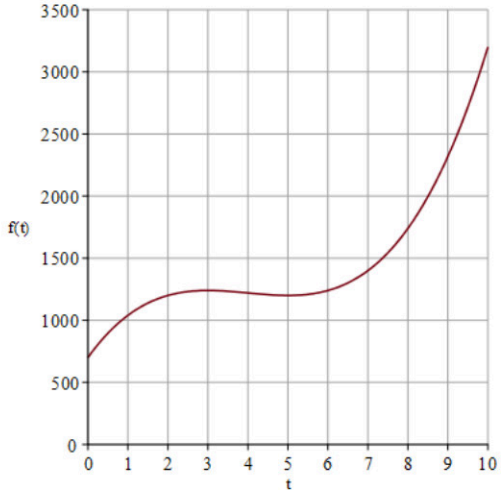
Igualant la derivada a zero s'obtenen dues solucions, $t = 3$ i $t = 5$. Com que la derivada és contínua per estudiar el creixement i el decreixement, només hem d'estudiar el signe de la derivada en aquests intervals:

$(0,3)$	$t = 3$	$(3,5)$	$t = 5$	$(5,10)$
$f' > 0$	$f' = 0$	$f' < 0$	$f' = 0$	$f' > 0$
$f \nearrow$		$f \searrow$		$f \nearrow$

Per tant, concloem que la funció f és creixent en els intervals $(0,3) \cup (5,10)$ i que és decreixent en l'interval $(3,5)$.

D'altra banda, veiem que la funció té un màxim local al punt $\big(3, f(3)\big) = (3, 1240)$ i un mínim local al punt $\big(5, f(5)\big) = (5,1200)$.

Un esbós de la gràfica és:



1.2. A partir de la informació obtinguda en l'apartat anterior, veiem que el vídeo polèmic el va penjar a la setmana 3 i en aquell moment tenia 1.240 seguidors. El vídeo que té molt èxit el penja a la setmana 5. Clarament, el moment en què té més seguidors és a la setmana 10, amb 3.200 seguidors.

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprar la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressar la solució de manera clara.

1.1. Trobar el nombre de seguidors a l'inici: 0,25 punts. Trobar el nombre de seguidors al cap de les 10 setmanes: 0,25 punts. Càlcul de la derivada: 0,25 punts. Càlcul dels extrems locals: 0,25 punts. Obtenció dels intervals de creixement i decreixement: 0,25 punts. Esbós de la gràfica de la funció: 0,25 punts.

1.2. Obtenció de la setmana en què penja el vídeo polèmic: 0,25 punts. Obtenció del nombre de seguidors que té en aquell moment: 0,25 punts. Obtenció de la setmana en què penja el vídeo que té molt d'èxit: 0,25 punts. Obtenció del moment en què té més seguidors: 0,25 punts.

4. PAU 2026 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 4 (Opció B)

OPCIÓ B

4.1. Calculem les funcions derivades per trobar els punts on s'assoleixen el màxim de beneficis de cada un dels dos productes

$$p'(x) = 3 - 2x$$

$$b'(x) = -\frac{4}{5}x + 2$$

Igualant aquestes derivades a 0, trobarem els candidats a màxim, que són

$$p'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1{,}5$$

$$b'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2{,}5$$

Observem que en aquests punts hi ha un màxim perquè si mirem el signe de les derivades la primera passa de ser positiva a negativa en $x = 1{,}5$ i el mateix passa amb la segona en $x = 2{,}5$. Per tant les funcions passen de ser creixents a ser decreixents en aquests punts i, per tant, hi ha un màxim.

Per tant, amb els paraigües plegables s'assoleix el màxim de beneficis amb menys paraigües. Caldrà fabricar 150 paraigües plegables i 250 de bastó.

Ara estudiem quin és el valor màxim per les dues funcions, i obtenim

$$p(1{,}5) = 2{,}25$$

$$b(2{,}5) = 2{,}5$$

Per tant, encara que els paraigües plegables assoleixin el màxim de beneficis amb menys quantitat de paraigües, els beneficis obtinguts amb els paraigües bastó és superior. Concretament obtenim un benefici de 2250 euros amb els paraigües plegables i un benefici de 2500 euros amb els paraigües bastó.

4.2. Considerem els esdeveniments

T =el paraigua és de tela recoberta de tefló,

I =el paraigua és de tela impregnada i

D =la tela del paraigua és defectuosa i no protegeix de la pluja.

Per les dades de l'enunciat sabem que $P(T) = \frac{60}{60+80} = \frac{3}{7}$, perquè tenim 60 paraigües de tefló i 80 de tela impregnada entre els dos lots i, de la mateixa manera, $P(I) = \frac{4}{7}$.

També sabem que $P(D|T) = 0.02$ (perquè el 98% de paraigües de tefló aguanten bé la pluja) i que $P(D|I) = 0.05$.

Pel la fórmula de Bayes sabem que la probabilitat demanada es pot calcular de la següent manera

$$P(T|D) = \frac{P(D|T) \cdot P(T)}{P(D)}$$

Ens falta saber la probabilitat del denominador però per la fórmula de les probabilitats totals (o fent un diagrama d'arbre) obtenim que

$$P(D) = P(D|T) \cdot P(T) + P(D|I) \cdot P(I)$$

És a dir,

$$P(D) = 0{,}02 \cdot \frac{3}{7} + 0{,}05 \cdot \frac{4}{7} = 0{,}0371.$$

Per tant,

$$P(T|D) = \frac{0{,}02 \cdot \frac{3}{7}}{0{,}037} = 0{,}2310.$$

És a dir, la probabilitat de que el paraigua defectuós que hem agafat sigui de tela recoberta de tefló és de 0,231.

Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara. Si no és el cas es pot descomptar fins a un màxim de 0,25 punts.

4.1 Càlcul de les derivades: 0,25 punts. Obtenció dels punts on s'assoleixen els màxims: 0,25 punts. Justificació de que es tracta de màxims: 0,25 punts. Resposta correcta a la primera pregunta: 0,25 punts. Resposta correcta a la segona pregunta: 0,25 punts.

4.2 Assignació correcta d'esdeveniments: 0.25 punts. Càlcul de la probabilitat que el paraigua sigui defectuós: 0,5 punts. Càlcul de la probabilitat demanada: 0.5 punts.

5. PAU 2025 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2

2.

a) En primer lloc, hem de calcular el valor de la inversió a l'inici del dia, és a dir, quan $x = 0$. Observem que $f(0) = 250$; per tant, el valor inicial és de 250 euros. Al final del dia, quan $x = 24$ el valor de la inversió és de $f(24) = 1978$ euros. Per tant, durant el dia ha tingut un benefici de $1978 - 250 = 1728$ euros.

Per saber en quin instant del dia s'assoleix el valor màxim, comencem calculant la derivada de la funció

$$f'(x) = x^2 - 35x + 300$$

Si igualem la derivada a zero obtenim $x = \frac{35 \pm \sqrt{25}}{2}$; és a dir, tenim dues solucions $x = 15$ i $x = 20$. Per veure si són màxims o mínims relatius, podem estudiar el signe de la derivada. Veiem que

- $f'(x) > 0$ per $0 \leq x < 15$; per tant, aquí la funció és creixent.
- $f'(x) < 0$ per $15 < x < 20$; per tant, aquí la funció és decreixent.
- $f'(x) > 0$ per $20 < x \leq 24$; per tant, aquí la funció és creixent.

Obtenim, per tant, que la funció té un màxim relatiu en $x = 15$ i un mínim relatiu en $x = 20$.

L'instant en què la inversió assolirà el valor màxim és el màxim absolut de la funció $f(x)$ en el domini en què està definida $x \in [0,24]$. A partir dels intervals de creixement i decreixement que hem obtingut, aquest màxim absolut només es podrà assolir o bé en el màxim relatiu $x = 15$ o bé en l'extrem superior de l'interval de definició $x = 24$.

Observem que $f(15) = 1937{,}5$; per tant, l'instant en què s'assoleix el màxim és al final del dia i aquest valor màxim és de $f(24) = 1978$ euros.

b) Per saber l'instant en què el valor de la inversió ha estat mínim, a partir de l'estudi que hem fet dels intervals de creixement i decreixement de la funció, hem de comprovar el valor de la inversió en l'instant en què s'assoleix el mínim relatiu i en l'instant inicial. Observem que en $x = 20$ el valor de la inversió és de $f(20) = 1916{,}67$ euros.

Per tant, el mínim absolut s'assoleix en l'instant inicial $f(0) = 250$ euros, i, en particular, no hi ha cap instant en què el valor de la inversió hagi estat negatiu.

Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara.

a) Obtenció del valor inicial: 0,25 punts. Càlcul dels beneficis al llarg del dia: 0,25 punts. Càlcul de la derivada: 0,25 punts. Trobar els punts on s'assoleixen els extrems relatius: 0,25 punts. Obtenció del màxim absolut i del valor màxim: 0,5 punts.

b) Obtenció del mínim absolut i del valor mínim: 0,5 punts. Justificar que en cap moment la inversió ha estat negativa: 0,5 punts.

6. PAU 2024 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 1

1.

a) Primer, ens demanen el valor de la funció el dia 45:

$B(45) = -2.325$, per tant aquest dia l'empresa té unes pèrdues de 2.325 euros.

Hem de saber ara quins dies l'empresa ha tingut uns beneficis de 4000 euros. Per tant, hem de trobar els valors de x per als quals

$$B(x) = 4000 \rightarrow -x^2 + 260x - 12000 = 4000 \rightarrow x^2 - 260x + 16000 = 0$$

$$\rightarrow x = \frac{260 \pm \sqrt{3600}}{2}$$

que té dues solucions, $x = 100$ i $x = 160$. Per tant, els dies 100 i 160 ha tingut un benefici de 4000 €.

b) Per trobar el màxim, comencem calculant la derivada de la funció que ens dona els beneficis

$$B'(x) = -2x + 260$$

Igualant-la a zero, trobem un extrem relatiu en $x = 130$. Observem que en aquest punt hi ha un màxim perquè la funció $B'(x)$ és positiva per a valors inferiors a $x = 130$ i, per tant, la funció $B(x)$ és creixent, i $B'(x)$ és negativa per a valors superiors a $x = 130$ i, per tant, $B(x)$ és decreixent.

Els beneficis aquest dia seran de $B(130) = 4900$ euros.

Per tant, el dia 130 l'empresa té el benefici màxim i aquest benefici és de 4900 euros.

Sabem que l'empresa no té pèrdues si $B(x) \geq 0$. Si resolem l'equació B(x) = 0 obtenim

$$-x^2 + 260x - 12000 = 0 \rightarrow x = \frac{260 \pm \sqrt{19600}}{2}$$

que té per solucions $x = 60$ i $x = 200$. Observem, substituint en un punt intermedi com, per exemple, el valor en $x = 130$ que ja hem calculat abans, que la paràbola és positiva entre aquests dos valors. Per tant, l'empresa no ha tingut pèrdues entre els dies 60 i 200.

Criteris de correcció:

a) Trobar les pèrdues del dia 45: 0,5 punts. Trobar els dos dies que el benefici ha estat de 4.000 euros: 0,5 punts.

b) Calcular la derivada: 0,25 punts. Trobar el punt crític: 0,25 punts. Justificar que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Calcular el benefici màxim: 0,25 punts. Calcular l'interval de dies entre els quals l'empresa no ha tingut pèrdues: 0,5 punts.

---

7. PAU 2024 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

1.

a)

La tarifa de la companyia A segueix la funció $f(x) = 0{,}4x + 20$. Mentre que la tarifa de la companyia B és $g(x) = 0{,}01x^2 + 0{,}1x + 10$.

Per trobar el preu de les tarifes si fem un recorregut de 10 o de 80 km, només hem de substituir:

$$f(10) = 24, \qquad g(10) = 12.$$

Per tant, si fem un recorregut de 10 km la tarifa de la companyia A ens surt 12 euros més cara que la de la companyia B. D'altra banda,

$$f(80) = 52, \qquad g(80) = 82.$$

En aquest cas la tarifa de la companyia A és 30 euros més econòmica que la tarifa de la companyia B.

Si substituïm $x = 0$ a la tarifa de la companyia B, observem que $g(0) = 10$, per tant, efectivament hi ha un cost fix de 10 euros només pel sol fet de pujar al taxi.

b)

Per trobar el valor per al qual les dues tarifes coincideixen, hem de resoldre l'equació:

$$0{,}4x + 20 = 0{,}01x^2 + 0{,}1x + 10$$

$x^2 - 30x - 1000 = 0$ que té per solucions $x = 50$ i $x = -20$.

Descartem la segona solució perquè no té sentit en el context del problema i obtenim que per a una distància de $x = 50$ km les dues tarifes coincideixen.

Per a distàncies entre 0 i 50 km observem que la segona tarifa és inferior a la primera. La diferència de preu entre totes dues tarifes si $x \in [0{,}50)$ vindrà donada per la funció:

$$D(x) = 0{,}4x + 20 - (0{,}01x^2 + 0{,}1x + 10) = -0{,}01x^2 + 0{,}3x + 10.$$

Per trobar el màxim, calculem la derivada

$$D'(x) = -0{,}02x + 0{,}3,$$

la igualem a zero i obtenim $x = 15$.

Observem que es tracta d'un màxim perquè la derivada és positiva per a valors inferiors a $x = 15$, i per tant, la diferència de preu és creixent, mentre que és negativa per a valors superiors a $x = 15$ i, per tant, la funció $D(x)$ és decreixent.

Quan $x = 15$ la diferència de preu entre una tarifa i l'altra és de $D(15) = 12{,}25$ euros.

a) Trobar les tarifes de les dues companyies si fem un recorregut de 10 km: 0,25 punts. Trobar les tarifes de les dues companyies per al recorregut de 80 km: 0,25 punts. Calcular la diferència en els dos casos: 0,25 punts. Calcular el cost fix de la tarifa de la companyia B: 0,25 punts.

b) Calcular el valor per al qual les dues tarifes coincideixen: 0,5 punts. Trobar la funció que ens dona la diferència entre les dues tarifes: 0,25 punts. Trobar el valor per al qual s'assoleix el màxim: 0,25 punts. Justificar que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Trobar el valor de la diferència màxima de tarifes per a distàncies inferiors a 50 km: 0,25 punts.

8. PAU 2023 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 2

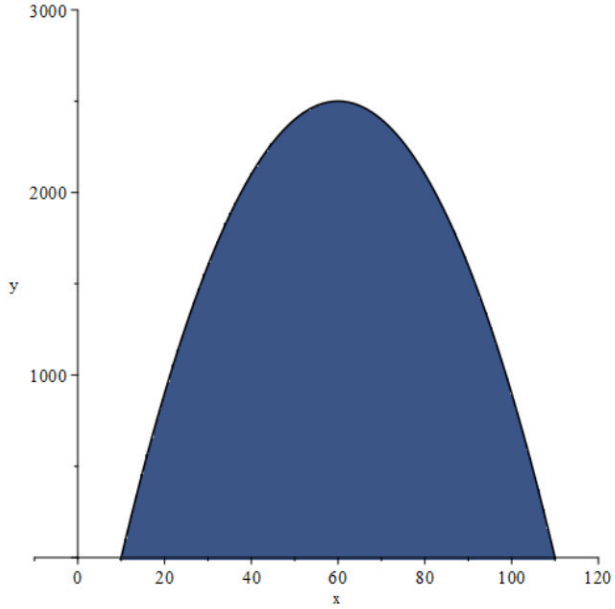
2.

a) Els beneficis de l'empresa venen donats per la diferència entre els ingressos per les vendes i les despeses de producció:

$$f(x) = 35000x - (x^2 + 34880x + 1100) = -x^2 + 120x - 1100$$

Per saber quan la fàbrica no té pèrdues hem de resoldre la inequació següent:

$$-x^2 + 120x - 1100 \geq 0$$



Comencem resolent l'equació $-x^2 + 120x - 1100 = 0$, que té per solucions $x = 10$ i $x = 110$. Com que es tracta d'una paràbola amb el coeficient principal negatiu, la solució de la inequació és $x \in [10,110]$.
Per tant la producció ha d'estar entre 10 i 110 vehicles, ambdós inclosos, per tal de no tenir pèrdues.

b) Per a obtenir el màxim igualem a zero la derivada de la funció que ens dona els beneficis:

$$f'(x) = -2x + 120$$
$$-2x + 120 = 0$$
$$x = 60$$

Per tal de justificar que es tracta d'un màxim podem fer servir la taula de monotonia:

	[0,60)	60	(60,110]
$f'(x)$	Positiu	Zero	Negatiu
$f(x)$	Creixent	Màxim	Decreixent

Per tant, cal fabricar 60 vehicles i el benefici obtingut serà de $f(60) = 2500$ euros.

a) Trobar la funció que dona els beneficis: 0,5 punts. Resoldre l'equació: 0,5 punts. Justificar que la solució està entre 10 i 100: 0,25 punts.

b) Calcular la derivada: 0,5 punts. Trobar el punt crític: 0,25 punts. Justificar que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Calcular el benefici màxim: 0,25 punts.

---

9. PAU 2023 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 4

4.

a) Per saber el nombre d'infectats les setmanes 1 i 2 hem de calcular:

$f(1) = \frac{30}{1-2+4} = 10$ milers d'infectats i

$f(2) = \frac{30 \cdot 2}{4-4+4} = 15$ milers d'infectats.

Per saber què passarà a llarg termini hem de calcular el límit

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{30t}{t^2 - 2t + 4} = \lim_{t \to +\infty} \frac{30t}{t^2} = 0$$

Per tant, a llarg termini, la infecció desapareixerà.

b) Per trobar on s'assoleix el màxim comencem calculant la derivada de la funció

$$f'(t) = \frac{120 - 30t^2}{(t^2 - 2t + 4)^2}$$

Si la igualem a zero obtenim com a possibles extrems $t = -2$ (que no té sentit en el context del problema, ja que $t \geq 0$) i $t = 2$.
Com que $f'(1) > 0, f'(3) < 0$ deduïm que el màxim nombre de malalts s'obté quan han passat dues setmanes. És un màxim absolut ja que la funció creix fins a $t = 2$ i decreix a partir d'aquest valor.

El nombre d'infectats aquella setmana és de $f(2) = 15$ milers de persones.

a) Càlcul del nombre d'infectats la primera i segona setmanes: 0,25 punts cadascun. Càlcul del límit: 0,5 punts

b) Càlcul de la derivada: 0,5 punts. Obtenció del punt on s'assoleix el màxim: 0,5 punts. Justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Càlcul del nombre d'infectats aquella setmana: 0,25 punts.

---

10. PAU 2023 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 5

5.

a) Comencem calculant els quilos de menjar que es van gastar els dos dilluns:

$$f(1) = 10\left(-\frac{1^3}{8} + \frac{3\cdot 1^2}{2} - \frac{9\cdot 1}{2} + 10\right) = \frac{550}{8} = \frac{275}{4} = 68{,}75 \text{ kg}$$

$$f(8) = 10\left(-\frac{8^3}{8} + \frac{3\cdot 8^2}{2} - \frac{9\cdot 8}{2} + 10\right) = 60 \text{ kg}$$

Ara hem de trobar quin dia es van gastar 100 kg de menjar:

$$10\left(-\frac{t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} + 10\right) = 100 \rightarrow -\frac{t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} + 10 = 10$$

$$\rightarrow -\frac{t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} = 0 \rightarrow -t^3 + 12\,t^2 - 36\,t = 0$$

$$\rightarrow -t(t^2 - 12\,t + 36) = 0 \rightarrow -t\,(t-6)^2 = 0 \rightarrow t = 0 \text{ i } t = 6$$

Com que $t = 0$ no és del domini d'aquesta funció, la solució és $t = 6$, és a dir, el dissabte es van gastar 100 kg de menjar.

b) Per buscar els extrems relatius de $f(t)$, cal igualar a zero la derivada:

$$f'(t) = 10\left(-\frac{3t^2}{8} + 3\text{t} - \frac{9}{2}\right) = 0 \rightarrow 3t^2 - 24t + 36 = 0 \rightarrow t^2 - 8t + 12 = 0 \rightarrow$$

$$(t-6)\cdot(t-2) = 0 \rightarrow t = 6 \text{ i } t = 2$$

Ara cal comprovar quin és el màxim i quin és el mínim:

	1	(1, 2)	2	(2, 6)	6	(6, 8)	8
$f'(t)$		-	0	+	0	-	
$f(t)$	68,75 kg	Decreix.	Mínim (2, 60)	Creix.	Màxim (6, 100)	Decreix.	60 kg

$$f(2) = 10\left(-\frac{2^3}{8} + \frac{3\cdot 2^2}{2} - \frac{9\cdot 2}{2} + 10\right) = 60\,kg.$$

Els dies que la despesa en menjar va ser més petita són el dia 2 (dimarts) i el dia 8 (dilluns de l'altra setmana), amb 60 kg, i el dia que es va gastar més menjar va ser el dia 6 (dissabte), amb 100 kg.

Criteris de correcció:

a) 0,25 punts per cada imatge i 0,5 punts per l'antiimatge.

b) 0,5 punts per la derivada; 0,25 punts pel càlcul dels extrems relatius; 0,5 punts per estudiar de quin tipus són els extrems relatius i 0,25 punts per observar que en $t = 8$ també s'assoleix el mínim.

---

11. PAU 2023 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 1

1.

a) La funció f és racional i per tant és contínua en tots els reals llevat dels punts on s'anul·la el denominador, en aquest cas $x = -\frac{1}{4}$. Com que aquest punt no pertany al domini de la funció podem afirmar que la funció f és contínua en tot el seu domini.

Per calcular la taxa de variació mitjana fem servir la fórmula

$TVM_f[0,1] = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{4-12}{1} = -8$

Finalment per respondre la darrera pregunta cal calcular

$$\lim_{x\to\infty} \frac{12+8x}{4x+1} = \frac{8}{4} = 2$$

Això ens indica que a mida que passin els mesos les vendes mensuals tendiran cap a 2 milions de litres.

b) Per comprovar que és decreixent en tot el seu domini hem de calcular la funció derivada. Sabem que la funció és derivable en tot el seu domini perquè és una funció racional contínua en tot el seu domini.

$$f'(x) = \frac{8(4x+1)-4(12+8x)}{(4x+1)^2} = \frac{-40}{(4x+1)^2}$$

Com que el denominador és positiu per a qualsevol valor x del domini i el numerador és negatiu, la derivada serà negativa en tot el domini de la funció f i, per tant, aquesta funció és decreixent en tot el seu domini.

Calculem ara l'equació de la recta tangent en $x = 1$. Hem d'aplicar la fórmula

$$y - f(1) = f'(1)(x-1)$$

és a dir,

$$y - 4 = -\frac{8}{5}(x-1)$$

i, per tant, la recta tangent és

$$y = -\frac{8}{5}x + \frac{28}{5}$$

a) Argumentació de que la funció és contínua en tot el seu domini: 0,25 p. Càlcul de la TVM: 0,5p. Càlcul del límit: 0,5 p.

b) Càlcul de la derivada: 0,5p. Justificació de que la funció és decreixent en tot el seu domini: 0,25 p. Càlcul de la recta tangent: 0,5p.

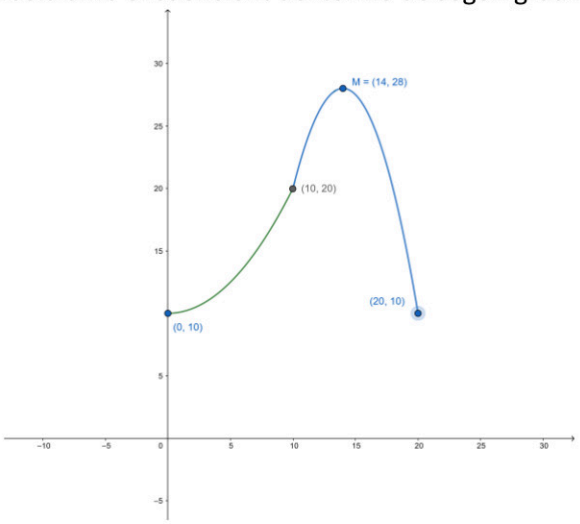
---

12. PAU 2023 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 4

4.

a) En el moment d'obrir l'empresa $C(0) = 10$, per tant el cost de la neteja de l'empresa en el moment d'obrir era de 10 centenars d'euros, és a dir, 1000 euros.
Quan $t = 10$ observem que la funció és contínua i que tant per l'esquerra com per la dreta obtenim que el cost de la neteja de les instal·lacions als 10 anys és de 20 centenars d'euros, és a dir, de 2000 euros:
$C(10) = \frac{10^2}{10} + 10 = 20.$
Mentre que el límit quan t tendeix a 10 per la dreta és
$28 - \frac{(10-14)^2}{2} = 20.$
Pel que fa als 20 anys obtenim
$C(20) = 28 - \frac{(20-14)^2}{2} = 10$
i, per tant, el cost de la neteja de l'empresa als 20 anys de funcionament fou de 10 centenars d'euros, és a dir, 1000 euros.

b) Observem que es tracta d'una funció definida a trossos. En l'interval [0,10] es tracta d'una paràbola creixent en l'interval [0,10] atès que el coeficient del terme de segon grau és positiu i que té el mínim en el punt d'abscissa 0.
En l'interval [10,20] la funció assoleix el màxim en el seu vèrtex, $M = (14,28)$, atès que és una paràbola amb el coeficient del terme de segon grau negatiu.



Per saber en quin moment el cost de la neteja de l'empresa va ser màxim podem utilitzar la gràfic de la funció. Veiem que el cost de la neteja va ser màxim en el catorzè any i aquest cost màxim va ser de 28 centenars d'euros, és a dir, 2800 euros.

Criteris de correcció:

a) Càlcul de C(0): 0,25 p., de C(10) i comprovar que és contínua en aquest punt: 0,5 p. i de C(20): 0,25 p. Expressar correctament el cost (en euros o en centenars d'euros): 0,25 p.
b) Obtenció de la gràfica: 0,75 p. Càlcul del màxim: 0,5 p.

---

13. PAU 2023 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 6

6.

a) Tenint en compte que la baldufa es dissenya tombada, per calcular l'alçària sols cal trobar la distància entre els dos punts de tall a l'eix d'abscisses. Per tant, hem de resoldre l'equació:

$$-x^3 + 2x^2 = 0$$

Traient factor comú veiem què $x^2(-x+2) = 0$ i veiem que $x = 0$ és una arrel doble i $x = 2$ una simple, amb la qual cosa podem constatar que està imprimint una petita baldufa de 2 cm d'alçària.

b) Per calcular l'amplària hem de trobar els extrems relatius. Comencem calculant la derivada

$$f'(x) = -3x^2 + 4x$$

La igualem a zero i traient factor comú. Tenim que

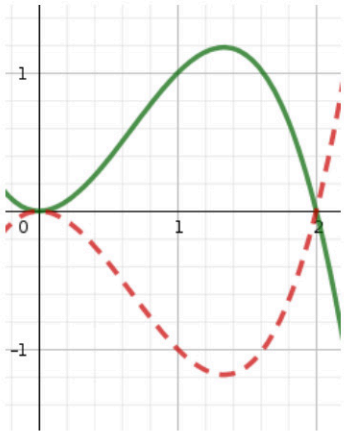
$$x(-3x+4) = 0$$

I, per tant, obtenim les arrels $x = 0$, que correspon a l'arrel doble de la funció, i $x = \frac{4}{3}$ que correspon a un extrem relatiu, l'ordenada d'aquest extrem serà

$$f(x) = -\left(\frac{4}{3}\right)^3 + 2\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{32}{27}$$

I, per tant l'amplària de la baldufa és de

$$2 \cdot \frac{32}{27} = \frac{64}{27} \simeq 2{,}37\ cm$$



a) Càlcul dels punts de tall: 0,5 p. Càlcul de l'alçària: 0,5 p.

b) Càlcul de la derivada: 0,5p. Càlcul de l'ordenada del punt on s'obté el màxim: 0,5 p. Càlcul de l'amplària: 0,5 p.

14. PAU 2022 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 3

3.

a) Per saber quantes persones aniran a veure l'exposició la primera setmana hem de calcular $f(1) = \frac{240 \cdot 1}{1^2 - 2 \cdot 1 + 4} = 80$. Per tant, la primera setmana es preveu que hi vagin $80 \cdot 10 = 800$ persones (recordeu que la funció és expressada en desenes de persones).

La taxa de variació mitjana entre les setmanes 1 i 4 és donada per:

$$TVM_f[1,4] = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{80 - 80}{3} = 0.$$

Aquesta taxa ens dona zero, perquè tant a la primera setmana com a la quarta s'espera el mateix nombre de visitants.

b) Busquem el màxim de la funció. Per fer-ho, calculem la derivada i la igualem a zero:

$$f'(x) = \frac{240 \cdot (x^2 - 2x + 4) - 240x \cdot (2x - 2)}{(x^2 - 2x + 4)^2} = \frac{-240x^2 + 960}{(x^2 - 2x + 4)^2}.$$

Quan igualem a zero la derivada veiem que s'anul·la en els punts $x = 2$ i $x = -2$. Descartem la solució negativa, perquè no té sentit en el context del problema, i observem que en $x = 2$ hi ha un màxim, ja que abans del punt $x = 2$ la derivada és positiva i després del punt $x = 2$ la derivada és negativa.

Per tant, el màxim de visitants setmanals s'assolirà durant la segona setmana.

Per saber el nombre de visitants durant la segona setmana, calculem la imatge de 2:

$$f(2) = \frac{240 \cdot 2}{2^2 - 2 \cdot 2 + 4} = 120$$

Per tant, durant la segona setmana el nombre de visitants previst és de $120 \cdot 10 = 1.200$ persones.

Criteris de correcció: a) Càlcul del nombre de visitants de la primera setmana: 0,5 punts. Càlcul de la TVM: 0,5 punts. b) Càlcul de la derivada: 0,5 punts. Càlcul del punt on es troba el màxim: 0,5 punts. Justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Càlcul del nombre de visitants: 0,25 punts.

---

15. PAU 2022 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 6

6.

a) Segons l'enunciat, la funció $f(x)$ verifica que $f(0) = -2.000$, $f\,'(10) = 0$ i $f\,'(20) = 0$.

D'altra banda, $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$. Per tant, les equacions que s'han de verificar són:

$$\left.\begin{array}{rcl} f(0) = -2.000 & \Rightarrow & c = -2.000 \\ f\,'(10) = 0 & \Rightarrow & 300 + 20a + b = 0 \\ f\,'(20) = 0 & \Rightarrow & 1.200 + 40a + b = 0 \end{array}\right\}$$

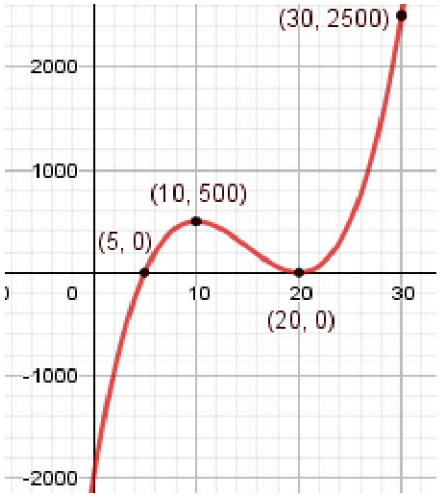
Així, tenim que:

$$300 + 20\,a = 1.200 + 40\,a \;\Rightarrow\; -900 = 20\,a \;\Rightarrow\; a = -45$$

I, també, que: $b = -300 - 20 \cdot (-45) = 600$.

---

b) A l'apartat anterior hem obtingut que la funció que preveu els beneficis que s'obtindran és $f(x) = x^3 - 45x^2 + 600x - 2.000$.



El millor dia per vendre les accions serà el valor on s'assoleix el màxim absolut d'aquesta funció definida en l'interval (0, 30).

Aquest valor s'assolirà o bé quan x = 10 (màxim relatiu) o bé en els extrems de l'interval de definició. Observem que:

$$f(10) = 500\,€$$

$$f(0) = -2.000\,€$$

$$f(30) = 2.500\,€$$

Per tant, el millor dia per vendre les accions serà el trentè dia i obtindrà uns beneficis de 2.500 euros.

Criteris de correcció: a) Càlcul dels paràmetres a, b i c: 0,5 punts cadascun. b) Obtenció del màxim absolut de manera justificada: 0,75 punts. Obtenció dels beneficis màxims: 0,25 punts.

16. PAU 2022 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 2

2.

a)

[1,25 punts]

La funció f té com a gràfica una paràbola que pren el valor màxim al vèrtex, ja que el coeficient de x^2 és negatiu. Per trobar l'interval de temperatures entre les quals es produeix fruita només cal trobar els zeros de l'equació:

$$-x^2 + 46x - 360 = 0$$

La fórmula de l'equació de segon grau ens dona com a solucions $x = 10$ i $x = 36$, és a dir, que el rang de temperatures entre les quals es produeix fruita és $(10, 36)$.

Si es mantingués l'hivernacle a 20 graus, s'obtindrien anualment $f(20) = 160$ centenars de quilograms per hectàrea i any. Per tant, els ingressos per hectàrea serien de 16.000 · 1,2 = 19.200 euros.

b)

[1,25 punts]

Per trobar la producció màxima, ens cal trobar el màxim de la funció anterior. Podem fer-ho calculant el vèrtex, o bé amb la funció derivada $f'(x) = -2x + 46$. Els candidats a extrems de la funció es produeixen quan $f'(x) = 0$, per tant, quan $x = 23$. En aquest cas verifiquem fàcilment que $f'(x) > 0$ quan $x < 23$ i que $f'(x) < 0$ quan $x > 23$ i, per tant, en el punt $\big(23, f(23)\big) = (23, 169)$ la funció assoleix un màxim. Així doncs, la temperatura que maximitza la producció són 23 graus centígrads, i en aquest cas es produeixen 16.900 quilograms per hectàrea. Els ingressos per hectàrea són de 16.900 · 1,2 = 20.280 euros.

Criteris de correcció: a) Obtenció del rang de temperatures: 0,75 p. Obtenció de la producció a 20 graus: 0,25 p. Obtenció dels ingressos a aquesta temperatura: 0,25 p. b) Obtenció del punt on s'assoleix el màxim: 0,5 p. Justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 p. Obtenció de la producció a aquesta temperatura: 0,25 p. Obtenció dels ingressos a aquesta temperatura: 0,25 p.

17. PAU 2022 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 4

4.

a)

[1,25 punts]

A l'instant inicial la població és de 6 centenars, per tant, $P(0) = 6$:

$$a + \frac{12 \cdot 0}{0^2 + b} = 6$$

Per tant, obtenim que $a = 6$.

D'altra banda, sabem que el màxim de la població s'assoleix a l'instant $t = 2$, per tant, $P'(2) = 0$. Calculem la derivada:

$$P'(t) = \frac{12 \cdot (t^2 + b) - 12t \cdot 2t}{(t^2 + b)^2} = \frac{-12t^2 + 12b}{(t^2 + b)^2}$$

Imposem que $P'(2) = 0$:

$$\frac{-12 \cdot 2^2 + 12b}{(2^2 + b)^2} = 0$$

D'aquí obtenim que $-48 + 12b = 0$ i, per tant, $b = 4$.

Així, per tal que es compleixin les condicions del problema cal que $a = 6$ i $b = 4$.

D'altra banda, observem que amb aquests valors dels paràmetres efectivament en $t = 2$ hi ha un màxim perquè la derivada és positiva en l'interval $[0,2)$ i negativa per a $t > 2$.

b)

[1,25 punts]

La població obté el seu màxim a l'instant $t = 2$:

$$P(2) = 6 + \frac{12 \cdot 2}{2^2 + 4} = 9$$

Per tant, la població màxima és de 9 centenars de bacteris.

Calculem ara el límit per obtenir la població a llarg termini:

$$\lim_{t \to \infty} P(t) = \lim_{t \to \infty} \; 6 + \frac{12t}{t^2 + 4} = 6 + 0 = 6$$

Criteris de correcció: a) Obtenció del valor de a: 0,5 p. Càlcul de la derivada: 0, 5 p. Obtenció del valor de b: 0,25 p. b) Obtenció de la població màxima: 0,5 p. Obtenció del límit: 0,75 p.

18. PAU 2022 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 6

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

19. PAU 2022 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 1

1.

a)

[1,25 punts]

Si realitzem el producte de la funció obtenim que $f(t) = -t^2 + 50t + 1875$. Calculem la primera derivada $f'(t) = -2t + 50$. Si igualem la primera derivada a 0 obtenim que hi ha un possible extrem relatiu en $t = 25$. Observem que la derivada $f'(t)$ és positiva per valors de t inferiors a $t = 25$ i és negativa per valors de t més grans. Per tant $f(t)$ creix a l'interval $(-\infty, 25)$ i decreix a l'interval $(25, +\infty)$. Això vol dir que en $t = 25$ té un màxim relatiu i el seu valor és $f(25) = 2.500$. Al cap de 25 mesos assoleix el seu valor màxim i aquest valor és de 2.500 euros.

b)

[1,25 punts]

Per trobar l'instant t en el que el producte val 475 euros hem de resoldre l'equació $f(t) = 475$. Obtenim $-t^2 + 50t + 1.875 = 475$, és a dir, $-t^2 + 50t + 1.400 = 0$.

Si resolem aquesta equació de segon grau obtenim $t = -20$, que no té sentit en el nostre context i $t = 70$. Per tant es deixarà de comercialitzar al cap de 70 mesos.

Criteris de correcció: a) Càlcul de la derivada: 0,25 p. Obtenció dels intervals: 0,25 p. Obtenció del punt on s'assoleix el màxim: 0,25 p. Justificació de que es tracta d'un màxim: 0,25p. Valor del producte en el màxim: 0,25 p. b) Plantejament: 0,5 p. Resolució: 0,5 p. Obtenció del punt en què s'assoleixen els 475 euros: 0,25 p.

20. PAU 2022 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 5

5.

a)

[0,75 punts]

Els ingressos venen donats per la funció $I(x) = 58\,x$ (en milers d'euros). Per tant la funció que dona els beneficis mensuals en funció de les unitats produïdes serà:

$$B(x) = I(x) - C(x) = 58\,x - (\tfrac{1}{2}x^2 - 64x + 4.704) = -\tfrac{1}{2}x^2 + 122\,x - 4.704.$$

b)

[1 punt]

Resolent l'equació $-\frac{1}{2}x^2 + 122\,x - 4.704 = 0$ determinem que la funció $B(x)$ és positiva, i per tant l'empresa no tindrà pèrdues, quan el nombre d'unitats produïdes estigui dins l'interval $[48{,}196]$.

Ara hem de trobar el màxim de $B(x)$, que és un polinomi i per tant una funció contínua i derivable a tot el seu domini $[0, \infty)$. Derivant obtenim $B'(x) = -x + 122$, i igualant la derivada a zero s'obté com a solució $x = 122$. Podem comprovar fàcilment que és un màxim absolut ja que $B'(x) > 0$ quan $x \in [0{,}122)$ i $B'(x) < 0$ quan $x > 122$. En el punt on s'assoleix el màxim el benefici obtingut és de $B(122) = 2.738$ milers d'euros.

c)

[0,75 punts]

Denotem per a el nou preu de venta en milers d'euros. La nova funció de beneficis serà

$$F(x) = I(x) - C(x) = a\,x - (\tfrac{1}{2}x^2 - 64x + 4.704) = -\tfrac{1}{2}x^2 + (64 + a)\,x - 4.704.$$

Observem que és una paràbola i que el màxim s'assolirà en el seu vèrtex. Aplicant la fórmula del vèrtex de la paràbola obtenim l'equació

$$\frac{-(64 + a)}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 130$$

És a dir, $64 + a = 130$ i per tant cal que $a = 66$. El nou preu de venda haurà de ser per tant de 66.000 euros.

Criteris de correcció: a) Obtenció de la funció de beneficis: 0,75 p. b) Obtenció de l'interval per no tenir pèrdues: 0,25p. Obtenció del valor pel qual s'obté el benefici màxim: 0,25p. Justificació de que es tracta d'un màxim: 0,25 p. Obtenció del benefici màxim: 0,25 p. c) Plantejament: 0,25 p. Obtenció del nou preu de venda: 0,75 p.

21. PAU 2022 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 6

6.

a)

[1,25 punts]

Comencem calculant la derivada $f'(x) = 3e^{3x}$. Per tant, el pendent en el punt d'abscissa $x = 0$ serà $f'(0) = 3$.

b)

[1,25 punts]

Quan $x = 0$, la funció pren el valor $f(0) = e^0 = 1$. Per tant, hem de calcular la recta tangent en el punt $(0,1)$. Sabem que el pendent és $m = 3$. Per tant la recta és de la forma $y = 3x + n$. Per trobar el valor de la constant n utilitzem que ha de passar pel punt $(0,1)$. Per tant $1 = 3 \cdot 0 + n$, és a dir, n=1.

Així doncs la recta tangent que estàvem buscant és $y = 3x + 1$.

Criteris de correcció: a) Càlcul de la derivada: 0,5 p. Obtenció del pendent: 0,75 p. b) Càlcul del valor de l'ordenada en el punt d'abscissa x=0: 0,5 p. Obtenció de la recta tangent: 0,75 p.

22. PAU 2021 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 4

4.

a) En el moment inicial tenia $C(0) = 3 - \frac{1}{5} = \frac{14}{5} = 2{,}8$ milers de clients. Al cap d'un any tindrà $C(1) = 3 - \frac{1}{1-4+5} = \frac{5}{2} = 2{,}5$ milers de clients.

b) Observem que la funció $C(t)$ està definida per tot valor real t (ja que el denominador $t^2 - 4t + 5$ no s'anul·la mai) i que, per la naturalesa del problema, té sentit per a tot $t \geq 0$. Calculem la derivada : $C'(t) = \frac{2t-4}{(t^2-4t+5)^2}$. Si igualem la derivada a zero, $\frac{2t-4}{(t^2-4t+5)^2} = 0$, obtenim que $t = 2$, que correspon a l'instant en el qual hi ha una quantitat de clients de $C(2) = 3 - \frac{1}{4-8+5} = 2$ milers.

És fàcil veure què aquest valor correspon a un mínim observant que la derivada canvia de signe en $t = 2$, passant de negativa a positiva. Per tant, després de 2 anys l'empresa tindrà 2.000 clients i començarà a remuntar.

c) Hem de resoldre l'equació

$$3 - \frac{1}{t^2 - 4t + 5} = \frac{14}{5}$$

Tenim que $\frac{1}{5} = \frac{1}{t^2-4t+5}$, per tant, $t^2 - 4t + 5 = 5$, i simplificant obtenim $t^2 - 4t = 0$, d'on obtenim les solucions $t = 0$ que correspon a l'instant en què s'inicia l'estudi i $t = 4$ que representa el moment en què tornen a tenir els 2.800 clients de l'inici de l'estudi. Per tant, hauran de passar 4 anys per tenir de nou el mateix nombre de clients.

Criteris de correcció: a) Nombre de clients inicials: 0,25 p. Nombre de clients al cap d'un any: 0,25 p. b) Càlcul de la derivada: 0,5 punts. Càlcul del valor pel qual s'obté el mínim i comprovació que es tracta d'un mínim: 0,25 p. Càlcul del nombre mínim de clients: 0,25 p. c) Plantejament de l'equació: 0,25 p. Càlculs: 0,5 p. Obtenció de la solució final: 0,25 p.

23. PAU 2021 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 5

5.

a) El benefici obtingut si les caixes es venen a 6 euros és de $B(6) = -6^2 + 16 \cdot 6 - 55 = -36 + 96 - 55 = 5$ milers d'euros.

Els valors per als quals hi haurà beneficis són els valors de x per als quals $B(x) > 0$. Hem de resoldre, per tant, la inequació $-x^2 + 16x - 55 > 0$.

Comencem resolent l'equació $-x^2 + 16x - 55 = 0$. $x = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 55}}{-2} = \frac{16 \pm 6}{2}$. Que té per solucions $x = 11$ i $x = 5$. Observem que $B(x) > 0$ si $x \in (5,11)$. Per tant, per què l'empresa tingui beneficis, cal que el preu de la caixa estigui entre 5 i 11 euros.

b) Si derivem la funció obtenim $B'(x) = -2x + 16$. Igualant a zero obtenim que hi ha un extrem relatiu en $x = 8$. Es tracta d'un màxim perquè la derivada és positiva per a valors de $x < 8$ i, per tant, la funció és creixent, mentre que és negativa per a valors de $x > 8$ i, per tant, la funció és decreixent.

Per tant, l'empresa obté el benefici màxim si ven cada caixa a 8 euros i el benefici que obté és de $B(8) = -8^2 + 16 \cdot 8 - 55 = 9$ milers d'euros.

Criteris de correcció: a) Beneficis si la caixa es ven a 6 euros: 0,5 p. Plantejament de la inequació perquè hi hagi beneficis: 0,25 p. Resolució de la inequació i obtenció dels punts entre els quals ha de prendre valors la x: 0,5 p. b) Càlcul de la derivada: 0,5 p. Obtenció del punt en el qual s'assoleix el màxim: 0,25 p. Comprovació que es tracta d'un màxim: 0,25 p. Obtenció del benefici màxim: 0,25 p.

24. PAU 2021 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 6

6.

a) Calculem la funció derivada: $f'(x) = 3px^2 - 8x + 7p$. Perquè les rectes siguin paral·leles cal que tinguin el mateix pendent. D'una banda, el pendent de la recta tangent en el punt d'abscissa $x = 1$ és $f'(1) = 3p - 8 + 7p = 10p - 8$. D'altra banda, el pendent de la recta tangent en el punt d'abscissa $x = 3$ és $f'(3) = 27p - 24 + 7p = 34p - 24$.

Si igualem les expressions dels dos pendents obtenim $10p - 8 = 34p - 24$ i obtenim que, perquè siguin iguals, cal que $p = \frac{2}{3}$.

b) L'equació tangent és de la forma:

$$y - y_o = m(x - x_o)$$

L'ordenada corresponent al punt d'abscissa $x_0 = 3$ és

$$y_0 = f(3) = 2 \cdot 3^3 - 4 \cdot 3^2 + 7 \cdot 2 \cdot 3 - 18 = 42$$

El pendent ve donat per

$$m = f'(3) = 3 \cdot 2 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 + 7 \cdot 2 = 44$$

I, per tant, l'equació de la recta tangent que busquem és $y - 42 = 44(x - 3)$, és a dir, $y = 44x - 90$.

Criteris de correcció: a) Càlcul de la derivada: 0,25 p. Càlcul dels pendents: 0,25 p. cadascun. Plantejament de la igualtat de pendents: 0,25 p. Obtenció del valor de p: 0,25 p. b) Plantejament de la recta tangent: 0,25 p. Càlcul de l'ordenada: 0,25 p. Càlcul del pendent: 0,25 p. Obtenció de la recta tangent: 0,5 p.

25. PAU 2021 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 1

1.

a) Volem resoldre la inequació $f(x) \geq 0$. Resolem primer l'equació $f(x) = 0$. Obtenim:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(-0{,}2)(-20)}}{2(-0{,}2)} = \frac{-5 \pm 3}{-0{,}4} = \begin{cases} x = 5 \\ x = 20 \end{cases}$$

Per la naturalesa del problema, la funció només té sentit per a valors de $x > 0$ (no està definida per a $x = 0$), i observem que els valors per als quals $f(x) \geq 0$, i en què, per tant, la fàbrica no té pèrdues, són els de l'interval $[5, 20]$.

b) Comencem calculant la derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{(-0{,}4x + 5) \cdot x - (-0{,}2\,x^2 + 5x - 20)}{x^2} = \frac{-0{,}2x^2 + 20}{x^2}$$

Si imposem que $f'(x) = 0$, obtenim que $x^2 = 100$, que té per solucions $x = 10$ i $x = -10$. Per la naturalesa del nostre problema, només té sentit el valor $x = 10$. Per tant, en el punt d'abscissa $x = 10$ hi ha un extrem relatiu de la funció. A l'interval $(5, 10)$ la funció és creixent perquè $f'(x)$ és positiva, mentre que a l'interval $(10, 20)$ és decreixent perquè la derivada és negativa. Per tant en $x = 10$ hi ha un màxim.

Per a $x = 10$ la funció pren el valor $f(10) = 1$. Per tant, per a $x = 10$ s'obté el benefici màxim i aquest benefici és de 1.000 €.

Criteris de correcció: a) Plantejament: 0,5 p. Càlculs: 0,25 p. Obtenir l'interval: 0,5 p. b) Càlcul de la derivada: 0,5 p. Obtenció de l'abscissa del punt on s'assoleix el màxim: 0,25 p. Justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 p. Obtenció dels beneficis màxims: 0,25 p.

---

26. PAU 2021 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 6

6.

a) Comencem calculant la derivada $f'(x) = 12x^2 + 2ax$. Si en el punt d'abscissa $x = -1$ hi ha un extrem relatiu, sabem que la derivada en aquest punt ha de ser zero. Per tant $f'(-1) = 12(-1)^2 + 2a(-1) = 0 \rightarrow 12 - 2a = 0 \rightarrow a = 6$.

Per tant, obtenim que el paràmetre $a = 6$.

b) Tenim ara $f(x) = 4x^3 + 12x^2 - 2$. Comencem calculant la derivada: $f'(x) = 12x^2 + 24x = 12x(x + 2)$. Si la igualem a zero obtenim dues solucions $x = -2$ i $x = 0$.

Per tant, tenim que:

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	funció creixent	màxim	funció decreixent	mínim	funció creixent

Observem que $f(-2) = 14$ i $f(0) = -2$.

Així doncs, la funció és creixent en els intervals $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ i és decreixent en l'interval $(-2,0)$. D'altra banda, té un màxim relatiu en el punt $(-2, 14)$ i un mínim relatiu en el punt $(0, -2)$.

Criteris de correcció: a) Si el plantejament del problema és correcte, encara que hi pugui haver errors de càlcul: 0,5 p. Càlculs: 0,5 p. Obtenció de la solució: 0,25 p. b) Càlcul de la derivada: 0,25 p. Càlcul dels intervals de creixement i decreixement: 0,5 p. Obtenció dels extrems relatius i classificació: 0,5 p.

---

27. PAU 2021 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 1

1.

a)

El pendent de la recta tangent és $f'(0)$. Comencem per tant calculant la derivada:

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1)-2x2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}.$$

Per tant, $f'(0) = 2$.

El punt de tangència és (0, f(0)), és a dir (0, 0) i per tant l'equació de la recta tangent a $f(x)$ en $x = 0$ és $y = 2x$.

b)

Per estudiar la monotonia de $f(x)$ estudiem el signe de la derivada. Per fer-ho, busquem els valors on la derivada pot canviar de signe que, en aquests cas, només són els punts de tall amb l'eix d'abscisses ja que és una funció contínua. Recordem que $f'(x) = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$ i per tant si imposem que s'anul·li tenim $-2x^2 + 2 = 0$ que té per solucions $x = 1$ i $x = -1$.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, +1)$	$(+1, +\infty)$
$-2x^2 + 2$	$-$	$+$	$-$
$(x^2 + 1)^2$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	funció decreixent	funció creixent	funció decreixent

Per tant, la funció $f(x)$ és creixent a l'interval (-1, 1) i és decreixent a l'interval $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. D'altra banda, té un mínim relatiu en el punt $\big(-1, f(-1)\big) = (-1, -1)$ i un màxim relatiu en el punt $\big(1, f(1)\big) = (1,1)$.

---

a) Càlcul de la derivada: 0,5 p. Obtenció del pendent: 0,25 p. Obtenció del punt de tangència: 0,25 p. Obtenció de la recta tangent: 0,25 p.

b) Determinació dels intervals de creixement i de decreixement: 0,5 p. Obtenció dels extrems relatius: 0,75 p.

28. PAU 2021 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 4

4.

a)

La temperatura de l'aigua a la superfície serà de $f(0) = 1$ grau centígrad. Per saber a quines profunditats la temperatura és de zero graus hem de resoldre l'equació $f(x) = 0$. Obtenim $x^2 + 5x + 4 = 0$ que té dues solucions, $x = -4$ i $x = -1$. Per tant la temperatura serà de zero graus a 1 metre i a 4 metres de profunditat.

Per obtenir la temperatura a molta profunditat calculem el límit següent:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 4} = 1.$$

Per tant, la temperatura límit a molta profunditat serà d'un grau centígrad.

b)

Per calcular a quina fondària s'obté la temperatura mínima comencem calculant la derivada $f'(x) = \frac{(2x+5)(x^2+4)-2x(x^2+5x+4)}{(x^2+4)^2} = \frac{-5x^2+20}{(x^2+4)^2}$. Si igualem la derivada a zero, $f'(x) = 0$, veiem que la derivada s'anul·la en $x = 2$ i $x = -2$. Per la naturalesa del problema només té sentit $x = -2$. Es tracta d'un mínim perquè la derivada és negativa abans del punt $x = -2$ i es positiva entre $x = -2$ i $x = 2$.
Si calculem $f(-2) = -\frac{1}{4}$, obtenim que la temperatura mínima s'obté a dos metres de profunditat i la temperatura mínima és de $-\frac{1}{4}$ de grau centígrad.

a) Determinació de la temperatura a la superfície: 0,25 p. Determinació de les profunditats on la temperatura és de zero graus: 0,25 p. Determinació del límit: 0,75 p.

b) Càlcul de la derivada: 0,5 p. Obtenció del punt on s'obté el mínim: 0,25 p. Justificació de que es tracta d'un mínim: 0,25 p. Obtenció de la temperatura mínima: 0,25 p.

---

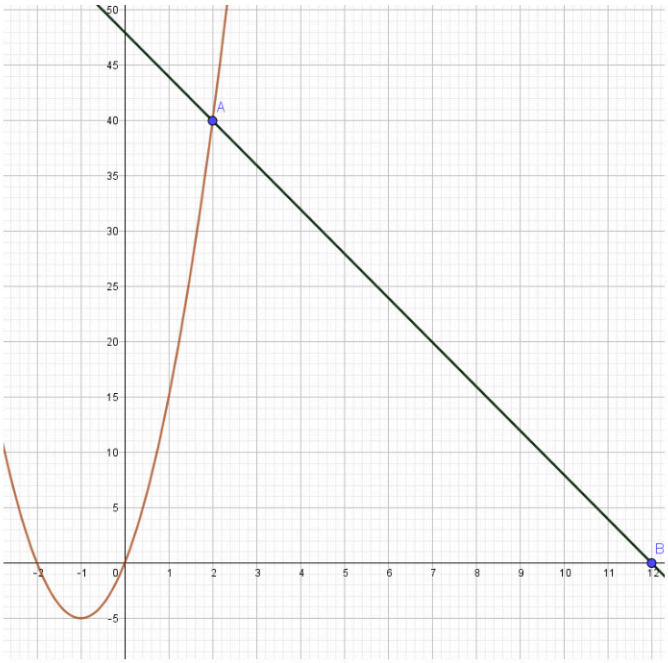
29. PAU 2020 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 2

2. Un fabricant va tenir un producte a la venda durant deu anys. Durant aquest temps, el preu del producte P, en euros, va estar relacionat amb el temps que feia que estava a la venda t, expressat en anys, seguint la funció següent:

$$P(t) = \begin{cases} 5(t+1)^2 - 5 & si\ 0 \leq t \leq 2 \\ -4t + 48 & si\ 2 < t \leq 10 \end{cases}$$

   a) Indiqueu els intervals de creixement i de decreixement del preu del producte durant aquests deu anys. *[1,25 punts]*
   b) Trobeu el preu màxim que va assolir el producte durant el temps que va estar a la venda i calculeu la taxa de variació mitjana del preu del producte durant els darrers cinc anys que va estar a la venda. *[1,25 punts]*

a) Si es fa una representació gràfica de la funció, tenim que



Observem que en $[0,2]$ la funció $P(t)$ té l'expressió d'una funció quadràtica $P_1(t) = 5t^2 + 10t$, la seva derivada és $P_1'(t) = 10t + 10$, que s'anul·la en $t = -1$, fora de l'interval $[0,2]$. Comprovem que en l'interval $[0,2]$, la derivada de la funció $P_1(t)$ és positiva i, per tant, en $[0,2]$ la funció $P(t)$ és creixent.

En $(2,10]$ la funció $P(t)$ té l'expressió d'una funció lineal $P_2(t) = -4t + 48$. Com que la seva derivada és $P_2'(t) = -4$ la funció $P_2(t)$ és sempre decreixent i en particular en l'interval demanat.

Per tant, $P(t)$ és creixent en $[0,2)$ i és decreixent en $(2,10]$.

b) Pel que hem vist en l'apartat anterior, el valor màxim de $P(t)$ en [0,10] s'assoleix en $x = 2$ i el valor de la funció en aquest punt és $P(2) = 40$ euros.

Finalment, la taxa de variació mitjana dels darrers 5 anys és $TVM(5,10) = \frac{P(10)-P(5)}{10-5} = \frac{8-28}{5} = -4$ euros.

Criteris de correcció: a) Raonament que la funció és creixent en [0,2): 0,75 p. Raonament que la funció és decreixent en (2,10]: 0,5 p. b) Obtenció del preu màxim: 0,5 p. Càlcul de la taxa de variació mitjana: 0,75 p.

---

30. PAU 2020 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 4

4. Considerem les funcions $f(x) = x^2 + ax + b$ i $g(x) = -x^2 + c$.
   a) Calculeu els valors dels paràmetres a, b i c per tal que les gràfiques de $f(x)$ i $g(x)$ es tallin en els punts $(-1, 3)$ i $(3, -5)$. *[1,25 punts]*
   b) Per a $c = 4$, trobeu l'equació de la recta tangent a $g(x)$ en el punt d'abscissa $x = -1$. *[1,25 punts]*

a) Imposem que les dues funcions passin per aquests dos punts. Cal que $f(-1) = 3$, $f(3) = -5$ i que $g(-1) = 3$ i $g(3) = -5$.

De les dues igualtats primeres tenim que

$$\begin{cases} 1 - a + b = 3 \\ 9 + 3a + b = -5 \end{cases}$$

I, resolent el sistema, trobem que $a = -4$ i $b = -2$.

De les igualtats de la funció g, tenim que

$$\begin{cases} -1 + c = 3 \\ -9 + c = -5 \end{cases}$$

I, en ambdós casos, obtenim que $c = 4$.

b) Considerem ara $g(x) = -x^2 + 4$. Observem que $g(-1) = 3$, per tant, la recta tangent a $g(x)$ en $x = -1$ passa pel punt $(-1,3)$.

El pendent de la recta tangent serà $m = g'(-1)$ on g' és la derivada de la funció g. Comencem calculant la derivada:

$$g'(x) = -2x$$

I, per tant, $g'(-1) = 2$.

Així doncs, l'equació de la recta tangent a $g(x)$ en $x = -1$ és $y - 3 = 2(x + 1)$, és a dir, $y = 2x + 5$.

Criteris de correcció: a) Plantejament: 0,5 p. Obtenció dels tres paràmetres: 0,25 p. cadascun b) Obtenció de l'ordenada del punt: 0,25 p. Càlcul de la derivada: 0,25 p. Obtenció del pendent: 0,25 p. Obtenció de la recta tangent: 0,5 p.

---

31. PAU 2020 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 6

6. La funció $Q(x) = (x+1)^2(32-x)$, en què $x \in [-1,32]$, representa la producció, en quilograms, d'una hortalissa en un hivernacle en funció de la temperatura x, expressada en graus centígrads (°C), que pot variar entre -1 °C i 32 °C.

a) Calculeu quina és la temperatura de l'hivernacle amb la qual s'obté la màxima producció. Quina producció d'hortalissa obtindrem a aquesta temperatura? *[1,25 punts]*

b) Calculeu a quines temperatures s'assoleix el nivell mínim de producció i quin és aquest valor mínim. *[1,25 punts]*

a) Cal determinar el valor de x per al qual la funció $Q(x)$ té un màxim en l'interval $[-1,32]$. Observem que:

$$Q(x) = (x+1)^2(32-x) = -x^3 + 30x^2 + 63x + 32$$

Comencem calculant la derivada:

$$Q'(x) = -3x^2 + 60x + 63$$

Si igualem la derivada a zero, $-3x^2 + 60x + 63 = 0$ obtenim que la derivada s'anul·la en els punts d'abscissa $x = -1$ i $x = 21$.

Per saber si en aquests punts hi ha un màxim o un mínim locals, estudiem el signe de la derivada. Observem que la derivada $Q'(x)$ és negativa per a $x < -1$ (a nosaltres només ens interessa en l'interval $[-1,32]$ però, com a funció polinòmica, $(x+1)^2(32-x)$, està ben definida per a tot valor de x i ens serveix per a estudiar el seu comportament). D'altra banda, $Q'(x)$ és positiva en l'interval $(-1,21)$ i torna a ser negativa per a $x > 21$. Per tant, en $x = -1$ hi ha un mínim local i en $x = 21$ hi ha un màxim local. Tenint en compte el comportament de la funció en l'interval $[-1,32]$ aquest màxim local és també el màxim en aquest interval.

Així doncs, la temperatura òptima per a mantenir l'hivernacle és de 21°C.
A aquesta temperatura, la producció serà de:

$$Q(21) = -21^3 + 30 \cdot 21^2 + 63 \cdot 21 + 32 = 5.324 \text{ kg}.$$

b) La funció $(x+1)^2(32-x)$ té un mínim local en $x = -1$°C, que correspon a una producció de $Q(-1) = 0$. Com que la funció és decreixent per $x > 21$, hem de comprovar el valor de la funció en l'extrem superior de l'interval on la tenim definida per saber si aquest mínim local és també el mínim global que estem buscant. Observem que $Q(32) = 0$.

Per tant, tant a una temperatura de -1 °C com a una temperatura de 32°C, no s'obtindrà cap producció.

Criteris de correcció: a) Càlcul de la derivada: 0,5 p. Obtenció del punt on s'assoleix el màxim: 0,25 p. Comprovació que es tracta d'un màxim: 0,25 p. Càlcul de la producció màxima: 0,25 p. b) Càlcul del punt on s'assoleix el mínim local: 0,25 p. Càlcul del valor de la funció en aquest punt: 0,25 p. Comprovació del valor de la funció en l'extrem superior de l'interval: 0,25 p. Obtenció del resultat final: 0,5 p.

32. PAU 2020 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2

2. L'1 de gener de 2019 va sortir al mercat un nou model d'un producte tècnic d'esquí. La funció de tercer grau $f(x) = 10\,x^3 - 210\,x^2 + 1470\,x$ ens dona el nombre total d'unitats venudes, en què x denota el nombre de mesos transcorreguts, des del llançament del producte, durant el primer any (és a dir, $x \in [0,12]$).
   a) Quantes unitats s'havien venut al cap de 3 mesos? Quantes se'n van vendre al cap d'un any? Determineu la taxa de variació mitjana entre els mesos 3 i 12. *[1,25 punts]*
   b) Comproveu que la funció és creixent en l'interval $[0,12]$ i trobeu en quin instant el creixement ha estat més lent. *[1,25 punts]*

a) Per saber les unitats venudes al cap de 3 mesos cal calcular $f(3) = 2.790$, per tant, s'havien venut 2.790 unitats. Al cap d'un any es van vendre $f(12) = 4.680$ unitats.

Pel que fa a la taxa de variació mitjana, tenim que

$$TVM(3,12) = \frac{f(12) - f(3)}{12 - 3} = \frac{4.680 - 2.790}{9} = 210\,.$$

b) Com que f és una funció polinòmica de grau 3, és contínua i derivable en tots els reals. Per estudiar el creixement de la funció comencem calculant la funció derivada:

$$f'(x) = 30x^2 - 420\,x + 1.470.$$

Igualem $f'(x) = 0$ per obtenir els possibles màxims i mínims. L'únic zero el trobem en el punt d'abscissa $x = 7$. Observem que $f'(x) = 30(x-7)^2$, per tant, deduïm fàcilment que $f'(x) \geq 0$ per a tots els reals, i que $f'(x) = 0$ només per a $x = 7$. Així doncs, la funció f és creixent per a $x \in [0,12]$ i l'instant en què el creixement és més lent és als 7 mesos del llançament del producte (és on la funció derivada assoleix el valor mínim).

Criteris de correcció: a) Obtenció de les unitats venudes als 3 mesos: 0,25 p. Obtenció de les unitats venudes al cap de l'any: 0,25 p. Obtenció de la TVM: 0,75 p. b) Càlcul de la derivada: 0,25 p. Justificació que la funció és creixent: 0,5 p. Obtenció del punt on el creixement és més lent: 0,5 p.

33. PAU 2020 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 6

6. El benefici d'una empresa, expressat en milions d'euros, és donat per la funció següent, en què x indica el nombre d'anys que han passat des del moment que va començar a funcionar:

$$B(x) = \frac{5x+20}{x^2+9} - \frac{20}{9}.$$

a) Quin és el benefici en el moment en què l'empresa comença a funcionar? En quin moment l'empresa passa de tenir beneficis a tenir pèrdues? *[1,25 punts]*

b) En quin moment aconsegueix l'empresa el benefici màxim? Quin és aquest benefici màxim? *[1,25 punts]*

a) Per trobar el benefici en el moment en què es posa en funcionament l'empresa hem de calcular $B(0)$. Observem que $B(0) = 0$ i, per tant, en el moment inicial l'empresa no té ni beneficis ni pèrdues.

Per saber quan l'empresa passa de tenir beneficis a tenir pèrdues mirem quan s'anul·la la funció benefici.

$$B(x) = 0 \;\leftrightarrow\; \frac{5x+20}{x^2+9} - \frac{20}{9} = 0 \;\leftrightarrow\; x(4x-9) = 0.$$

Per tant $B(x)$ només s'anul·la per $x = 0$ i per $x = \frac{9}{4} = 2{,}25$. Observem, d'altra banda, que $B(x)$ està ben definida per a tot x i que per als valors de $x \in \left(0, \frac{9}{4}\right)$ és positiva. Per tant, l'empresa passa de tenir beneficis a tenir pèrdues quan porta $\frac{9}{4}$ d'any en funcionament, és a dir, als 2 anys i 3 mesos.

b) Per trobar el punt on s'assoleix el màxim, comencem calculant la derivada de la funció $B(x)$:

$$B'(x) = \frac{-5x^2-40x+45}{(x^2+9)^2}.$$

Igualem la derivada a zero: $B'(x) = 0$ i obtenim dues solucions $x = -9$ i $x = 1$. Observem que la derivada, $B'(x)$, és positiva entre $x = 0$ i $x = 1$ i, per tant, el benefici és creixent en aquest interval de temps. A partir de $x = 1$ la funció benefici és decreixent perquè la derivada és negativa. Per tant, en $x = 1$, és a dir, al primer any, la funció benefici assoleix un màxim, i a partir d'aquí la funció benefici disminueix. El valor del benefici màxim és:

$$B(1) = \frac{5+20}{1+9} - \frac{20}{9} = \frac{25}{10} - \frac{20}{9} = \frac{25}{90} = \frac{5}{18} = 0{,}278 \text{ milions d'euros.}$$

Criteris de correcció: a) Càlcul del benefici inicial: 0,5 p. Càlcul de l'instant on comença a tenir pèrdues: 0,5 p. Justificació de que en aquell instant passa de tenir beneficis a tenir pèrdues (i no al revés): 0,25 p. b) Càlcul de la derivada: 0,5 p. Càlcul del punt on s'assoleix el màxim: 0,25 p. Comprovació de que es tracta d'un màxim: 0,25 p. Càlcul del benefici màxim: 0,25 p.

34. PAU 2020 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 2

2. Una empresa vol fabricar un producte nou. Encomana un estudi de mercat que determina que l'evolució de les vendes al llarg dels propers sis anys seguirà la funció $f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$, en què $f(t)$ representa la quantitat de milers d'unitats venudes en funció del temps $t \in [0,6]$ expressat en anys.
   a) Quantes unitats vendrà el primer any? Tret de l'instant inicial ($t = 0$), es preveu que hi haurà algun altre any en el que no es produirà cap venda? *[1,25 punts]*
   b) En quin any es produirà el màxim nombre de vendes i quants productes s'hauran venut aquell any. *[1,25 punts]*

a) Calculem $f(1) = 1 - 12 + 36 = 25$. Per tant, el primer any es vendran 25.000 unitats.

D'altra banda, observem que $f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t = t \cdot (t-6)^2$. Per tant, els únics instants en que no es produeix cap venda és a l'instant inicial $t = 0$ i al sisè any, $t = 6$.

b) Si calculem la derivada $f'(t) = 3t^2 - 24t + 36 = 3 \cdot (t-6) \cdot (t-2)$, observem que s'anul·la en els punts $t = 2$ i $t = 6$. Sabem, per l'apartat anterior, que en l'instant $t = 6$ és l'únic $t > 0$ pel qual no s'ha produït cap venda, per tant serà un mínim. Observem que passa amb l'instant $t = 2$. Veiem que $f'(t) > 0$ per $t < 2$ i, en canvi $f'(t) < 0$ per $t \in (2,6)$. Per tant, com que nosaltres tenim definida la funció en $t \in [0,6]$, el màxim de vendes es produeix el segon any. Calculem $f(2) = 8 - 48 + 72 = 32$ i, per tant, el nombre de productes venuts aquest any és de 32.000 unitats.

Criteris de correcció: a) Obtenció de les vendes del primer any: 0,5 p. Obtenció de l'any en que no hi haurà vendes: 0,75 p. b) Càlcul de la derivada: 0,5 p. Obtenció de l'instant en què les vendes són màximes: 0,25 p. Justificació de que es tracta d'un màxim: 0,25 p. Obtenció de les vendes d'aquest any: 0,25 p.

35. PAU 2020 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 4

4. Considereu la funció $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$
   a) Trobeu els valors dels paràmetres a, b i c sabent que té un màxim en el punt $(2,1)$ i un mínim en el punt $(0,-1)$. *[1,25 punts]*
   b) Trobeu els intervals de creixement i de decreixement de la funció pels valors dels paràmetres a, b i c trobats a l'apartat anterior. *[1,25 punts]*

a) Comencem calculant la derivada de la funció: $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$. Sabem que la funció passa pel punt $(0,-1)$. D'altra banda, $f(0) = c$. Per tant, deduïm que $c = -1$.

Sabem també que passa pel punt $(2,1)$, i com que $f(2) = 16a + 4b - 1$ deduïm que $16a + 4b - 1 = 1$, és a dir, que $16a + 4b = 2$.

Com que en x=0 i en x=2 hi ha extrems relatius, en aquests punts s'ha d'anul·lar la derivada. D'una banda, $f'(0) = 0$, i per tant no ens aporta informació addicional, però d'altra banda tenim que $f'(2) = 32a + 4b$. I, per tant, sabem que $32a + 4b = 0$.

Resolem el sistema

$$\begin{cases} 16a + 4b = 2 \\ 32a + 4b = 0 \end{cases}$$

I trobem que la solució és $a = -\frac{1}{8} = -0{,}125$, $b = 1$ i, ja sabíem que, $c = -1$.

b) Tenim la funció $f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + x^2 - 1$. Calculem la seva derivada

$f'(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x$

Si l'igualem a zero tenim que $-\frac{1}{2}x^3 + 2x = 0$, que és equivalent a, $x \cdot (x^2 - 4) = 0$ que té per solucions $x = 0$, $x = 2$ i $x = -2$.

Observem que $f'(x) > 0$ si $x < -2$, que $f'(x) < 0$ si $x \in (-2,0)$, $f'(x) > 0$ si $x \in (0,2)$ i $f'(x) < 0$ si $x > 2$. Per tant, la funció és creixent en els intervals $(-\infty,-2) \cup (0,2)$ i és decreixent en $(-2,0) \cup (2,+\infty)$.

Criteris de correcció: a) Plantejament: 0,5 p. Obtenció dels paràmetres a, b i c: 0,25 p. cadascun. b) Càlcul de la derivada: 0,5 p. Obtenció dels punts crítics: 0,25 p. Obtenció dels intervals de creixement i decreixement: 0,25 p. Justificació de perquè la funció és creixent o decreixent: 0,25 p.

36. PAU 2019 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 3

3. Es preveu un canvi important en la població d'una determinada zona per qüestions mediambientals. El nombre d'habitants de la zona, en milions, vindrà donat per la funció $P(t) = \frac{t^2+28}{(t+2)^2}$, en què t mesura el temps en anys des del moment actual ($t = 0$).

a) Digueu quin és el nombre d'habitants de la zona actualment i quin serà aquest nombre a molt llarg termini. [1 punt]

b) En quin moment s'arribarà al nombre mínim d'habitants? Quants habitants hi haurà en aquell moment? Quin és el nombre màxim d'habitants que s'assoleix en aquesta zona? [1 punt]

a) Es demana la població quan $t = 0$, és a dir, $P(0) = \frac{28}{(2)^2} = 7$. Per tant, la població actual és de 7 milions d'habitants. Pel que fa a la població a molt llarg termini, hem de calcular el límit següent:

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{t^2+28}{(t+2)^2} = 1.$$

Per tant, a molt llarg termini la població de la zona tendirà a 1 milió d'habitants.

b) Cal estudiar el signe de la funció derivada per trobar els màxims i mínims de la funció. Comencem calculant la derivada:

$$P'(t) = \frac{2t\cdot(t+2)^2 - (t^2+28)\cdot 2\cdot(t+2)}{(t+2)^4} = \frac{4\cdot(t-14)}{(t+2)^3}.$$

Si imposem que $P'(t) = 0$ obtenim $t = 14$. Estudiem, a continuació, la monotonia de la funció per valors de $t \geq 0$:

	$[0,14)$	14	$(14,+\infty)$
$P'(t)$	<0	0	>0
$P(t)$	↓	Mínim	↑

Per tant, al cap de 14 anys la població assolirà el seu mínim i serà de

$$P(14) = \frac{14^2+28}{(14+2)^2} = 0.875.$$

És a dir, al cap de 14 anys hi haurà 875.000 habitants.

Per a l'estudi de la monotonia de la funció, i tenint en compte que en el límit la població tendeix de forma creixent cap a 1, observem que el màxim nombre d'habitants correspon al moment actual ($t = 0$) i és de 7 milions d'habitants.

Criteris de correcció: a) Població al moment actual: 0,5 p. Obtenció del límit: 0,5 p. b) Obtenció del punt on s'assoleix el mínim: 0,25 p. Comprovació que es tracta d'un mínim: 0,25 p. Obtenció del nombre d'habitants que hi haurà en aquell instant: 0,25 p. Raonament del nombre màxim d'habitants: 0,25 p.

37. PAU 2019 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 5

5. Considereu una funció $f(x)$ que té com a primera derivada $f'(x) = 2x^2 + bx + 4$, en què b és un paràmetre real.

a) Determineu el valor de b perquè $f(x)$ tingui un extrem relatiu en $x = -1$ i raoneu si es tracta d'un màxim o d'un mínim. [1 punt]

b) Si sabem que la gràfica de la funció $f(x)$ passa pel punt $(0, 3)$, trobeu l'equació de la recta tangent a $f(x)$ en aquest punt. [1 punt]

a) Sabem que en $x = -1$ hi ha un extrem relatiu; per tant, $f'(-1) = 0$. D'altra banda, $f'(-1) = 2 - b + 4 = -b + 6$, i, conseqüentment, trobem que $b = 6$.
Per tant, tenim que $f'(x) = 2x^2 + 6x + 4$. Si estudiem on és positiva i on es negativa la funció $f'(x)$, obtenim que és positiva en els intervals $(-\infty, -2)$ i $(-1, +\infty)$, mentre que és negativa en l'interval $(-2, -1)$. Per tant, en $x = -1$ hi ha un mínim relatiu.
b) El pendent de la recta buscada és $f'(0)$. Sabem que $f'(x) = 2x^2 + bx + 4$ i, per tant, $f'(0) = 4$.
La recta tangent en el punt $(0,3)$ és $y - 3 = 4(x - 0)$, és a dir, $y = 4x + 3$.

Criteris de correcció: a) Determinació del paràmetre b: 0,5 p. Identificació que es tracta d'un mínim: 0,5 p. b) Determinació del pendent: 0,5 p. Determinació de la recta tangent: 0,5 p.

---

38. PAU 2019 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3

3. La gràfica de la funció $f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$ passa pel punt (-2, -6) i la recta tangent en aquest punt és paral·lela a l'eix d'abscisses.
   a) Calculeu el valor de a. *[1 punt]*
   b) Calculeu el valor de b. *[1 punt]*

a) Sabem que la recta tangent en el punt (-2, -6) és paral·lela a l'eix d'abscisses, per tant, el seu pendent és 0. Calculem la derivada de la funció

$$f'(x) = a - \frac{8}{x^2}.$$

Per tant, $f'(-2) = a - 2$. Imposem que $f'(-2) = 0$ i trobem que $a = 2$.

b) Sabem que la funció passa pel punt (-2, -6). Per tant, sabem que $f(-2) = -6$. Tenim per tant que $2 \cdot (-2) + b + \frac{8}{(-2)} = -6$, que ens dona $b - 8 = -6$ i, finalment, $b = 2$.

Criteris de correcció: a) Càlcul de la derivada: 0,25 p. Saber que el pendent ha de ser 0: 0,25 p. Obtenció del valor de a: 0,5 p. b) Plantejament: 0,5 p. Obtenció del valor de b: 0,5 p.

---

39. PAU 2019 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4

4. La funció $f(x) = \frac{40}{x^2-22x+125}$ ens mostra aproximadament la venda diària, en milers d'unitats, d'un perfum de moda en funció de x, en què x és el dia del mes de febrer.

   a) Quantes unitats de perfum es van vendre, aproximadament, el dia 5 de febrer? Quin és l'increment de vendes entre el dia 7 i el dia 9 de febrer? *[0,75 punts.]*

   b) Quin dia del mes de febrer es van vendre més perfums i quantes unitat se'n van vendre? *[1,25 punts.]*

a) D'una banda $f(5) = 1$. Per tant, el dia 5 de febrer es van vendre, aproximadament, 1.000 unitats de perfum.

D'altra banda, $f(7) = 2$ i $f(9) = 5$. Per tant, entre el dia 7 i el dia 9 hi ha un increment aproximat de vendes de 3.000 unitats de perfum.

b) Per trobar el màxim de vendes, cal fer la derivada:
$f'(x) = \frac{-40\cdot(2x-22)}{(x^2-22x+125)^2}$.

Si igualem la derivada a zero, trobem que hi ha un possible extrem relatiu en $x = 11$. Si fem un estudi del signe de la derivada, observem que, per a x menor d'11, la derivada és positiva, i, per tant, la funció creix, mentre que per a x més gran d'11, la derivada és negativa, i, per tant, la funció decreix. Deduïm, per tant, que en $x = 11$ hi ha un màxim.

Observem que $f(11) = 10$. Per tant, el dia que es van vendre més perfums va ser el dia 11 de febrer i se'n van vendre aproximadament 10.000 unitats.

Criteris de correcció: a) Càlcul de les vendes del dia 5: 0,25 p. Càlcul de les vendes dels dies 7 i 9 i càlcul de l'increment de vendes entre aquests dies: 0,5 p. b) Càlcul de la derivada: 0,5 p. Obtenció del punt on s'assoleix el màxim: 0,25 p. Justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 p. Obtenció del valor de vendes d'aquest dia: 0,25 p.

40. PAU 2019 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 6

6. Una botiga obre al públic des de les 10 hores fins a les 21 hores. Se sap que els ingressos per vendes, en funció de l'hora del dia, venen donats per la funció:

$$I(t) = -5(m-t)^2 + n,$$
per a $10 \leq t \leq 21$

a) Trobeu el valor de m sabent que els ingressos màxims es produeixen a les 18 hores. *[1 punt]*
b) Trobeu el valor de n sabent que a les 21 hores hi ha uns ingressos de 500 €. *[1 punt]*

a) La derivada de la funció $I(t)$ ve donada per $I'(t) = -10(m-t)(-1) = 10(m-t)$. Sabem que en $t = 18$ hi ha un extrem relatiu, per tant, $I'(18) = 0$, és a dir, $10(m-18) = 0$, i obtenim que $m = 18$.

b) També sabem que $I(21) = -5(18-21)^2 + n = 500$, i, per tant, obtenim que $n = 545$.

Criteris de correcció: a) Càlcul de la derivada: 0,5 p. Igualació del valor de la derivada en el punt t = 18 a 0: 0,25 p. Obtenció del valor de m: 0,25 p. b) Plantejament: 0,5 p. Obtenció del valor de n: 0,5 p.

---

41. PAU 2019 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 1

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

42. PAU 2019 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 3

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

43. PAU 2018 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 1

1. Considereu la funció

$$f(x)=\begin{cases}2x+3 & si\ x\le -1\\ ax+b & si\ -1<x<2\\ x^2 & si\ x\ge 2\end{cases}$$

Trobeu el valor de *a* i *b* perquè la funció sigui contínua per a tots els nombres reals. [2 punts]

La funció f és contínua en $(-\infty,-1)\cup(-1,2)\cup(2,+\infty)$ independentment del valor de a i b, ja que es tracta d'una funció polinòmica en cadascun dels intervals. Per tant, caldrà imposar que la funció sigui contínua en els punts d'abscissa $x=-1$ i $x=2$.
Per a $x=-1$ tenim que $f(-1)=2(-1)+3=1$. També,

$$\lim_{x\to -1-}(2x+3)=1$$

i, finalment,

$$\lim_{x\to -1+}(ax+b)=-a+b$$

Per tant, $f(x)$ serà contínua en $x=-1$ si $-a+b=1$.

D'altra banda, per a $x=2$ tenim que $f(2)=2^2=4$. D'una banda,

$$\lim_{x\to 2-}(ax+b)=2a+b$$

i, finalment també,

$$\lim_{x\to 2+}(x^2)=2^2=4.$$

Per tant, $f(x)$ serà contínua en $x=2$ si $2a+b=4$.

Així doncs, la funció serà contínua en tots els reals si i només si es verifiquen simultàniament les dues condicions trobades, és a dir, si a i b són la solució del sistema següent:

$$\begin{cases}-a+b=1\\ 2a+b=4\end{cases}$$

Resolem el sistema i trobem que cal que $a=1$ i $b=2$.

Criteris de correcció: Plantejament del problema: 0,5 p. Càlcul dels límits: 1 p. Resultat final: 0,5 p.

44. PAU 2018 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 4

4. La despesa mensual en tabac d'un fumador ve determinada pel seu salari mitjançant la funció $f(x)=\dfrac{400x}{x^2+4}$, en què x representa el salari en milers d'euros i $f(x)$ la despesa mensual en tabac en euros.

a) Determineu el salari per al qual la despesa en tabac és màxima. A quant ascendeix aquesta despesa?
[1 punt]

b) Per a quins salaris la despesa mensual és inferior a 60 €?
[1 punt]

a) Comencem fent la derivada de $f(x)$. Obtenim $f'(x)=\frac{-400x^2+1600}{(x^2+4)^2}$. Igualem a 0 la primera derivada per trobar els punts crítics i ens dona un salari de $x=2$ (milers d'euros) i $x=-2$, que, pel context del problema, no té sentit. Per justificar que en $x=2$ tenim un màxim, prenem un punt entre -2 i 2, per exemple $x=0$ i veiem que la derivada és positiva, per tant, la funció és creixent. Mentre que per a punts més grans que 2, per exemple $x=3$, la derivada és negativa, és a dir, la funció és decreixent. Per tant, en $x=2$ hi ha un màxim. La despesa màxima serà de $f(2)=100$ euros.

b) Hem de resoldre la inequació $f(x)<60$, és a dir, $\frac{400x}{x^2+4}<60$, que és equivalent a $400x<60x^2+240$, o bé, dividint cada terme per 20,

$$0<3x^2-20x+12$$

Si trobem les arrels de la paràbola $y=3x^2-20x+12$, obtenim $x=\frac{2}{3}$ i $x=6$. Aquesta paràbola és negativa a l'interval $(\frac{2}{3},6)$ i és positiva als intervals que són la solució d'aquest apartat: $(0,\frac{2}{3})\cup(6,+\infty)$. Hem tingut en compte que, pel context del problema, $x\geq 0$. Per tant, la despesa mensual en tabac és inferior a 60 € si el salari és inferior a 666,67 € o si és superior a 6.000 €.

Criteris de correcció: a) Càlcul de la derivada: 0,25 p. Obtenció del punt on s'obté el màxim: 0,25 p. Justificació del fet que es tracta d'un màxim: 0,25 p. Càlcul de la despesa màxima: 0,25 p. b) Plantejament de la inequació: 0,25 p. Resolució de l'equació de segon grau: 0,25 p. Obtenció de l'interval que és solució: 0,5 p.

45. PAU 2018 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 6

6. Sabem que la funció $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+1}$ passa pel punt (2, –5) i que les rectes *x* = 1 i *y* = 2 en són les asímptotes vertical i horitzontal, respectivament. Calculeu *a*, *b* i *c*.
[2 punts]

Com que es tracta d'una funció racional, l'asímptota vertical la tindrà en el punt que anul·la el denominador; és a dir, cal que $cx+1=0$ per a $x=1$, per tant, $c=-1$.

Observem que el $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{a}{c}$ i també $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{a}{c}$. Per tant, tenim que $\frac{a}{c}=2$ (l'asímptota horitzontal). Per tant, $a=2c=-2$.

Finalment, sabem que passa pel punt $(2,-5)$, per tant, $f(2)=-5$, és a dir, $\frac{2a+b}{2c+1}=-5$, i deduïm que $b=9$.

Criteris de correcció: Plantejament del punt on hi ha l'asímptota vertical i obtenció del paràmetre c: 0,5 p. Plantejament del punt on hi ha l'asímptota horitzontal i obtenció del paràmetre a: 0,75 p. Plantejament i obtenció del paràmetre b: 0,75 p.

---

46. PAU 2018 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2

2. Considereu la funció $f(x)=\frac{x^2}{x-a}$, en què a és un paràmetre real.
   a. Trobeu per a quins valors del paràmetre a la recta tangent a la funció f en $x=1$ és paral·lela a $y+3x+5=0$. *[1 punt]*
   b. Per al valor del paràmetre $a=1$, trobeu els intervals de creixement i decreixement i els punts on s'assoleixen els màxims i mínims relatius de la funció f. *[1 punt]*

a. Com que la derivada és el pendent de la recta tangent, hem d'imposar la condició $f'(1)=-3$. La derivada de la funció donada f és

$$f'(x)=\frac{x^2-2\,a\,x}{(x-a)^2}$$

Per tant, hem de resoldre l'equació

$$\frac{1-2a}{(1-a)^2}=-3$$

o equivalentment $3\,a^2-8a+4=0$, que dona com a solucions $a=2$ i $a=\frac{2}{3}$.

b. Hem d'estudiar la funció $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ que té domini $\mathbb{R}$-{1}. La derivada és

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

i s'anul·la en $x = 0$ i $x = 2$.
Estudiant els signes de la derivada obtenim:

$(-\infty, 0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(2, \infty)$
$f' > 0$	$f' < 0$	$f' < 0$	$f' > 0$
f creixent	f decreixent	f decreixent	f creixent

Es dedueix que la funció f té un màxim relatiu al punt $(0, f(0)) = (0,0)$ i un mínim relatiu al punt $(2, f(2)) = (2,4)$.

Criteris de correcció: a) Plantejament del problema: 0,25 p. Càlcul de la derivada: 0,5 p. Obtenció dels punts: 0,25 p. b) Obtenció dels intervals de creixement i decreixement: 0,5 p. Obtenció i justificació dels extrems relatius: 0,5 p.

---

47. PAU 2018 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 6

6. El nombre d'individus, en milions, d'una població ve determinat per la funció $P(t) = \frac{5+t^2}{(t+1)^2}$, en què t mesura el nombre d'anys transcorreguts.
   a. Quina és la població inicial i la població després de 9 anys? A partir de quin moment la població serà inferior a un milió d'individus? *[1 punt]*
   b. Amb el pas dels anys, cap a quin valor tendirà el nombre d'individus de la població? *[1 punt]*

a) Ens demanen que calculem la població inicial $P(0) = 5$ milions d'habitants i la població al cap de 9 anys, $P(9) = 0{,}86$ milions d'habitants.

Hem de trobar també a partir de quin instant la població serà inferior a un milió d'habitants, és a dir, per a quin valor de t es compleix $\frac{5+t^2}{(t+1)^2} < 1$. Aïllant obtenim $t > 2$, és a dir, a partir del segon any la població serà inferior a un milió d'habitants.

b) Hem de calcular el límit quan el temps tendeix a infinit. Tenim que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{5+t^2}{(t+1)^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^2+5}{t^2+2t+1} = 1$$

Per tant, la grandària de la població a llarg termini tendirà a un milió d'habitants.

Criteris de correcció: a) Càlcul de la població inicial: 0,25 p. Càlcul de la població al cap de 9 anys: 0,25 p. Càlcul de l'instant en què la població passa a ser inferior a un milió d'habitants: 0,5 p. b) Plantejament que cal calcular el límit: 0,25 p. Càlcul del límit: 0,75 p.

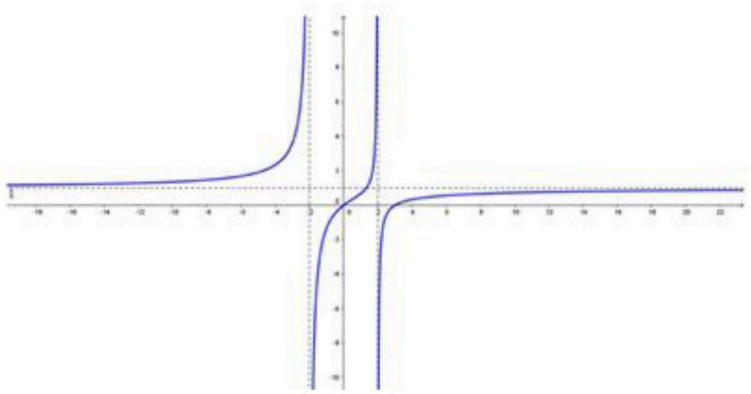
---

48. PAU 2018 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 1

1. Sigui la funció $f(x) = \frac{x^2-3x}{x^2-4}$
   a. Indiqueu-ne justificadament el domini i determineu els punts en què la gràfica de *f* talla l'eix de les abscisses. *[1 punt]*
   b. Estudieu-ne el creixement i feu un esbós aproximat de la gràfica de la funció. *[1 punt]*

a) $x^2 - 4 = 0$ si $x = \pm 2$, per tant, el domini de f són tots els nombre reals excepte aquests dos. D'altra banda, $x^2 - 3x = 0$ quan $x = 0$ o $x = 3$: la gràfica de *f* talla l'eix d'abscisses en els punts (0,0) i (3,0).

b) La derivada de la funció *f* és $f'(x) = \frac{3x^2-8x+12}{(x^2-4)^2}$. Com que $3x^2 - 8x + 12 = 0$ no té solucions reals i *f'* sempre és positiva la funció *f* és creixent en tot el seu domini. La seva gràfica aproximada és:



Criteris de correcció: a) Determinació del domini, expressat de qualsevol forma: 0,5 p. Punts de tall amb l'eix d'abscisses: 0,5 p.. b) Estudi del creixement: 0,5 p. Gràfica aproximada: 0,5 p

49. PAU 2018 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 3

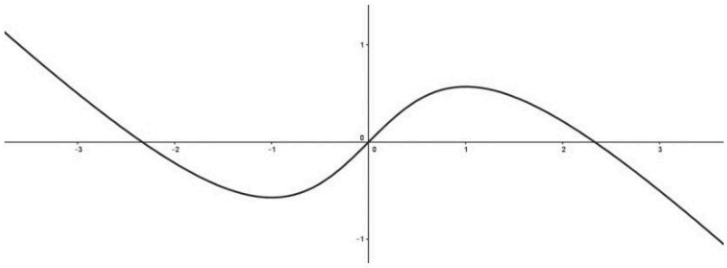
3. Sigui $y = f(x)$ una paràbola que té el vèrtex en el punt V = (0, −4) i talla l'eix de les abscisses en els punts (−2, 0) i (2, 0).
   a) Determineu-ne l'equació. *[1 punt]*
   b) Sigui una funció g tal que $g'(x) = f(x)$. Estudieu el creixement de la funció g, determineu-ne les abscisses dels extrems relatius i classifiqueu-los.*[1 punt]*

   a) L'equació de la paràbola serà $y = a(x - 0)^2 - 4$ i, si ha de passar pels dos punts que ens donen, obtenim que $a = 1$. Per tant, l'equació de la paràbola és $y = x^2 - 4$. Alternativament es pot plantejar un sistema de tres equacions i tres incògnites a partir dels tres punts.
   b) La paràbola és positiva per a $x < -2$ o $x > 2$, i negativa per $-2 < x < 2$. Per tant, la funció g és creixent en els dos primers intervals i decreixent en l'altre. Conseqüentment, g té un màxim relatiu en $x = -2$ i un mínim relatiu en $x = 2$.

Criteris de correcció: a) 1 p. b) Raonament del creixement: 0,5 p. Determinació d'extrems i classificació: 0,5 p.

50. PAU 2018 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 6

6. A continuació es mostra la gràfica d'una funció f que presenta un mínim relatiu en el punt d'abscissa $x = -1$ i un màxim relatiu en el punt d'abscissa $x = 1$.

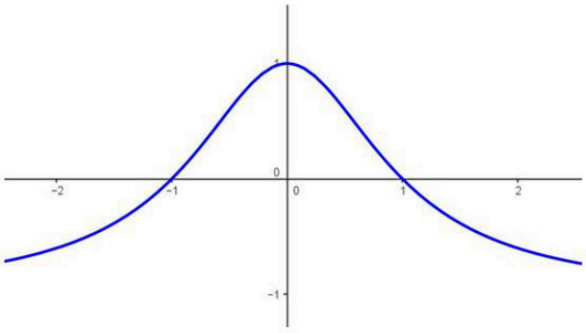


a) Sabent que $f'(0) = 1$, determineu l'equació de la recta tangent a f que passa per l'origen de coordenades. *[1 punt]*

b) Feu un esbós de la gràfica de la funció f' amb les dades de què disposeu. *[1 punt]*

a) El pendent de la recta tangent és 1, i passa per l'origen. Per tant l''equació serà $y = x$.

b) Com que f és decreixent fins a $x = -1$, en aquest interval f' serà negativa. Si $-1 < x < 1$ la funció és creixent. Per tant, la derivada és positiva, mentre que si $x > 1$ la derivada torna a ser negativa. Com que a més a més sabem que $f'(0) = 1$, la gràfica serà aproximadament així



Criteris de correcció: a) Obtenció del pendent: 0,5p. Equació de la recta: 0,5 p. b) Raonament: 0,5 p. Obtenció de la gràfica aproximada: 0,5 p.

51. PAU 2017 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 3

3. Considerem una funció $f(x)$ tal que la seva primera derivada és $f'(x) = x^2 + bx - 3$ en què b és un paràmetre real.
   a. Determineu el valor de b perquè $f(x)$ tingui un extrem relatiu en $x = -3$ i raoneu si es tracta d'un màxim o d'un mínim. *[1 punt]*
   b. Per a $b = -8$, trobeu l'equació de la recta tangent a $f(x)$ en el punt $(0, 2)$. *[1 punt]*

a) Sabem que en $x = -3$ hi ha un extrem relatiu, per tant $f'(-3) = 0$.

$f'(x) = x^2 + bx - 3 \rightarrow f'(-3) = (-3)^2 + b(-3) - 3 = 0 \rightarrow 9 - 3b - 3 = 0 \rightarrow \boxed{b = 2}$.

Per tant, $f'(x) = x^2 + 2x - 3$. Si estudiem on és positiva i on es negativa la funció $f'(x)$, obtenim que és positiva en els intervals $(-\infty, -3)$ i $(1, +\infty)$, mentre que és negativa en l'interval $(-3, 1)$. Per tant, en $x = -3$ hi ha un màxim relatiu.

b) El pendent de la recta buscada serà $f'(0)$. Si $b = -8$, tenim $f'(x) = x^2 - 8x - 3$ $\Rightarrow f'(0) = -3$.

La recta tangent en aquest punt $(0, 2)$ serà $y - 2 = -3(x - 0)$, o bé $\boxed{y = -3x + 2}$.

Criteris de correcció: a) Determinació del paràmetre b: 0,5 p. Identificació que es tracta d'un màxim: 0,5 p. b) Determinació del pendent: 0,5 p. Determinació de la recta tangent: 0,5 p.

---

52. PAU 2017 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 6

6. El vèrtex d'una paràbola és el punt $(1, 2)$.
   a. Si la paràbola talla l'eix de les abscisses pel punt $\left(\frac{-1}{2}, 0\right)$, quin serà l'altre punt de tall de la paràbola amb l'eix de les abscisses? *[1 punt]*
   b. Trobeu l'equació de la paràbola. *[1 punt]*

a) L'altre punt de tall de la paràbola a l'eix d'abscisses és $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$, ja que $x = 1$ és l'eix de simetria.

b) L'equació de la paràbola és de la forma $f(x) = a \cdot x^2 + \mathrm{b} \cdot x + \mathrm{c}$. Com que té el vèrtex en el punt $(1, 2)$ sabem que d'una banda $a + \mathrm{b} + \mathrm{c} = 2$ i, d'altra banda, la derivada ha de ser igual a zero en aquest punt. Com que $f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$ obtenim que $2 \cdot a + b = 0$. També sabem que passa pel punt $\left(\frac{-1}{2}, 0\right)$, per tant, $a \cdot \frac{1}{4} - \mathrm{b} \cdot \frac{1}{2} + \mathrm{c} = 0$. Resolent el sistema trobem que $a = -\frac{8}{9}$, $\mathrm{b} = \frac{16}{9}$ i $\mathrm{c} = \frac{10}{9}$.
Per tant, l'equació de la paràbola és $f(x) = -\frac{8}{9} \cdot x^2 + \frac{16}{9} \cdot x + \frac{10}{9}$.

També és correcte l'exercici si primer troben l'equació de la paràbola i després calculen l'altre punt de tall amb l'eix de les abscisses.

Criteris de correcció: a) Trobar l'altre punt de tall: 1 p. b) Plantejament del sistema: 0,5 p. Resolució i determinació de la paràbola: 0,5 p.

---

53. PAU 2017 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

1. D'una funció $y = f(x)$ sabem que la seva derivada és $f'(x) = x^3 - 4x$.
   a. Determineu els intervals de creixement i de decreixement de la funció $y = f(x)$. *[1 punt]*
   b. Determineu les abscisses dels seus extrems relatius i classifiqueu-los. *[1 punt]*

Observem que $f'(x) = x^3 - 4x = x \cdot (x-2) \cdot (x+2)$. Per tant, si igualem la derivada a zero, obtenim tres solucions $x = 0$, $x = -2$ i $x = 2$.

a) Resolem: $f'(x) > 0$, d'on s'obté que la funció creix si x pertany als intervals $(-2,0)$ i $(2,+\infty)$ i $f'(x) < 0$, d'on obtenim que la funció decreix en els intervals $(-\infty,-2)$ i $(0,2)$.

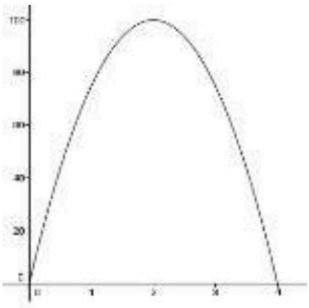
b) La funció té un màxim relatiu en el punt d'abscissa $x = 0$ i dos mínims relatius en els punts d'abscissa $x = 2$ i $x = -2$. Sabem de quin tipus d'extrems relatius es tracta pels intervals de creixement i de decreixement de l'apartat anterior.

Criteris de correcció: a) Determinació dels punts que anul·len la derivada: 0,5 p. Determinació dels intervals de creixement i decreixement: 0,5 p. b) Determinació dels extrems relatius: 0,5 p. Classificació i justificació de si són màxims o mínims: 0,5 p.

54. PAU 2017 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2

2. Des d'una barca es dispara una bengala de salvament marítim que s'apaga al cap de 4 minuts. En aquest interval de temps, es comprova que la intensitat lumínica de la bengala en funció del temps, mesurada en percentatges del 0% al 100%, queda perfectament descrita per l'expressió $L(t) = 25 \cdot t \cdot (4-t)$, on el temps t varia entre 0 i 4 minuts.
   a. Calculeu per a quin valor de t el percentatge d'intensitat lumínica serà màxim. *[1 punt]*
   b. Si des de la costa la bengala només és visible quan la intensitat lumínica és superior al 75%, quin és l'interval de temps en què serà visible des de la costa i, per tant, serà més factible el salvament? *[1 punt]*

a) El percentatge d'intensitat lumínica ve donat per la funció $L(t)=25t(4-t)$, amb $0\le t\le 4$, que és una funció quadràtica que té per gràfica una paràbola:

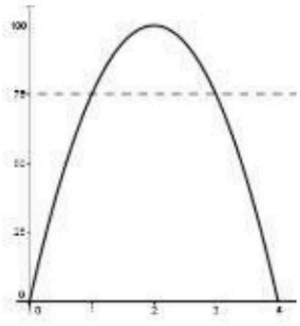


Cal, doncs, calcular el màxim d'aquesta funció; ho podrem fer calculant el vèrtex de la paràbola, o bé per derivació:

$$L'(t)=100-50t=0\Rightarrow t=2 \text{ minuts.}$$

Com que $L'(1)>0$ i $L'(3)<0$ es tracta efectivament d'un màxim. Per tant, després de 2 minuts del llançament, la intensitat serà màxima.

b) Hem de resoldre la inequació $100t-25t^2>75$.



Resolem l'equació de segon grau associada:

$$-25t^2+100t-75=0 \rightarrow t^2-4t+3=0$$

$$t=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot 3}}{2}=\frac{-4\pm 2}{2}=\begin{cases}3\\1\end{cases}$$, que són els punts de tall de la paràbola amb la recta $y=75$.

Per tant, per a *t* tal que $1<t<3$ la intensitat lumínica de la bengala superarà el 75% i aquest serà l'interval de temps en què el salvament serà més factible.

Criteris de correcció: a) Plantejament del problema: 0,25 p. Càlcul de la derivada: 0,25 p. Obtenció del màxim: 0,25 p. Justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 p.

55. PAU 2017 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 6

6. Considereu la funció $f(x) = -x^2 + bx + c$ amb b i c nombres reals.
   a. Trobeu b i c de manera que la gràfica de la funció passi pel punt $(-1,0)$ i tingui un extrem local en el punt d'abscissa $x = 3$. Raoneu de quin tipus d'extrem relatiu es tracta. *[1 punt]*
   b. Per al cas $b = 3$ i $c = 2$, trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica que és paral·lela a la recta $y = 5x - 2$. *[1 punt]*

a) Calculem la primera derivada $f'(x) = -2x + b$ i plantegem el sistema d'equacions que permet calcular a i b, imposant que passi pel punt $(-1,0)$ i que la derivada en $x = 3$ s'anul·la.

$$\left.\begin{array}{l} -1 - b + c = 0 \\ -2 \cdot 3 + b = 0 \end{array}\right\}$$ i per tant, $b = 6$ i $c = 7$.

Si estudiem on és positiva i on és negativa la funció $f'(x)$, observem que $f'(x) > 0$ per a $x < 3$ i que $f'(x) < 0$ per a $x > 3$. Per tant es tracta d'un màxim.
Alternativament poden argumentar que es tracta d'un màxim geomètricament, tenint en compte que es tracta d'una paràbola amb el coeficient del terme quadràtic negatiu.

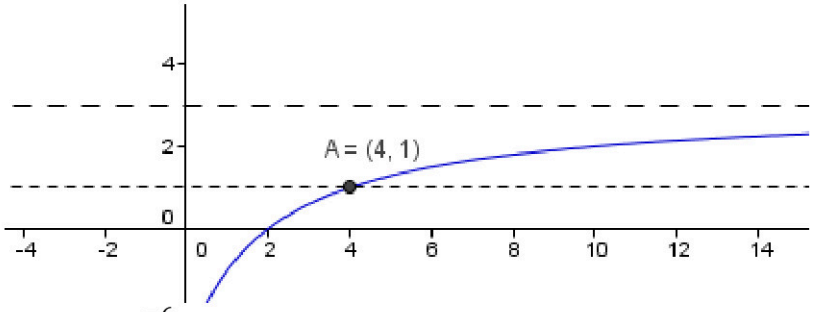
b) En aquest cas la derivada és $f'(x) = -2x + b = -2x + 3$. Cal trobar el valor de x tal que $f'(x) = 5$, per tant $-2x + 3 = 5$, i obtenim $x = -1$. Per al punt d'abscissa $x = -1$ tenim que l'ordenada és $y = -1 - 3 + 2 = -2$. Per tant, l'equació de la recta tangent és $y + 2 = 5(x + 1)$, és a dir, $y = 5x + 3$.

Criteris de correcció: a) Plantejament del sistema: 0,5 p. Resolució: 0,25 p. Justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 p. b) Determinació del pendent de la recta: 0,25 p. Obtenció del punt de tangència: 0,25 p. Obtenció de la recta tangent: 0,5 p.

56. PAU 2017 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 4

5. Les pèrdues o els beneficis d'una empresa venen donats per la funció $f(t) = \frac{3t-6}{t+2}$, en què $f(t)$ s'expressa en centenars de milers d'euros, un cop transcorreguts t anys des de l'inici del 2010.
   a. Feu un esbós de la gràfica de la funció $f(t)$ per a $t > 0$, calculant els intervals de creixement, els talls amb els eixos i les asímptotes. *[1 punt]*
   b. A l'inici de l'any 2010 quants euros perdia o guanyava l'empresa? Quins anys va tenir pèrdues l'empesa i a partir de quin any en va deixar de tenir? *[0,5 punts]*
   c. A partir de quin any els guanys de l'empresa van ser més grans o iguals a un centenar de milers d'euros? Es poden superar els 3 centenars de milers d'euros de beneficis? Raoneu les respostes. *[0,5 punts]*

a) Calculem la derivada de la funció $f'(t) = \frac{12}{(t+2)^2}$. Com que és positiva per a tot t la funció sempre és creixent. Trobem els talls amb els eixos (0,-3) i (2,0). Finalment tenim una asímptota horitzontal en $y = 3$.



b) $f(0) = \frac{-6}{2}$=-3. A l'inici de l'any 2010 l'empresa perdia 300.000 euros.
Per estudiar quins anys va tenir pèrdues i quan va deixar de tenir-les, resolem la inequació: $f(t) \geq 0 \rightarrow 3t - 6 \geq 0 \rightarrow t \geq 2$. A partir del 2012 l'empresa va començar a no tenir pèrdues, fins aleshores va tenir pèrdues.
c) Caldrà resoldre $f(t) \geq 1 \rightarrow 3t - 6 \geq t + 2 \rightarrow t \geq 4$. A partir del 2014 els guanys van superar o igualar els 100.000 euros i $f(t) \geq 3 \rightarrow 3t - 6 \geq 3t + 6 \rightarrow -6 \geq 6$ No pot ser! Els guanys de l'empresa mai superaran els 300.000 euros.

Criteris de correcció: a) Justificació que la funció és sempre creixent: 0,25 p. Determinació del punt de tall (2,0): 0,25 p. Determinació de l'asímptota: 0,25 p. Esbós

57. PAU 2016 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 2

2. Una empresa ven un producte a un preu de p euros. El nombre d'unitats venudes depèn del preu que fixem segons la funció

$$V(p) = \frac{30p + 10}{p}.$$

(a) Demostreu que, en augmentar els preus, les vendes disminueixen. (1 punt)

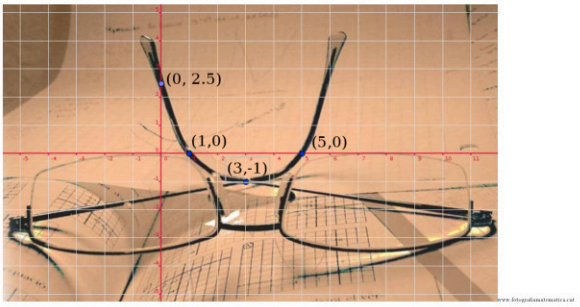
$V'(p) = -\frac{10}{p^2}$, que ´es negativa per a tot valor de p. Per tant, com més augmenti el preu menors seran les vendes.

(b) És possible que l'empresa vengui 20 unitats del producte? Si el preu augmenta indefinidament, què passarà amb les vendes? (1 punt)

$\frac{30p+10}{p} = 20 \rightarrow p = -1$, que és impossible. A més, $\lim_{p\to\infty} V(p) = 30$. Per tant, tenint en compte que $V(p)$ és una funció monòtona decreixent, les vendes tendiran a estabilitzar-se per sobre de 30 unitats.

58. PAU 2016 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 3

3. La següent *fotografia matemàtica* sembla indicar que les branques de les ulleres formen una paràbola. Tanmateix, no totes les corbes en forma de "$\bigcup$' són paràboles. Hem marcat sobre uns eixos de coordenades alguns dels punts: $(0, 2,5)$, $(1, 0)$, $(3, -1)$ i $(5, 0)$.



Justifiqueu si la gràfica correspon a una paràbola o no. (2 punts)

Si es tracta d'una paràbola, la seva equació serà de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Com que ha de passar pels punts indicats, haurà de complir: $f(1) = a + b + c = 0$, $f(5) = 25a + 5b + c = 0$, $f(3) = 9a + 3b + c = -1$. L'equació de la paràbola que passa per aquests tres punts seria, doncs, $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$, que no passa per $(0, 0.25)$. Per tant, no es tracta d'una paràbola.

59. PAU 2016 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 5

5. Considereu la funció:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}\,.$$

(a) Determineu els punts en què la funció f talla cadascun dels eixos. Determineu també els intervals en què la funció f és positiva. (1 punt)

$f(0) = \frac{1}{3}$. Per tant, la funció talla l'eix d'ordenades en el punt $\left(0, \frac{1}{3}\right)$. D'altra banda, si $f(x) = 0$ vol dir que $x+1 = 0$, d'on $x = -1$. Per tant, f talla l'eix d'abscisses en el punt $(-1, 0)$. A més, com que el denominador és positiu per a tot x, f serà positiva quan $x > -1$.

(b) Determineu els punts en què la recta tangent a la gràfica de f és horitzontal. (1 punt)

$f'(x) = \frac{-x^2-2x+3}{(x^2+3)^2}$, que, fent $f'(x) = 0$ ens dóna $x = -3$ i $x = 1$. Com que $f(-3) = -\frac{1}{6}$ i $f(1) = \frac{1}{2}$, els punts on la recta tangent és horitzontal són $\left(-3, -\frac{1}{6}\right)$ i $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

60. PAU 2016 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 2

2. Sigui la funció

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

(a) Estudieu-ne el creixement i, si en té, determineu-ne i classifiqueu els extrems relatius. (1 punt)

$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$. El denominador és sempre positiu. Per tant, quan $x < 0$ f' és positiva, i la funció és creixent, mentre que quan $x > 0$ f' és negativa, i la funció és decreixent. En conseqüència, l'únic punt estacionari és $x = 0$, que correspon a un màxim relatiu.

(b) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de f en el punt d'abscissa $x = 1$. (1 punt)

$f(1) = \frac{1}{2}$ i $f'(1) = -\frac{1}{2}$. Per tant, la recta és $y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x-1)$.

61. PAU 2016 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 4

4. Durant la darrera epidèmia d'Ebola es va considerar que, sense cap intervenció, el virus es propagava augmentant en un 3% diari el nombre d'afectats. Suposeu que, en una població, avui, hi ha 25 persones infectades.

(a) Escriviu la fórmula de la funció que dóna el nombre de persones infectades en passar els dies. Quantes persones estaran infectades al cap de 20 dies? (1 punt)

La funció és $f(x) = 25 \cdot 1,03^x$. Al cap de 20 dies el nombre de persones infectades serà $f(20) = 25 \cdot 1,03^{20} = 45$ o 46 persones infectades.

(b) A partir d'una data determinada, en aquesta població s'apliquen unes mesures sanitàries que permeten que el nombre de persones infectades disminueixi segons la funció $g(x) = 1000 \cdot (0.95)^x$.

Si considerem controlada l'epidèmia quan el nombre d'afectats és igual o inferior a 10 persones, quants dies hauran de passar després d'aplicar les mesures sanitàries per a poder declarar controlada l'epidèmia? (1 punt)

$1000 \cdot (0.95)^x = 10 \to 0,95^x = 0,01 \to x = \frac{\ln 0,01}{\ln 0,95} = 89.78...$ L'epidèmia estarà controlada passats 89 dies.

62. PAU 2016 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 1

1. Dues de les escales que se solen usar per a mesurar temperatures, l'escala Fahrenheit i l'escala Celsius, estan relacionades linealment, és a dir, la funció que ens dóna la temperatura F en graus Fahrenheit a partir de la temperatura C en graus Celsius, és una recta. L'escala Celsius estableix els 0 °C com a temperatura de congelació de l'aigua i els 100 °C com la temperatura d'ebullició. En l'escala Fahrenheit, aquests canvis d'estat de l'aigua s'esdevenen als 32 °F i als 212 °F respectivament.

   a. Escriviu la funció que, per a cada temperatura expressada en graus Celsius, dóna la temperatura expressada en graus Fahrenheit. [1 punt]

   Anomenarem C la temperatura Celsius, i F la Fahrenheit.

   Es tracta de determinar a i b en F = a·C + *b* amb les dades del problema:

   $a+b\cdot 0=32$, $a+b\cdot 100=212$, i d'aquí obtenim a = 32, b = 1,8.

   Per tant, l'equació que ens demanen és F = 1,8C + 32.

   b. A quina temperatura coincideixen els graus Celsius amb els graus Fahrenheit? [1 punt]

   C = 1,8·C + 32, i d'aquí C = -40. És a dir -40 °C equivalen a -40 °F.

---

63. PAU 2016 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 3

3. Sigui la funció

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1}.$$

   a. Estudieu en quins intervals f creix i en quins decreix. Determineu i classifiqueu, si n'hi ha, els màxims o mínims de f. [1 punt]

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{(1-x)(1+x)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

   Per tant, f és decreixent a $\left(-\infty,-1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$, i creixent a l'interval $\left(-1,1\right)$.

   La funció té un mínim a x = -1 i un màxim a x = 1.

   b. Escriviu l'equació de la recta tangent a la gràfica de f en el punt d'abscissa x = 2. [1 punt]

   $f(2)=\frac{2}{5}$, $f'(2)=-\frac{3}{25}$. Per tant, l'equació de la recta tangent és $y-\frac{2}{5}=-\frac{3}{25}(x-2)$.

---

64. PAU 2016 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 4

4. Sabem que la funció derivada f' d'una funció f, polinòmica de tercer grau, talla l'eix d'abscisses en els punts x = -1 i x = 2.

   a. Justifiqueu si és possible que, a més dels dos valors citats, f' també talli l'eix d'abscisses en un altre punt. [1 punt]

   La funció derivada d'una funció polinòmica de tercer grau és de grau 2 i, per tant, no pot tenir més de dos valors que l'anul·lin.

   b. Si ens diuen que f'(1) = 2, indiqueu i classifiqueu els màxims i mínims de la funció f. [1 punt]

   Com que -1 < 1 < 2 i f'(1) és positiva, f ha de tenir un mínim a x = -1 i un màxim a x = 2.

---

65. PAU 2015 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 3

3. Determineu els valors de a, b i c que fan que la funció

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

passi pel punt (0,4) i tingui extrems relatius en els punts d'abscissa x = 1 i x = 3.
Classifiqueu aquests extrems. [2 punts]

f(0) = 4. Per tant, c = 4. $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$. De les condicions f'(1) = 0 i f'(3) = 0 es dedueixen els valors de a i de b: a = - 6, b = 9.
A més, per a aquests valors tenim que $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$. Com que abans de x = 1 la derivada és positiva i després és negativa, aquest valor correspon a un màxim. Amb el mateix raonament, x = 3 correspon a un mínim.

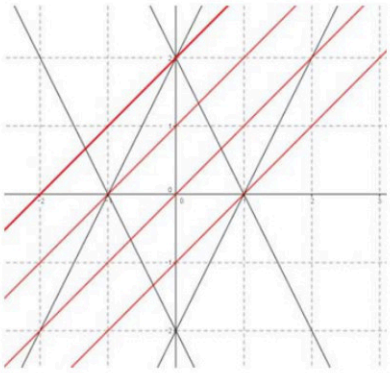
66. PAU 2015 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 4

4. S'ha observat que el nombre d'entrades que es venen per al cinema d'un poble està lligat al sou mitjà x de la població, expressat en milers d'euros, segons la funció

$$N(x)=\frac{50x}{x^2+1}.$$

a. Determineu el sou mitjà de la població que correspon a la màxima venda d'entrades, i justifiqueu la resposta. [1 punt]

$N'(x)=50\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$, que s'anul·la quan x = -1 i quan x = 1. Aquest darrer valor, que és l'únic que té sentit, és un màxim perquè abans la derivada és positiva i després és negativa. Per tant, el sou mitjà que correspon a la màxima venda d'entrades és de 1000 €.



b. Si suposem que els sous de la població creixen indefinidament, com incidiria aquest fet en la venda d'entrades del cinema? [1 punt]

$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ perquè el denominador és de grau més gran que el numerador. Acabaria amb el cinema buit.

---

67. PAU 2015 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 3

3. Considerem la funció $f(x)=\frac{2x+2}{x^2-x+2}$.

a. Escriviu l'equació de la recta tangent a la gràfica de f en el punt de tall amb l'eix de les ordenades. *[1 punt]*

b. Determineu els punts de la corba en els que la recta tangent és horitzontal. *[1 punt]*

a. f(0) = 1; el punt on la gràfica de f talla l'eix d'ordenades és (0,1). A més, $f'(x)=\frac{-2x^2-4x+6}{\left(x^2-x+2\right)^2}$. Per tant, $f'(0)=\frac{3}{2}$. La recta tangent en (0,1) serà, per tant, $y=\frac{3}{2}x+1$.

b. $f'(x)=0\to -2x^2-4x+6=0\to x=-3, x=1$. A més, $f(-3)=-\frac{2}{7}$ i $f(1)=2$. Per tant, els punts on la recta tangent a la corba és horitzontal són $\left(-3,-\frac{2}{7}\right)$ i $(1,2)$.

---

68. PAU 2015 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 5

5. La funció derivada d'una funció *f* és $f'(x) = e^{-2x} \cdot (x - x^2)$.
   a. Estudieu el creixement i el decreixement de la funció *f*. *[1 punt]*
   b. Si la funció *f* té extrems relatius, indiqueu-ne les abscisses i classifiqueu-los. *[1 punt]*

a. La variació de la funció *f* vindrà donada pel signe de *f'*. Com que l'exponencial és sempre estrictament positiva, aquest signe depèn només del factor polinòmic, que és positiu quan *x* està comprès entre 0 i 1. Per tant, *f* és estrictament creixent a $(0,1)$, i estrictament decreixent a $(-\infty,0) \cup (1,+\infty)$.

b. Com a conseqüència de l'apartat anterior, la funció *f* té un mínim relatiu a x = 0 i un màxim relatiu a x = 1.

---

69. PAU 2015 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 2

2. La funció derivada d'una funció f és $f'(x) = (x-5) \cdot e^{-2x}$.
   a. Si en té, determineu i classiqfiqueu els extrems de la funció f. [1 punt]

La part exponencial és sempre estrictament positiva. Per tant, l'únic extrem és x = 5. Com que la derivada és negativa abans d'aquest valor i positiva després, aquest és un mínim.

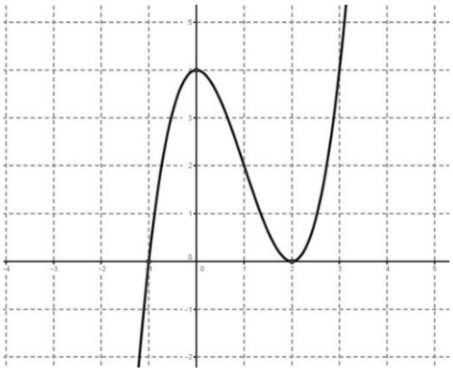
   b. Sabem que la gràfica de f passa per P(0,2). Calculeu l'equació de la recta tangent a f en el punt P. [1 punt]

$f'(0) = -5$. Per tant, l'equació de la recta tangent serà $y = -5x + 2$.

---

70. PAU 2015 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 5

5. La gràfica adjunta mostra la funció f', derivada d'una funció f.
   a. Determineu en quins intervals la funció f és creixent, i en quins és decreixent. Si n'hi ha, classifiqueu els extrems de la funció f. [1 punt]



f és creixent quan f' > 0, és a dir, a l'interval $(-1,+\infty)$. Serà decreixent a $(-\infty,-1)$. Per tant, l'únic extrem de la funció és x = -1, que correspon a un mínim.

   b. Indiqueu per a quins valors de x la recta tangent a f és horitzontal. [1 punt]

f'(x) = 0, a x = -1 i a x = 2. Per tant, en aquests dos punts la recta tangent serà horitzontal.

---

71. PAU 2014 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 2

2. Unes proves de selectivitat s'han valorat amb notes entre 0 i 10. El nombre de persones que han rebut una determinada qualificació x ha vingut donada per la fórmula $N(x) = 250 - (2x - 9)^2$.
   a. Quantes persones han tret un 10 d'aquesta prova? Quantes han tret un 6? *[1 punt]*
   b. Quina és la nota que han tret més persones? Quantes persones han tret aquesta nota? *[1 punt]*

a. $N(10) = 129$. $N(6) = 241$.

b. $N'(x) = -4(2x - 9)$, que s'anul·la quan x = 4.5; aquesta és la nota que han tret un nombre més gran d'alumnes. El nombre d'alumnes que l'han tret és $N(4.5) = 250$ alumnes.

---

72. PAU 2014 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 3

3. La funció derivada d'una funció f és $f'(x) = e^{-x} \cdot (x - x^2)$.
   a. Estudieu el creixement i decreixement de la funció f. *[1 punt]*
   b. Si en té, indiqueu les abscisses dels extrems relatius de la funció f, i classifiqueu-los. *[1 punt]*

a. La variació de la funció f vindrà donada pel signe de f'. Com que l'exponencial és sempre estrictament positiva, aquest signe depèn només del factor polinòmic, que és positiu quan x està comprès entre 0 i 1. Per tant, f és estrictament creixent a $(0,1)$, i estrictament decreixent a $(-\infty,0) \cup (1,+\infty)$.

b. Com a conseqüència de l'apartat anterior, la funció f té un mínim relatiu a x = 0 i un màxim relatiu a x = 1.

---

73. PAU 2014 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 6

6. Considerem la funció $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.
   a. Si en té, determineu les asímptotes horitzontals i verticals de f. *[1 punt]*
   b. Justifiqueu que la funció f és decreixent en tot el seu domini. *[1 punt]*

a. $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$. Per tant, y = 0 és una asímptota horitzontal. A més, $\lim_{x \to \pm 1} f(x) = \infty$. Per tant, x = -1 i x = 1 són asímptotes verticals de la funció.

b. $f'(x) = \dfrac{-x^2 - 1}{\left(x^2 - 1\right)^2}$. El numerador és negatiu i el denominador és positiu, per a tot valor del domini de f. Per tant, f és decreixent en tot el seu domini.

---

74. PAU 2014 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 2

2. La gràfica de la derivada f' de la funció f és una paràbola que talla l'eix d'abscisses en els punts (5,0) i (1,0), i té el vèrtex en el punt (3,-4).
   a. Expliqueu raonadament en quins intervals la funció f és creixent i en quins intervals és decreixent. Indiqueu-ne els extrems relatius i classifiqueu-los. *[1 punt]*
   b. Sabem que f(3)=2. Determineu l'equació de la recta tangent a la funció f en el punt (3,2). *[1 punt]*

a. Amb aquestes dades podem afirmar que f' és positiva i, per tant, f és creixent, a $(-\infty,1)\cup(5,+\infty)$ i f' és negativa i, per tant, f és decreixent, a l'interval $(1,5)$. En conseqüència, f té un màxim a x = 1 i un mínim a x = 5.

b. f'(3) = -4, que serà el pendent de la recta tangent que ens demanen. A més, (3,2) és el punt de tangència; la recta és $y-2=-4(x-3)$ o bé $y=-4x+14$.

---

75. PAU 2014 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 3

3. Una cadena de televisió decideix emetre un nou programa en la franja horària de les 17:00 h a les 21:00 h. El percentatge d'audiència *P* de la primera emissió en funció del temps *t,* mesurat en hores, és definit per la funció

$$P(t)=\frac{1}{5}\left(-t^3+49t^2-760t+3690\right) \qquad 17\le t\le 21$$

Els directius de la cadena acorden que el programa se seguirà emetent si en algun moment s'aconsegueix un percentatge d'audiència superior al 20 %.
   a. Expliqueu raonadament en quins intervals de temps l'audiència del programa va augmentar i en quins intervals va disminuir. *[1 punt]*
   b. En vista dels resultats, se seguirà emetent el programa? Justifiqueu la resposta. *[1 punt]*

a. $P'(t)=\frac{1}{5}(-3t^2+98t-760)$ si $17\le t\le 21$. L'únic valor positiu de l'interval que fa zero aquesta derivada és t = 20. A més, P'(t) és positiva quan t < 20, i és negativa quan t > 20. Per tant, la funció té un màxim relatiu a t = 20. Tindrem, doncs, que el percentatge d'audiència va augmentar de les 17:00 h. fins a les 20:00 h., i va disminuir de les 20:00 h. a les 21:00 h.

b. Hem vist a l'apartat anterior que P té un màxim relatiu quan $t=20$, amb un percentatge d'audiència de $P(20)=18\%$. El signe de la derivada ens diu que $P(17)$ i $P(21)$ són menors que $P(20)$. Per tant, a les 20:00 h. s'aconsegueix el màxim absolut de percentatge d'audiència. En cap moment s'ha aconseguit, doncs, un percentatge igual o superior al 20% i per tant el programa es deixarà d'emetre.

---

76. PAU 2014 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 6

6. Sigui la funció $f(x) = x \cdot e^x$.
   a. Si la funció f té extrems relatius, determineu-los i classifiqueu-los. *[1 punt]*
   b. Calculeu la recta tangent a la gràfica de f en el punt d'abscissa x = 0. *[1 punt]*

a. $f'(x) = e^x(1+x)$, que només s'anul·la quan x = -1. Com que la derivada és negativa quan x < -1 i és positiva quan x >-1, la funció f té un mínim a x = -1.

b. f(0) = 0, f'(0) = 1. Per tant, la recta tangent és y = x.

---

77. PAU 2014 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 1

1. El preu en Borsa d'unes accions ve donat per la funció $p(t) = 500 \cdot e^{0.3t}$, on t indica els anys transcorreguts a partir del moment present.
   a. Si venem les accions d'aquí a un any, quin serà el percentatge de benefici? *[1 punt]*
   b. D'aquí a quants anys haurem aconseguit doblar el preu de les accions? *[1 punt]*

a. $p(0) = 500, p(1) = 674{,}93$. Per tant, el primer any les accions s'incrementen en 174,93 €, el que suposa un increment del $\frac{174{,}93}{500} \cdot 100 = 34{,}98\%$.

b. $500 \cdot e^{0.3t} = 1000 \to e^{0.3t} = 2 \to 0{,}3t = \ln 2 \to t = \frac{\ln 2}{0{,}3} = 2{,}31$. Caldran més de 2 anys per a doblar el preu de les accions.

---

78. PAU 2014 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 4

4. Els beneficis diaris, en centenars d'euros, d'un taller de bicicletes ve donat per la funció $f(x) = -20x^2 + 50x - 20$, on x són els centenars de bicicletes que es venen. A més, el taller només té capacitat per a fabricar 200 bicicletes al dia.
   a. Calculeu el benefici màxim diari que poden obtenir. *[1 punt]*
   b. Determineu el mínim nombre de bicicletes que han de fabricar per a no tenir pèrdues. *[1 punt]*

a. $f'(x) = -40x + 50$, que s'anul·la quan $x = \frac{5}{4}$. A més, com que la funció f és una paràbola amb el coeficient de x^2 negatiu, es tracta d'un màxim. Tenim doncs, $f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{45}{4} = 11{,}25$ centenars d'euros, és a dir, 1125 €.

b. Caldrà determinar els punts de tall de f amb l'eix d'abscisses, que són $x = \frac{1}{2}$ i x = 2.

Per tant, f(x) < 0 si $x < \frac{1}{2}$: tindran beneficis a partir de la fabricació de 50 bicicletes.

---

79. PAU 2014 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 5

5. Considerem la funció $f(x)=\dfrac{3x-4}{2x-5}$.
   a. Indiqueu-ne el domini, i els punts on la gràfica de f talla l'eix d'abscisses. *[1 punt]*
   b. Si en té, trobeu les asímptotes horitzontals i verticals de la funció f. *[1 punt]*

a. $\text{Dom}\, f=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{5}{2}\right\}$ Els punts de tall són els que verifiquen f(x) = 0, és a dir, $x=\dfrac{4}{3}$.

b. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\dfrac{3}{2}$; $y=\dfrac{3}{2}$ és asímptota horitzontal. $\lim\limits_{x\to 5/2} f(x)=\infty$; f té asímptota vertical: la recta $x=\dfrac{5}{2}$.

---

80. PAU 2013 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 1

1. Donada una funció *f*, sabem que $f'(x)=e^{-x}\cdot(2x^2-3x)$.
   a. Estudieu el creixement i decreixement de la funció *f*. *[1 punt]*
   b. Si la funció f té extrems relatius, indiqueu-ne les abscisses i classifiqueu-los. *[1 punt]*

a. Estudiem el signe de f': la part exponencial és sempre estrictament positiva. Hem d'estudiar, per tant, $2x^2-3x=x(2x-3)$, que s'anul·la a x = 0 i a x = 3/2. Per tant, com que en els intervals $(-\infty,0)\cup\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$ f' és positiva, la funció f serà estrictament creixent; a l'interval $\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ f' és negativa. Per tant, f serà estrictament decreixent.

Criteris de correcció: Raonament: 0,5 p. Càlculs: 0,25 p. Resposta: 0,25 p.

b. Com a conseqüència de l'apartat anterior, la funció té un màxim relatiu per a x = 0, i un mínim relatiu per a x = 3/2.

Criteris de correcció: Determinació dels punts: 0,5 p. Classificació: 0,5 p.

81. PAU 2013 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 6

6. La demanda d'energia elèctrica d'una ciutat, comptada a partir de la mitjanit fins a les vuit del matí, és donada per la funció $f(t)=\frac{t^2-6t+12}{6}$, on t s'expressa en hores (h) i f(t) en milions de kilowatts hora (Kw h).
   a. A quina hora el consum coincideix amb el de la mitjanit, i quin és aquest consum? *[1 punt]*
   b. A quina hora es donarà el mínim consum? Justifiqueu que, efectivament, es tracta d'un mínim. *[1 punt]*

a. El consum a mitjanit és f(0) = 2. Ara caldrà determinar t amb f(t) = 2: $t^2-6t=0\rightarrow t=0, t=6$: A les 6 h. del matí el consum serà el mateix que a mitjanit.

Criteris de correcció: Consum a mitjanit: 0.25 p. Plantejament i resolució de l'equació: 0.75 p..

b. $f'(t)=\frac{1}{6}(2t-6)$, que val zero quan t = 3. Com que f' és negativa abans de 3 i és positiva després de 3, efectivament es tracta d'un mínim.

Criteris de correcció: Càlcul del mínim: 0.5 p. Justificació que és mínim: 0.5 p.

82. PAU 2013 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 2

2. Donades les funcions $f(x)=x^3+5x^2+(3+k)x$, $g(x)=x^2+kx$.
   a. Determineu les abscisses dels punts de tall de les dues corbes. *[1 punt]*
   b. Determineu k perquè la paràbola donada per la funció g tingui el seu vèrtex en el punt d'abscissa x = 2, i determineu-ne l'ordenada. *[1 punt]*

a. $x^3+5x^2+(3+k)x=x^2+kx\rightarrow x^3+4x^2+3x=0\rightarrow x=0, x=-1, x=-3$.

b. $g'(x)=2x+k$. Per tant, $g'(2)=4+k=0$ si $k=-4$. En aquest cas, $g(x)=x^2-4x$ d'on obtenim $g(2)=-4$: el vèrtex és (2,-4).

$(0,-1)$

83. PAU 2013 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 5

5. Segons uns estudis de laboratori, l'evolució de la població en un cultiu de bacteris al llarg del temps segueix la funció $f(t)=30\cdot\left(1-e^{-t}\right)+10$, on t són els dies que han transcorregut des de l'inici de l'experiment, i f(t) és la població, en milions de bacteris.
   a. Quina és la població en el moment de començar l'experiment? Justifiqueu si en algun moment s'arribarà a tenir 40 milions de bacteris. *[1 punt]*
   b. Hi haurà algun moment en què la població sigui màxima? Justifiqueu la resposta. *[1 punt]*

a. f(0) = 10. En el moment de començar l'experiment hi ha una població de 10 milions de bacteris.
Hi ha dos raonaments vàlids per a aquesta resposta:
1r. $30\cdot\left(1-e^{-t}\right)+10=40\rightarrow 1-e^{-t}=1\rightarrow e^{-t}=0$, que és impossible.
2n. $\lim_{t\to\infty} f(t)=40$ i En ser f estrictament creixent (caldria calcular la derivada en aquest apartat) i tenir asímptota horitzontal, no pot tallar-la

b. Com s'ha indicat abans, $f'(t)=30\cdot e^{-t}>0$. Per tant, la població no deixarà de créixer.

84. PAU 2013 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 1

1. Un equip científic ha estudiat l'evolució de la població d'una petita illa de la Polinèsia. Com a conclusió, ha determinat que, per tal d'obtenir una bona estimació de la població, cal fer servir l'expressió:

$$P(t)=400+18t-6t^{\frac{3}{2}}$$

on t indica els anys transcorreguts des del principi de l'estudi. Es demana:
   a. Determineu la població de l'illa quan va començar l'estudi, i passat un any. Quina ha estat la taxa de creixement en aquest període? *[1 punt]*
   b. Fins a quants anys després del començament de l'experiment va créixer la població de l'illa? Quin va ser el nombre màxim d'habitants? *[1 punt]*

a. P(0) = 400, P(1) = 412. La taxa de creixement en aquest període haurà estat de $\frac{12}{400}=3\%$.

b. $P'(t)=18-9\sqrt{t}$ que s'anul·la quan t = 4. Per a t<4 la derivada és positiva, i per a t>4 és negativa. Per tant, es tracta d'un màxim. A més, P(4) = 424. La població va créixer durant 4 anys, i va arribar a ser de 424 habitants.

85. PAU 2013 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 4

4. Els beneficis d'una companyia de transport de viatgers vénen donats per la funció $B(x) = ax^2 + bx + c$, on x és el preu que cobra per cada viatge. Sabem que si cobren 40 € per viatge, els beneficis són de 19.000 €. A més, si augmentem el preu un 25% el benefici que s'obté és el màxim, de 20.000 €. Tenint en compte aquestes dades, determineu els valor de a, b i c. *[2 punts]*

B(40)=19.000. Si augmentem el preu un 25%: $1{,}25 \cdot 40 = 50€$.
El preu de 50€ suposa un benefici de 20000€, i a més aquest benefici és màxim. Aquestes condicions es tradueixen en:

$$\left.\begin{array}{l} B(40) = 19000 \\ B(50) = 20000 \\ B'(50) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1600a + 40b + c = 19000 \\ 2500a + 50b + c = 20000 \\ 100a + b = 0 \end{array}\right\}$$

I resolent s'obtenen les solucions $a = -10$, $b = 1000$ i $c = -5000$, de manera que la funció benefici és: $B(x) = -10x^2 + 1000x - 5000$

86. PAU 2013 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 6

6. Determineu els valors dels paràmetres a, b i c que fan que les corbes d'equacions $f(x) = x^3 + ax + b$ i $g(x) = x^3 + cx^2 - 2$ tinguin la mateixa recta tangent en el punt (1,1). *[2 punts]*

Substituint en les respectives funcions obtenim a + b = 0, c = 2. Calculant les derivades obtenim $\left\{\begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 + a \\ g'(x) = 3x^2 + 2cx \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(1) = 3 + a \\ g'(1) = 3 + 2c \end{array}\right. \rightarrow a = 2c$. Per tant, a = 4, b = -4, c = 2.

87. PAU 2012 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 1

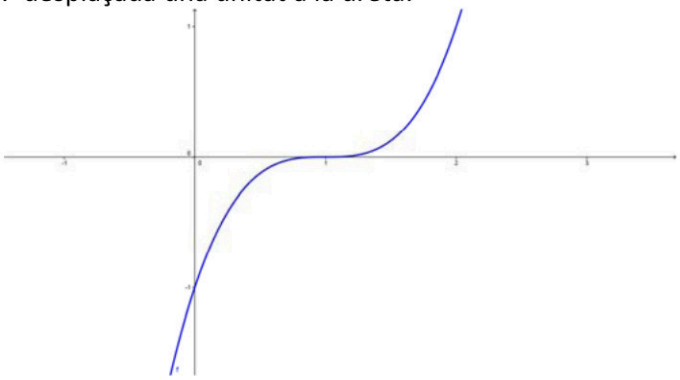
1. Considerem les funcions $f(x)=(x-a)^3$, $g(x)=-x^2+bx+c$.
   a. Determineu els valors dels paràmetres que fan que les dues corbes tinguin la mateixa tangent en el punt (2,1). *[1,5 punts]*
   b. En el cas a = 1, feu un gràfic aproximat de la funció f. *[0,5 punts]*

a. La informació de l'enunciat es tradueix així:

- $f(2)=(2-a)^3=1\rightarrow a=1.$
- $g(2)=-4+2b+c=1.$
- $\left.\begin{array}{l} f'(x)=3(x-a)^2\rightarrow f'(2)=3(2-a)^2=3 \\ g'(x)=-2x+b\rightarrow g'(2)=-4+b \end{array}\right\}\rightarrow -4+b=3\rightarrow b=7.$

A partir d'aquí, de la segona condició deduïm c = - 9.

b. Es tracta de x^3 desplaçada una unitat a la dreta:



88. PAU 2012 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 2

2. Considerem la funció $f(x)=\frac{12}{x}$.
   a. Indiqueu-ne el domini i estudieu-ne el creixement. *[1 punt]*
   b. Calculeu les equacions de les rectes tangents a la gràfica de f que són paral·leles a la recta y + 3x = 2. *[1 punt]*

a. $\text{Dom}\, f=R-\{0\}$. $f'(x)=\frac{-12}{x^2}$, que és negatiu en tot el domini: *f* és decreixent en tot el seu domini.

b. La recta que ens donen té pendent -3. $-\frac{12}{x^2}=-3\rightarrow x=\pm 2$. A més, $f(-2)=-6$ i $f(2)=6$. D'aquí obtenim les dues rectes tangents: $y=-3x-12$ i $y=-3x+12$.

89. PAU 2012 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

2. La població de bacteris en una mostra evoluciona segons la funció $f(t) = -t^2 + 4t + 12$, on *t* correspon al nombre de setmanes des de l'inici de l'experiment, i *f(t)* és el nombre d'individus que formen la mostra, en milions d'unitats.
   a. Quantes setmanes han de passar fins a la desaparició de la població? *[1 punt]*
   b. Quin serà el nombre màxim d'individus de la mostra, i al cap de quantes setmanes es donarà? *[1 punt]*

a. $f(t) = -t^2 + 4t + 12 = -(t+2)\cdot(t-6) = 0$ quan t = 6. La població de bacteris desapareixerà passades 6 setmanes.
b. $f'(t) = -2t + 4$, que s'anul·la a t = 2. Per tant, el màxim de població de bacteris es donarà a t = 2. El nombre de bacteris en aquest moment serà de f(2) = 16 milions de bacteris a la mostra.

90. PAU 2012 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3

4. Donada la funció $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, determineu els valors dels tres paràmetres sabent que la gràfica de la funció passa pel punt (1,18) i que té extrems relatius per a x = -2 i x = 4. *[2 punts]*

- f(1) = 18. Per tant, 1 + a + b + c = 18.
- $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$. Per tant, f'(-2) = 12 – 4a + b = 0, f'(4) = 48 + 8a + b = 0.

De les tres condicions es dedueix a = -3, b = -24, c = 44.

91. PAU 2012 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 5

6. Considerem la funció $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3}$.
   a. Escriviu la fórmula de la funció que a cada nombre real, x, li fa correspondre el pendent de la recta tangent a f en el punt d'abscissa x. *[1 punt]*
   b. Determineu l'equació del la recta tangent a la gràfica de f en el punt d'abscissa x = -1. *[1 punt]*

a. La funció de què ens estan parlant no és més que la funció derivada, que anomenarem p(x):

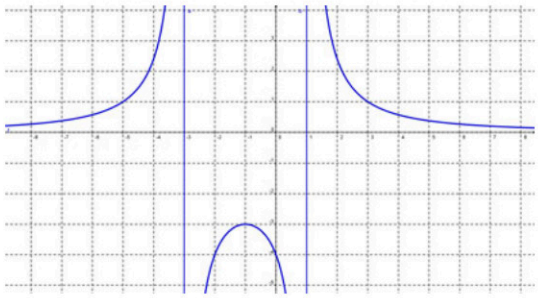
$$p(x) = f'(x) = \frac{-2x}{\left(x^2+3\right)^2}.$$

b. Com que $f(-1) = \dfrac{1}{4}$ i $f'(-1) = \dfrac{1}{8}$, la recta tangent és $y - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8}(x+1)$.

92. PAU 2012 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 1

1. Sobre la funció $f(x)=\dfrac{a}{x^2+bx+c}$ disposem de les dades següents:
   - Les seves asímptotes verticals són x = -3 i x = 1.
   - La seva gràfica passa pel punt (0,-4).
   a. Determineu la fórmula de la funció, i feu-ne un dibuix aproximat de la gràfica corresponent. *[1 punt]*
   b. En el cas a = 1, b = -2, c = -1 determineu i classifiqueu, si existeixen, els extrems relatius de la funció. *[1 punt]*

a. Les seves asímptotes fan que la funció hagi de ser de la forma $f(x)=\dfrac{a}{(x+3)(x-1)}$. A més tenim que $f(0)=\dfrac{a}{3\cdot(-1)}=-4\rightarrow a=12$. Per tant, $f(x)=\dfrac{12}{x^2+2x-3}$. La seva gràfica és:

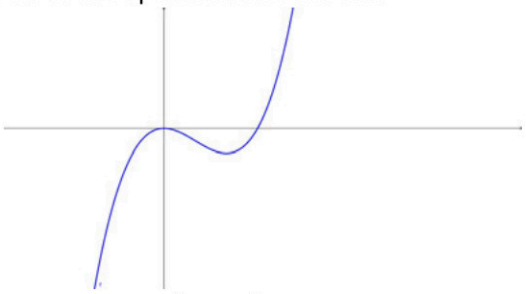


b. En aquest cas la funció és $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-1}$, i la seva derivada és $f'(x)=\dfrac{-2x+2}{(x^2-2x-1)^2}$, que s'anul·la per x = 1. Per tant, (1,-1/2) és l'únic extrem relatiu de la funció, i és un màxim perquè f' és positiva per valors propers a 1, però menors, i negativa per a valors propers a 1, però més grans.

93. PAU 2012 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 5

5. Sigui f una funció polinòmica de grau 3 amb un màxim a (0,0) i un mínim a (2,-4).
   a. Feu una gràfica aproximada de f. *[0,5 punts]*
   b. Determineu la fórmula de la funció. *[1,5 punts]*

a. La gràfica de la funció ha de ser aproximadament així:



b. L'equació és de la forma $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ i $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. Amb les dades que tenim podem escriure:

- $f(0)=0\rightarrow d=0$.
- $f(2)=8a+4b=-4$.
- $f'(0)=c=0$.
- $f'(2)=12a+4b=0$.

D'aquestes condicions obtenim a = 1, b = -3, c = 0, d = 0. La fórmula de la funció és, per tant, $f(x)=x^3-3x^2$.

94. PAU 2011 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 1

1.

a.

$N(1)=-1+9=8$. Al cap d'una setmana la població serà de 800 mosques.

$N(t)=0\rightarrow-(t-2)^2+9=0\rightarrow t=-1, t=5$. Com que la solució t = -1 no té sentit, les mosques desapareixeran passades 5 setmanes.

b.

$N'(t)=-2(t-2)=0\rightarrow t=2$. Ja que N'(t) és positiva per a t < 2 i negativa per a t >2, aleshores t = 2 correspon a un màxim. A més, $N(2)=9$. Per tant la població màxima és de 900 mosques, passades dues setmanes.

95. PAU 2011 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 6

6.

a. $f'(x) = 3ax^2 + 6x - b$. El pendent de la recta donada és 6. Les dues condicions de l'enunciat ens porten, per tant, a:

$$\left.\begin{array}{r} a - b = -\frac{8}{3} \\ b = 3a \end{array}\right\},$$

que té com a solució $a = \frac{4}{3}, b = 4$.

Criteris de correcció: 0,5 punts per al plantejament correcta de cadascuna de les dues condicions. 0,5 punts per a la determinació dels paràmetres.

b. En aquest cas tindrem $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$. Els valors que fan zero aquesta derivada són x = -3 i x = 1. Per tant, $f'(x) = 3(x+3)(x-1)$. D'aquí es dedueix que x = -3 correspon a un màxim relatiu i x = 1 correspon a un mínim relatiu.

Criteris de correcció: 0,25 punts per la substitució a f'. 0,25 punts per a la determinació dels zeros de f'. 0,25 punts per a la classificació de cadascun d'ells.

96. PAU 2011 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3

3.

a. $f'(x) = \frac{2x(a-x)}{(ax+1)^2}$. Per a tenir un extrem en x = 1 cal que es verifiqui $f'(1) = 0$, és a dir, $2(2+a) = 0$ que es verifica quan $a = -2$. Ara tindrem que $f'(x) = \frac{4x(1-x)}{(-2x+1)^2}$. Si $0 < x < 1, f'(x) > 0$ i si $x > 1, f'(x) < 0$. Per tant, x = 1 correspon a un màxim relatiu.

b. Si a = 3, $f(x) = \frac{2x^2}{3x+1}$. Per tant, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. La funció no té asímptotes horitzontals. $\lim_{x\to -\frac{1}{3}} f(x) = \infty$. Per tant, la funció té la recta $x = -\frac{1}{3}$ com a asímptota vertical.

97. PAU 2011 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 5

5.

a. La funció de beneficis serà $B(x) = I(x) - C(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 320x - 12000$. Tindrem, doncs, que B(x) = 0 si x = 40 o x = 600. En aquest interval la funció serà positiva: els beneficis seran positius sempre que produïm entre 40 i 600 bicicletes.

b. $B'(x) = -x + 320$. Si x < 320, B' > 0 i si x > 320, B' < 0: x = 320 correspon al màxim de beneficis, que és de 39200 €. A cada bicicleta guanyem, doncs, 39200/320=122,50 €

98. PAU 2011 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 6

6.

a. El domini de f està format per tots els nombres reals. A més $f'(x) = 1 + 3e^{-3x}$. Com que la funció exponencial és estrictament positiva, f' també ho és. Per tant, f és estrictament creixent.

b. $f(0) = -1, f'(0) = 4$; la recta tangent serà $y = 4x - 1$.

99. PAU 2011 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 1

1.

a.

El domini de f coincideix amb el de la funció logarítmica: es tracta dels nombre reals estrictament positius. La funció és contínua en tot el seu domini. Per tant, com que $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$, l'asímptota vertical de la funció f és x = 0.

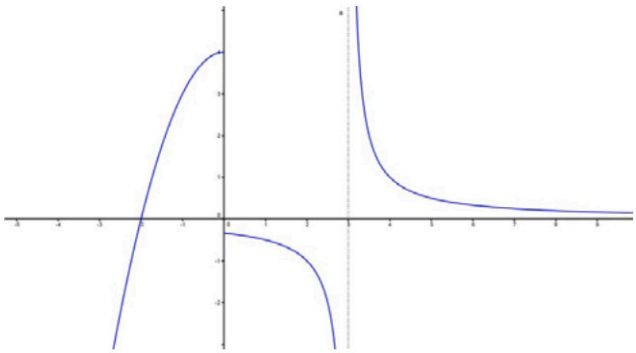
b.

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$, que s'anul·la quan $1 - \frac{1}{x} = 0 \to x = 1$. Com que la derivada és negativa quan $0 < x < 1$ i és positiva quan x > 1, tenim que f és decreixent quan $0 < x < 1$ i és creixent quan x > 1. Com que $f(1) = 1 - 0 = 1$, la funció f té un mínim en el punt (1,1).

100. PAU 2011 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 4

4.

a.



La funció és discontínua a x = 0 (els límits laterals són diferents) i a x = 3 (la funció hi té una asímptota).

b. Quan x > 0, $f'(x) = -\frac{1}{(x-3)^2}$. Per tant, $f'(4) = -1$ i $f(4) = 1$. L'equació de la recta tangent serà $y = -x + 5$.

Criteris de correcció: 0,5 punts pel càlcul de la derivada. 0,5 punts per la determinació de la recta tangent.

101. PAU 2011 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 6

6.

a. F és una funció exponencial amb la base menor que 1. Per tant, és decreixent.

b. $40000 \cdot 0{,}94^t = 20000 \rightarrow 0{,}94^t = \frac{1}{2} \rightarrow t = -\frac{\ln 2}{\ln 0.94} = 11{,}20$. Caldrà que passin més d'onze anys.

102. PAU 2010 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 2

2. Considerem la funció $f(x) = x^3 - ax^2 + 9x + b$.
   a. Determineu a i b sabent que la gràfica de f passa pel punt P(2,2) i té un extrem a x = 1.
   b. En el cas a = 6, b = 0, determineu els possibles màxims i mínims de f, i classifiqueu-los.

a.
Com que passa per P(2,2), f(2) = 2, que es tradueix en $2 = 8 - 4a + 18 + b \rightarrow 4a - b = 24$. D'altra banda, $f'(x) = 3x^2 - 2ax + 9$. Com que f té un extrem en el punt x=1, f'(1) = 0, que es tradueix en $0 = 3 - 2a + 9 \rightarrow a = 6$ i, per tant, b = 0.

b.
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$. Per tant, la funció f té un extrem a x=1 i un altre a x = 3. Com que $f' > 0$ abans de x = 1 i $f' < 0$ després de x = 1, el punt (1,4) és un màxim relatiu. Amb el mateix argument arribem a la conclusió que el punt (3,0) correspon a un mínim relatiu.

103. PAU 2010 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 3

3. Un fons d'inversions posa en marxa un producte financer que dóna un benefici de R(x) euros en fer una inversió de x centenars d'euros, segons la funció $R(x) = -0{,}01x^2 + 4x + 20$.
   a. Calculeu quina és la inversió que dóna més benefici.
   b. Calculeu el tant per cent de benefici que s'obtindrà amb una inversió de 1000 €, i la corresponent a 10000 €.

a.
$R'(x) = -0{,}02x + 4$. Per tant, aquesta derivada s'anul·la quan $x = \frac{4}{0{,}02} = 200$. Aquest valor correspon a un màxim ja que, quan x < 200, R' és positiva i quan x > 200 R' és negativa. Per tant, la inversió que dóna més benefici és de 20.000 €.
b.
$R(10) = 59$. Per tant, la taxa de rendiment d'una inversió de 1000 euros és del 5,9%.
$R(100) = 320$. Per tant, la taxa de rendiment d'una inversió de 10000 euros és del 3,2%.

104. PAU 2010 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 6

6. Donada la funció $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$:
   a. Determineu-ne el domini, i els valors de x pels quals el signe de la funció f és negatiu.
   b. Determineu les asímptotes horitzontals i verticals de la funció f.

a.
El domini de f són tots els nombres reals excepte x = -1 i x = 1.
El numerador de la funció és no negatiu per a qualsevol valor de x. El denominador és negatiu pels valors de x compresos entre -1 i 1. Per tant el signe de la funció és negatiu pels valors de x compresos entre -1 i 1, excepte en x = 0.

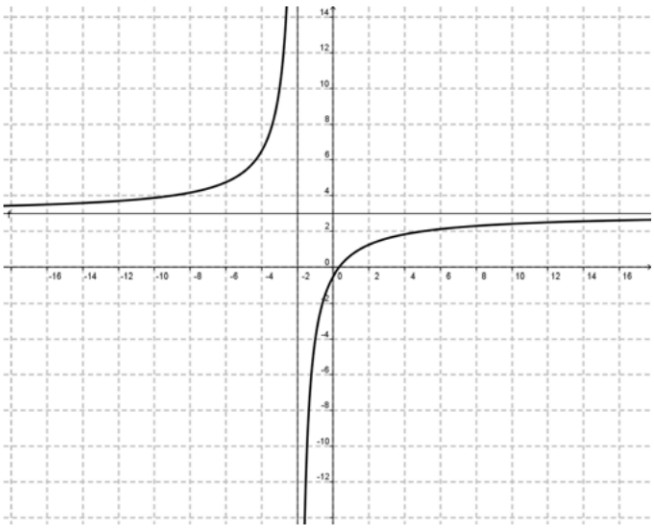
b.
$\lim_{x\to\infty} f(x)=1$. Per tant, y = 1 és asímptota horitzontal de la funció f.
$\lim_{x\to-1} f(x)=\infty, \lim_{x\to1} f(x)=\infty$. Per tant, x = -1 i x = 1 són asímptotes verticals de la funció f.

105. PAU 2010 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

Pregunta 1

a.
$\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x-1}{x+2}=3$. Per tant, y = 3 és asímptota horitzontal de f.
$\lim_{x\to-2} \dfrac{3x-1}{x+2}=\infty$. Per tant, x = -2 és asímptota horitzontal de f.

b.
En ser creixent en tot el seu domini i correspondre x = -2 a una asímptota vertical, $\lim_{x\to-2^-} \dfrac{3x-1}{x+2}=+\infty$ i $\lim_{x\to-2^+} \dfrac{3x-1}{x+2}=-\infty$, La gràfica de la funció és:



106. PAU 2010 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2

Pregunta 2

a.

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = b$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = e^0 + 1 = 2$. Si la funció ha de ser contínua en x = 0, cal que sigui b = 2.

b.

Per a valors positius de x tenim $f'(x) = -e^{-x}$, que és estrictament negativa. Per tant, f és decreixent per a tots els valors positius de x.

107. PAU 2010 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 2

Pregunta 2

a.

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Per tant, la funció no té asímptota horitzontal.

$\lim_{x\to -1} f(x) = \infty$. Per tant, la recta x = -1 és asímptota vertical de f.

b.

$f'(x) = \dfrac{-4x^2 - 8x}{(x+1)^2} = -3$ que, un cop ordenada, ens dóna $x^2 + 2x - 3 = 0$, d'on obtenim x = 1 i x = -3. Per tant, com que $f(1) = -2$ i $f(-3) = 18$, els dos punts són (1,-2) i (-3,18).

108. PAU 2010 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 3

Pregunta 3

a.

$f'(x) = e^{-x} - x \cdot e^{-x} = e^{-x}(1-x)$. com que el primer factor és sempre positiu i el segon només s'anul·la a x = 1 tenim que la funció és creixent per a x < 1 i decreixent per a x > 1. Per tant, x = 1 correspon a un màxim relatiu.

b.

$f(0) = 0$ i $f'(0) = 1$. Per tant, la recta demanada és y = x.

109. PAU 2010 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 6

Pregunta 6

a.

$f(0) = 162$,

$0 = -2x^2 + 48x + 162 = -2(x^2 - 24x - 81) = -2(x - 27)(x + 3) \to x = 27$. En el moment de declarar-se l'epidèmia hi havia 162 animals malalts. L'epidèmia durarà 27 setmanes.

b.

$f'(x) = -2(2x - 24)$ que s'anul·la per a x = 12. Correspon a un màxim ja que per a x < 12 la derivada és positiva, i per a x > 12 és positiva. A més, f(12)=450. Per tant, el nombre més gran d'animals afectats es donarà a la dotzena setmana, i n'hi haurà 450.

110. PAU 2010 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 4

Pregunta 4

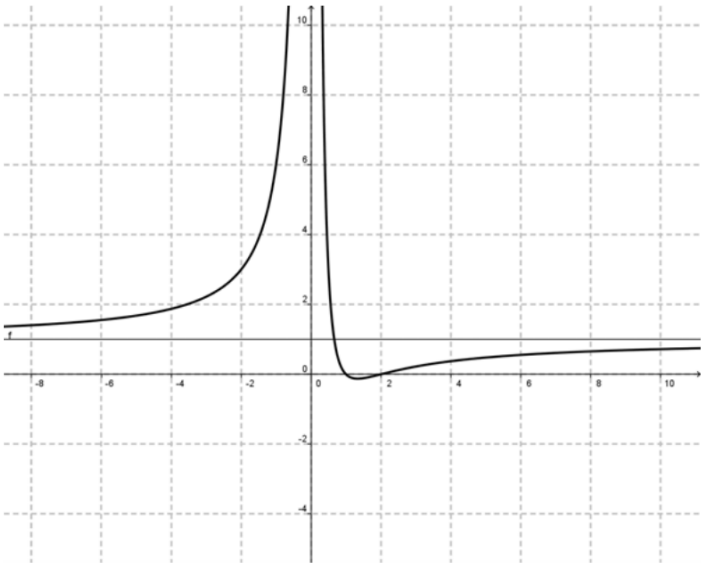
a.

$f'(x) = \dfrac{(2x-3)\cdot x^2 - (x^2 - 3x + 2)\cdot 2x}{x^4} = \dfrac{3x-4}{x^3}$. La recta $x + y = 5$ té pendent -1. Tindrem, doncs, $\dfrac{3x-4}{x^3} = -1 \to x^3 + 3x - 4 = 0 \to x = 1$. Com que $f(1) = 0$, el punt demanat és el (1,0).

b.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$: la recta y = 1 és asímptota horitzontal de la funció f.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$: la recta x = 0 és asímptota vertical de la funció f.



111. PAU 2010 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 5

Pregunta 5

a

La funció f és producte de dos factors que no són negatius per a cap valor de x. Per tant, no existeix cap valor de x tal que $f(x) < 0$. f(0)=0, i cap altre valor no ho pot verificar ja que, per a tot x, $e^x > 0$.

b

$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = x \cdot e^x(2+x)$. $f'(-1) = -e^{-1} \cdot 1 < 0$: la funció és decreixent en aquest punt.

Si x > 0 els tres factors de f' són estrictament positius. Per tant, f és creixent per a tot valor positiu de x.

112. PAU 2009 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 3

3. Calculeu els paràmetres a, b, c de la funció $f(x) = ax^2 + bx + c$, sabent que la recta $5x - y - 2 = 0$ és tangent a la corba $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 0$ i que el valor mínim absolut que pren la funció és -49/12. [2 punts]

Puntuació: Raonament i/o planteig correcte 1 punt; solució 1 punt; Total 2 punts.

Solució:

El pendent de la recta tangent a la paràbola en un punt d'abscissa x és el valor de la derivada $f'(x) = 2ax + b$, i si $x = 0$, el pendent és b. El pendent de la recta és 5, i per tant ha de ser $\boxed{b = 5}$. Per $x = 0$ el valor de y de la recta és $y = -2$, i el valor de y de la paràbola és c. Per tant ha de ser $\boxed{c = -2}$. El valor mínim de $f(x)$ s'obté en el punt on $f'(x) = 2a + b = 0$, o sigui per $x = -\frac{b}{2a}$, i en aquest punt, la funció pren el valor

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = -\frac{b^2}{4a} + c$$

Substituint els valors de b, c obtenim $-\frac{25}{4a} - 2 = -\frac{49}{12}$, d'on resulta $\boxed{a = 3}$. Per tant la funció és $\boxed{f(x) = 3x^2 + 5x - 2}$.

113. PAU 2009 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 6

6. La taxa d'inflació interanual d'un determinat país durant l'any 2007 expressada en punts percentuals, *i(t)*, es pot aproximar mitjançant la funció:

$$i(t)=\frac{t^2-10t+9}{40}+3,\qquad 1\le t\le 12,$$

en què t és el temps en mesos des del començament de l'any i $t=1$ és el mes de gener.

a) Trobeu en quins mesos la taxa d'inflació interanual se situa en 3 punts percentuals [1 punt]
b) Trobeu en quins mesos la taxa d'inflació és decreixent i en quins és creixent [0.5 punts]
c) Trobeu en quin mes la taxa d'inflació assoleix el valor mínim i calculeu aquest valor [0.5 punts]
d) Feu un esbós de la gràfica d'aquesta funció. [1 punt]
e) Trobeu en quin mes la taxa d'inflació assoleix el valor màxim i calculeu aquest valor [1 punt]

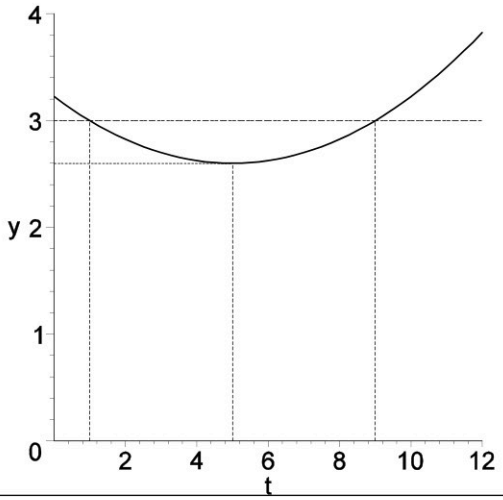
Solució:

a) Planteig: $\frac{t^2-10t+9}{40}+3=3$. Així doncs $t^2-10t+9=0$, obtenint-ne dues solucions $t=1$ i $t=9$ (gener i setembre).

b) Creixement i decreixement: $i'(t)=\frac{2t-10}{40}$, que és positiu si $t>5$ i negatiu si $t<5$. Per tant creix en l'interval $t>5$ (juny, juliol, agost, setembre octubre novembre, desembre) i decreix en l'interval $t<5$ (gener, febrer, març,abril).

c) El mínim és per $t=5$ (maig) i la inflació és $i(5)=2,6\%$.

d) Gràfica:



e) El valor màxim absolut s'obté el mes de desembre i val $i(12)=\frac{153}{40}=3,825\%$.

114. PAU 2009 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 1

QÜESTIONS

1. a) Representeu gràficament la funció:

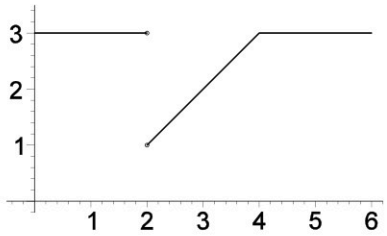
$$f(x)=\begin{cases} 3 & \text{si} \quad x<2 \\ x-1 & \text{si} \quad 2\le x\le 4 \\ 3 & \text{si} \quad x>4 \end{cases}$$

[1 punt]

b) Digueu en quins punts és discontínua i quin tipus de discontinuïtat té. [1 punt]

Solució:

a) Gràfica:



b) La funció és contínua excepte potser en els punts $x=2$ i $x=4$. En aquests punts tenim:
$\lim_{x\to 2^-} f(x)=3$ i $\lim_{x\to 2^+} f(x)=2-1=1$. Per tant la funció no és contínua per $x=2$ i té una discontinuïtat de salt.
$\lim_{x\to 4^-} f(x)=4-1=3$ i $\lim_{x\to 4^+} f(x)=3$. Per tant la funció és contínua per $x=4$.

115. PAU 2009 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 3

3. L'evolució de la població d'un estat, en milions d'habitants, es pot aproximar per la funció

$$P(t)=\frac{20t}{4+t^2}+40,$$

on t és el temps en anys.

a) Calculeu la població actual (per a $t=0$). [0.5 punts]
b) Determineu el límit de $P(t)$ quan t tendeix a infinit. [0.5 punts]
c) Determineu al cap de quants anys la població serà màxima i quants habitants prediu la funció per aquest màxim. [1 punt]

Solució:

a) $P(0) = 40$.

b) $\lim_{t\to\infty} P(t) = 40$.

c) Hem de determinar els extrems relatius. La funció derivada és:

$P'(t) = \dfrac{20(4+t^2) - 20t(2t)}{(4+t^2)^2} = \dfrac{20(4-t^2)}{(4+t^2)^2}$. Per tant els extrems relatius s'obtenen quan $4-t^2 = 0$, és a dir, per $t = -2$ i per $t = 2$. Només ens interessa el segon on $P(2) = 45 > 40$. Per tant es tracta d'un màxim i serà $P(2) = 45$.

116. PAU 2009 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 3

3. Segons un estudi sobre l'evolució de la població d'una espècie protegida determinada, podem establir el nombre d'individus d'aquesta espècie durant els propers anys mitjançant la funció

$$f(t) = \frac{50t + 500}{t+1}$$

En què t és el nombre d'anys transcorreguts.

a) Calculeu la població actual i la prevista d'aquí a 9 anys. [0.5 punts]

b) Determineu els períodes en què la població augmentarà i els períodes en que disminuirà. [1 punt]

c) Esbrineu si, segons aquesta previsió, la població tendirà a estabilitzar-se en algun valor i, si escau, determineu-lo. [0.5 punts]

Solució:

a) La població actual és de $f(0) = 500$ individus, i la prevista per d'aquí a 9 anys és de $f(9) = 95$ individus.

b) La derivada de $f(t) = \dfrac{50t + 500}{t+1}$ és $f'(t) = -\dfrac{450}{(t+1)^2}$ que és negativa per a tot t; per tant la funció és decreixent i la població disminueix contínuament.

c) Com que el límit de $f(t)$ quan $t \to \infty$ és 50, la població tendirà a estabilitzar-se en 50 individus.

117. PAU 2008 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 1

QÜESTIONS

1. Considereu la funció real de variable real:

$$f(x)=\frac{x^2+5x}{x-4}.$$

a) Determineu els intervals de creixement i decreixement. [1.5 punts]
b) Trobeu-ne els extrems relatius. [0.5 punts]

Solució: a) i b) El domini és tots els reals excepte el 4. La derivada és:

$$\boxed{f'(x)=\frac{(2x+5)(x-4)-x^2-5x}{(x-4)^2}=\frac{2x^2-3x-20-x^2-5x}{(x-4)^2}=\frac{x^2-8x-20}{(x-4)^2}=\frac{(x-10)(x+2)}{(x-4)^2}}.$$

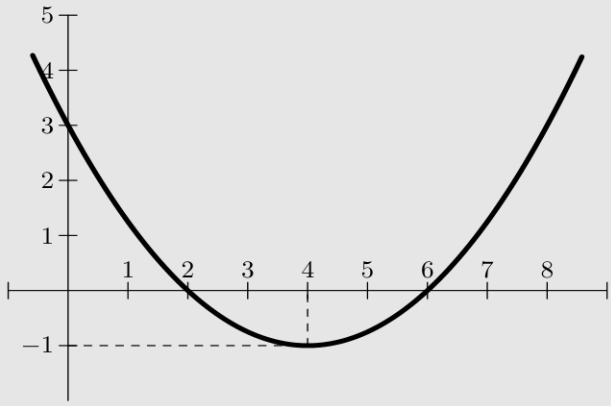
Per tant, els intervals de creixement i decreixement i els extrems són:

	$x<-2$	$x=-2$	$-2<x<10;\quad x\neq 4$	$x=10$	$x>10$
	$f'>0$	$f'=0$	$f'<0$	$f'=0$	$f'>0$
f	creix	màx	decreix	min	creix
f		1		25	

Per tant els extrems són $\boxed{(-2,1)}$ que és un màxim i $\boxed{(10,25)}$ que és un mínim.

118. PAU 2008 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 4

4. La gràfica adjunta representa una funció polinòmica de segon grau (paràbola).



a) Trobeu el vèrtex de la paràbola i les interseccions amb el eixos. [0.5 punts]
b) Determineu l'equació de la paràbola. [1.5 punts]

Solució: a) Observant el gràfic el vèrtex és $(4,-1)$, la intersecció amb l'eix y és $(0,3)$ i amb l'eix x són els punts $(2,0)$ i $(6,0)$.

b) Per tant l' equació de la paràbola és de la forma $y = a(x-2)(x-6) = a(x^2-8x+12)$.

Imposant que passi pel punt (0,3) tenim $3 = a\cdot(-2)(-6)$, d'on resulta $a = \frac{1}{4}$, i la paràbola té per equació $\underline{y = \frac{1}{4}(x-2)(x-6) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3}$.

119. PAU 2008 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 2

2. Determineu els intervals de creixement i decreixement, així com els màxims, i mínims de la funció $f(x) = x^2e^{-x}$. [2 punts]

Puntuació: Funció derivada factoritzada 1 punt; regions 1 punt. Total 2 punts.

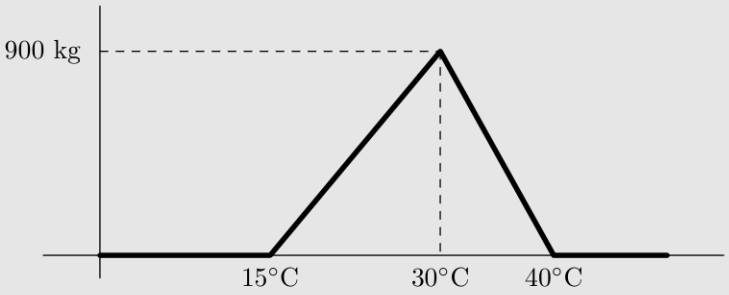
Solució:

La derivada és $f'(x) = 2xe^{-x} + x^2e^{-x}(-1) = x(2-x)e^{-x}$. Els punts on s'anul·la són: $x = 0$ i $x = 2$. Fem la taula de creixement, decreixement i extrems:

	$x<0$	$x=0$	$0<x<2$	$x=2$	$x>2$
$f'(x)$	<0	0	>0	0	<0
$f(x)$	decreix	mínim	creix	màxim	decreix

120. PAU 2008 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 6

6. Un hivernacle està destinat al cultiu de tomàquets. Se sap que les tomaqueres només produeixen fruits si la temperatura de l'hivernacle està entre 15^o C i 40^o C. La gràfica següent dóna la producció de tomàquets en quilos, segons la temperatura que es manté a l'hivernacle.



a) Si la temperatura està entre 15^o C i 29^o C, digueu quina variació experimenta la producció en augmentar la temperatura 1^o C. Calculeu aquesta variació quan la temperatura està entre 30^o C i 39^o C. [1.5 punts]

b) Definiu una funció a trossos que expressi la producció en funció de la temperatura. [1.5 punts]

c) Trobeu les temperatures per les quals s'obté el 75% de la producció màxima. [1 punt]

Solució: a) Per a temperatures entre 15^o C i 29^o C la variació que experimenta la producció en augmentar 1^o C la temperatura és de $\frac{900}{15} = 60\,\text{kg}/^o$. Per temperatures entre 30^o C i 39^o C és de $-\frac{900}{10} = -90\,\text{kg}/^o$.

b) La funció que descriu el gràfic donat és:

$$f = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \le 15 \\ 60(t-15) & \text{si} \quad 15 < t \le 30 \\ -90(t-40) & \text{si} \quad 30 < t \le 40 \\ 0 & \text{si} \quad t > 40 \end{cases}$$

c) El 75% de 900 és 675. Per tant els valors de pels quals s'obté el 75% de la producció màxima són:

$$\left.\begin{array}{l} 60(t-15) = 675 \;\rightarrow\; t = 15 + \frac{675}{60} = 26.25^o\text{C} \\ -90(t-4) = 675 \;\rightarrow\; t = 40 - \frac{675}{90} = 32.5^o\text{C}. \end{array}\right\}$$

121. PAU 2007 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 1

QÜESTIONS

1. Considereu la funció

$$f(x)=\frac{x^2}{2x-1}.$$

a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la corba $y=f(x)$ en el punt d'abscissa $x=2$.
b) Determineu els intervals de creixement i decreixement, així com els extrems, si n'hi ha.

Puntuació: Cada apartat 1 punt. Total 2 punts.

Solució: a) La funció derivada és $\boxed{f'(x)=\frac{2x(2x-1)-2x^2}{(2x-1)^2}=\frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}}$.

Per tant: $f(2)=\frac{4}{3}$ i $f'(2)=\frac{4}{9}$, i la recta tangent té per equació:

$$y=\frac{4}{3}+\frac{4}{9}(x-2)\rightarrow \boxed{4x-9y+4=0}.$$

b) La derivada s'anul·la per $x=0$ i per $x=1$. Els intervals de creixement i decreixement i els extrems són doncs:

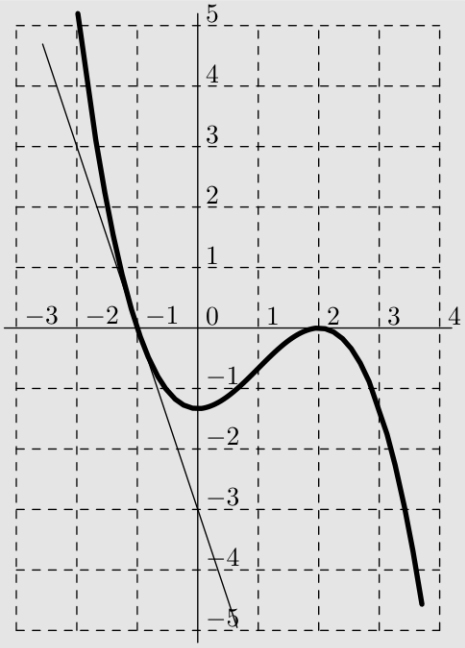
	$x<0$	$x=0$	$0<x<1;\quad x\neq\frac{1}{2}$	$x=1$	$x>1$
	$f'>0$	$f'=0$	$f'<0$	$f'=0$	$f'>0$
f	creix	màx	decreix	min	creix
f		0		1	

El tipus d'extrem es pot determinar directament a partir del creixement i decreixement al voltant i per tant no és necessari calcular la derivada segona.

122. PAU 2007 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 5

PROBLEMES

5. La corba $y = f(x)$ de la figura té per domini el conjunt de tots els nombres reals.



a) Determineu els punts on la funció val 0. Determineu els valors de x pels quals la funció és positiva.

b) Digueu en quins punts s'anul·la la derivada i en quins punts $f'(x) < 0$.

c) Trobeu l'equació de la recta tangent en el punt d'abscissa $x = 2$.

d) Determineu la recta tangent en el punt d'abscissa $x = -1$.

e) Determineu a sabent que $f(x) = a(x+1)(x-2)^2$.

Puntuació: Apartat a) 0.5 punts; apartat b) 0.5 punts; apartat c) 0.5 punts; apartat d) 1 punt; apartat e) 1.5 punts. Total 4 punts. L'apartat e) és el més difícil donat que l'únic valor no nul que és clarament llegible a la gràfica és el de la derivada en el punt $x = -1$. Tot raonament correcte que condueixi a un valor aproximat de *a* ha de ser valorat fins a 1 punt.

Solució: a) La funció val 0 per $x=-1$ i per $x=2$, i és positiva per $x<-1$.

b) La derivada s'anul·la per $x=0$ i per $x=2$ i $f'(x)<0$ per $x<0$ i $x>2$.

c) La recta tangent per $x=2$ és $\boxed{y=0}$

d) El pendent de la recta tangent en el punt d'abscissa $x=-1$ és -3 i la funció val 0. Per tant, la recta tangent és: $\boxed{y=-3(x+1)}$.

e) Tenim

$$f(x)=a(x+1)(x-2)^2=a(x^3-3x^2+4).$$

Per tant, la derivada és $f'(x)=a(3x^2-6x)$. Com aquesta val -3 per $x=-1$ obtenim $a(3+6)=-3$, d'on resulta $a=-\frac{1}{3}$. Per tant la funció és:

$$\underline{\left| f(x)=-\frac{1}{3}(x+1)(x-2)^2=-\frac{1}{3}(x^3-3x^2+4)\right|}.$$

123. PAU 2007 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4

4. La funció $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ té un extrem relatiu en el punt (1,4) i passa pel punt (3,0). Trobeu a,b,c.

Puntuació: Plantejament 1 punt; solució 1 punt. Total 2 punts.

Solució: a) La funció derivada és $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. L'extrem relatiu en el punt (1,4) dóna dues condicions: passa pel punt i per tant $a+b+c=4$, i la derivada val 0 i per tant $3a+2b+c=0$. Com que també passa pel punt (3,0) resulta $27a+9b+3c=0$, i simplificant-la $9a+3b+c=0$. Escrivim la matriu ampliada del sistema i reduïm per Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 9 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -12 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & 4 & 36 \end{array}\right)$$

d'on obtenim

$$\begin{cases} c &= 9 \\ b &= 12-18 &= -6 \\ a &= 4-9+6 &= 1. \end{cases}$$

La funció és doncs, $f(x)=x^3-6x^2+9x$.

Nota: La funció derivada és $f'(x)=3x^2-12x+9$ i la derivada segona és $f''(x)=6x-12$. Per tant $f(1)=4$, $f'(1)=0$ i $f''(1)=-6$. Per tant, la funció té un màxim en el punt (1,4).

124. PAU 2007 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 5

PROBLEMES

5. Considereu la funció real de variable real

$$f(x)=\frac{2x+m}{x}$$

on m és un paràmetre real.

a) Calculeu el valor de m per tal que la tangent a la gràfica de $f(x)$ en el punt d'abscissa $x=-3$ sigui paral·lela a la recta $x-3y+1=0$. Calculeu també l'equació d'aquesta tangent.

Ara fixeu el valor de $m=1$.

b) Doneu el domini de la funció i els intervals on és creixent o decreixent.
c) Determineu les asímptotes.
d) Feu un esbós de la gràfica.

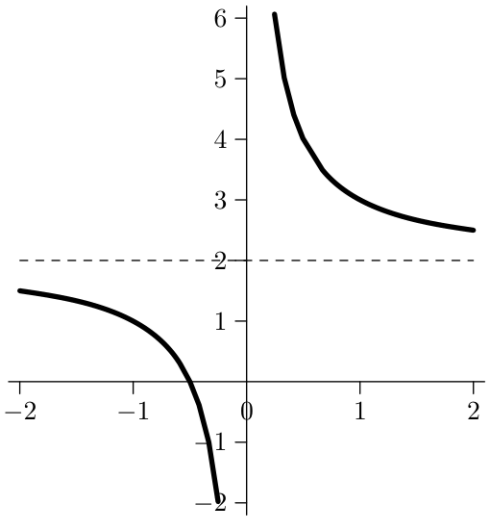
Puntuació: Cada apartat 1 punt. Total 2 punts.

Solució: a) Calculem la funció derivada: $f(x)=2+\frac{m}{x}$, $f'(x)=-\frac{m}{x^2}$, i el seu valor per $x=-3$ que ha de ser igual al pendent de la recta: $f'(-3)=-\frac{m}{9}=\frac{1}{3}$. D'on resulta $\boxed{m=-3}$. La funció serà: $f(x)=2-\frac{3}{x}$, i el valor de la funció per $x=-3$ és $f(-3)=2-\frac{3}{-3}=3$. Per tant, la recta tangent és: $y=3+\frac{1}{3}(x+3)$, o també: $\boxed{x-3y+12=0}$.

b) Ara la funció és $\boxed{f(x)=2+\frac{1}{x}}$. El domini és tot els reals excepte el zero, i la derivada és $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ que és negativa en tot el domini. Per tant la funció és decreixent en tot el domini.

c) Té una asímptota vertical $\boxed{x=0}$ on s'anul·la el denominador. El límit de $f(x)$ per $x\to\infty$ és 2. Per tant té una asímptota horitzontal $\boxed{y=2}$.

d) Tenint en compte que per $\boxed{x>0}$ la funció $f(x)$ és positiva, el gràfic de la funció és per tant:


6
5
4
3
2
1
−2
−1
0
1
2
−1
−2

125. PAU 2007 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 2

2. Considereu la funció definida a trossos següent:

$$f(x)=\begin{cases} -4x+a & \text{si} \quad x\le -2 \\ x^2-5 & \text{si} \quad -2<x<1 \\ bx+3 & \text{si} \quad 1\le x \end{cases}$$

a) Calculeu els valors de a i de b per tal que $f(x)$ sigui contínua per a tot x.
b) Feu un gràfic de la funció obtinguda en l'apartat anterior.

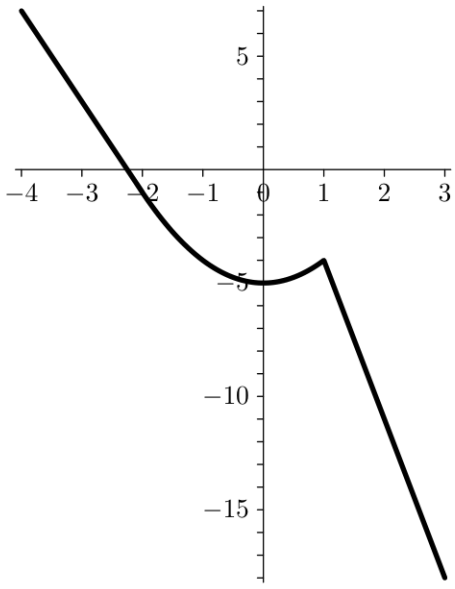
Puntuació: Cada apartat 1 punt. Total: 2 punts.

Solució: a) Perquè sigui contínua els límits per l'esquerra i per la dreta en els punts $x=-2$ i $x=1$ han de ser iguals. Per tant:

$$\left.\begin{array}{rcl} 8+a & = & -1 \\ -4 & = & b+3 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{|l} \hline a=-9 \\ b=-7 \\ \hline \end{array}\right\}$$

i la funció serà: $f(x)=\begin{cases} -4x-9 & \text{si} \quad x\le -2 \\ x^2-5 & \text{si} \quad -2<x<1 \\ -7x+3 & \text{si} \quad 1\le x \end{cases}$

b) Per $x\le -2$ és una recta de pendent -4 i per $x=-2$ té el valor $f(x)=-1$. Per $-2\le x\le 1$ és una paràbola de vèrtex a $x=0$ i per $x\ge 1$ és una recta de pendent -7 que per $x=1$ te el valor $f(x)=-4$. A més, per construcció és continua. Per tant la gràfica és:



126. PAU 2007 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 5

PROBLEMES

5. Els beneficis mensuals d'un artesà expressats en euros, quan fabrica i ven x objectes, s'ajusten a la funció $B(x) = -0.5x^2 + 50x - 800$, en què $20 \le x \le 60$.

a) Trobeu el benefici que obté en fabricar i vendre 20 objectes i en fabricar i vendre 60 objectes.

b) Trobeu el nombre d'objectes que ha de fabricar i vendre per a obtenir el benefici màxim, així com aquest benefici màxim.

c) Feu un esbós del gràfic de la funció $B(x)$.

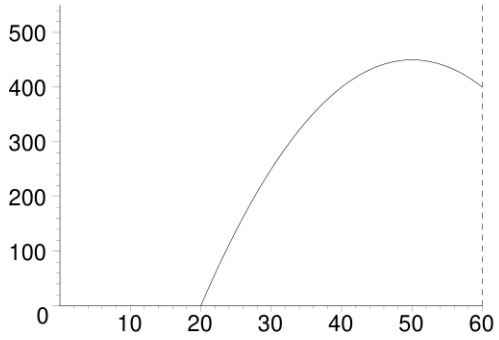
d) El benefici mitjà per x objectes és $M(x) = \dfrac{B(x)}{x}$. Digueu quants objectes ha de fabricar i vendre perquè el benefici mitjà sigui màxim, i quin és aquest benefici.

Puntuació: 1 punt per cada apartat. Total: 4 punts.

Solució: a) $\boxed{B(20) = 0\,€}$. $\boxed{B(60) = 400\,€}$.

b) Trobem els extrems relatius igualant la derivada a 0. $B'(x) = -x + 50$. Per tant s'obté per $\boxed{x = 50}$ i el seu valor és $\boxed{B(50) = 450\,€}$, que òbviament és el màxim absolut a l'interval $20 \le x \le 60$.

c) El gràfic és:



d) El benefici mitjà ve donat per $M(x) = \dfrac{B(x)}{x} = -0.5x + 50 - \dfrac{800}{x}$. Per tant la derivada és: $M'(x) = -0.5 + \dfrac{800}{x^2}$. Igualant a zero resulta $x = \pm 40$, i l'única solució dins de l'interval és $\boxed{x = 40}$ i té per valor $M(40) = -20 + 50 - 20 = 10$. Per tant ha de vendre 40 objectes i obtindrà un benefici mitjà de 10 €.

127. PAU 2006 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 1

QÜESTIONS

1. En els sis primers mesos, des que van obrir, una llibreria ha anat anotant el nombre de compradors de cada mes. Aquest nombre $N(x)$ es pot ajustar per la funció $N(x)=\dfrac{1000x-600}{x}$, essent x el número del mes comptat des que van obrir.

a) Quants compradors van tenir el segon mes? En quin mes, comptat a partir de l'obertura, van tenir 900 compradors?

b) Suposem que aquesta fórmula serveix per predir el nombre de compradors en el futur. Podem assegurar que aquest nombre sempre anirà en augment? Expliqueu ben bé el perquè de la vostre resposta.

Puntuació: a) 1 punt; b) 1 punt. Total 2 punts.

Solució: a) $N(2)=\dfrac{1000\cdot 2-600}{2}=700$. Per trobar en quin mes van comprar 900 persones fem $N(x)=\dfrac{1000x-600}{x}=900$ i resolem l'equació:

$1000x-600=900x$. El resultat és $x=6$.

b) La derivada és $N'(x)=\dfrac{600}{x^2}>0$ que sempre és positiva. Per tant el nombre de compradors sempre anirà en augment.

Tenint en compte que $\lim\limits_{x\to\infty} N(x)=1000$, això vol dir que la corba té una asímptota horitzontal i que el nombre de compradors tendirà a ser 1000 quan s'arribi a la saturació.

Nota pel corrector: S'entén que la única cosa que ha de contestar l'alumne són les dues primeres frases. No es demana de calcular l'asímptota i no es descomptaran punts per no donar-la sempre que es raoni correctament el creixement. Tampoc es demana cap raonament que tingui en compte que $N(x)$ és una aproximació d'una funció a valors enters.

128. PAU 2006 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 5

PROBLEMES

5. Considereu la funció:

$$f(x)=\begin{cases} x^3+x+2 & \text{si} \quad x<0 \\ x^2-3x+2 & \text{si} \quad x\geq 0. \end{cases}.$$

a) Estudieu la continuïtat.
b) Determineu els intervals de creixement i decreixement de la funció.
c) Feu un gràfic aproximat de la funció.
d) Trobeu els extrems relatius i absoluts en l'interval [-2 , 2].

Puntuació: cada apartat 1 punt. Total 4 punts.

Solució: a) $f(0^-)=2$ i $f(0^+)=2$. Per tant la funció és contínua també en el punt d'abscissa 0.

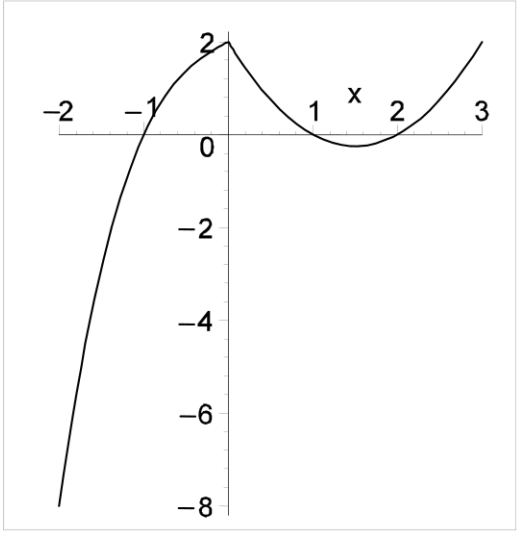
b) La derivada és:

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2+1 & \text{si} \quad x<0 \\ 2x-3 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

Per estudiar els intervals de creixement i decreixement hem d'estudiar el seu signe

$x<0$	$0<x<\frac{3}{2}$	$x=\frac{3}{2}$	$x>\frac{3}{2}$
$f'(x)>0$	$f'(x)<0$	$f'(x)=0$	$f'(x)>0$
creix	decreix	mínim	creix

c) Per $x<0$ la funció sempre és creixent, talla l'eix x en $x=-1$ i l'eix d'ordenades en el punt (0,2). Per $x\geq 0$ és una paràbola que talla l'eix d'abscisses en els punts $x=1$ i $x=2$ i l'eix d'ordenades en el punt (0,2). Per tant la gràfica té la forma següent:



d) Els extrems relatius són $(0,2)$, ja que la funció és creixent a l'esquerra i decreixent a la dreta de $x=0$ i $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\right)$, on s'anul·la la derivada per $x>0$.

Els extrems absoluts són els extrems relatius o es prenen en el límit de l'interval. Tenint en compte que $f(-2)=-8$, $f(0)=2$, $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{4}$ i $f(2)=0$, el mínim absolut en l'interval [-2,2] és $(-2,-8)$ i el màxim absolut és $(0,2)$.

129. PAU 2006 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

1. Considereu la funció $f(x)=\frac{3-2x}{x}$

a) Trobeu els punts de la gràfica en els quals la recta tangent és paral·lela a la recta $3x+4y+5=0$.

b) Calculeu l'equació d'aquestes rectes tangents.

Puntuació: a) 1 punt; b) 1 punt. Total: 2 punts.

Solució: a) La funció és $f(x)=\frac{3-2x}{x}=-2+\frac{3}{x}$ i la seva derivada $f'(x)=-\frac{3}{x^2}$. Igualant-la al pendent de la recta obtenim els punts en els quals la recta tangent és paral·lela a la recta donada:

$-\frac{3}{x^2}=-\frac{3}{4}$; per tant $x^2=4$ i $x=\pm 2$. Substituint en la funció $f(x)$ obtenim les ordenades dels punts: $P_1=\left(2,-\frac{1}{2}\right)$, $P_2=\left(-2,-\frac{7}{2}\right)$.

b) Per tant les rectes són:

$$y+\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}(x-2) \quad \text{o bé} \quad 3x+4y-4=0,$$

$$y+\frac{7}{2}=-\frac{3}{4}(x+2) \quad \text{o bé} \quad 3x+4y+20=0.$$

Nota pel corrector: No es demana de fer el gràfic.

130. PAU 2006 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 4

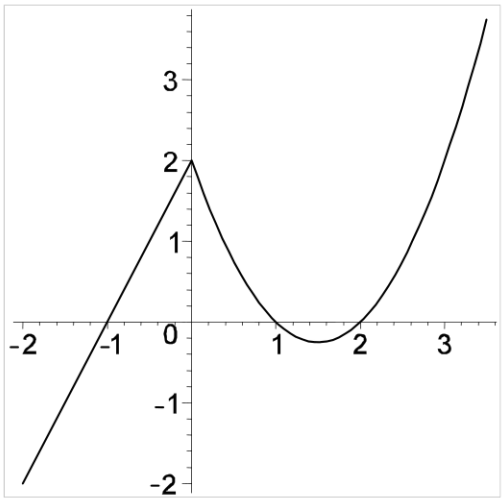
4. Considereu la funció

$$f(x)=\begin{cases}2x+2, & \text{si} \quad x\le 0\\ x^2-3x+2, & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

a) Dibuixeu la gràfica.
b) Estudieu la continuïtat.
c) Determineu els extrems relatius.

Puntuació: a) 1 punt; b) 0.5 punt; c) 0.5 punts. Total 2 punts.

Solució: a) La gràfica de la funció és la recta de pendent 2 i ordenada a l'origen 2 per $x\le 0$, i per $x>0$ la paràbola $y=x^2$ traslladada de tal manera que talla l'eix x per $x=1$ i $x=2$, que són les arrels i a l'eix y en el punt (0,2). Així tenim



b) Tenim $f(0^-)=2$ i $f(0^+)=2$. Per tant la funció és contínua en tots els punts.
c) Tenim un màxim relatiu en el punt (0,2), perquè en un entorn de $x=0$ la funció pren valors menors que 2 tret del punt (0,2). El mínim relatiu s'obté igualant la derivada a 0, i resulta ser $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\right)$.

131. PAU 2006 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 5

5. El benefici $B(x)$ (expressat en milers d'euros), que obté una empresa per la venda de x unitats d'un determinat producte ve donat per la funció:

$$B(x) = -x^2 + 300x - 16100 \quad \text{per a} \quad 50 \le x \le 250 .$$

a) Si ha venut 110 unitats, quin benefici ha obtingut?
b) Quantes unitats pot haver venut si el benefici obtingut ha estat de 3900 milers d'euros?
c) Quantes unitats ha de vendre per a que el benefici sigui màxim? Quin és aquest benefici màxim?
d) Quina quantitat d'unitats ha de vendre per no tenir pèrdues?

Puntuació: cada apartat 1 punt. Total 4 punts.

Solució: a) $B(110) = 4800$ milers d'euros. (Es pot calcular per Ruffini o bé substituint x per 100).
b) Si $B(x) = 3900$ resulta l'equació: $3900 = -x^2 + 300x - 16100$ o de forma equivalent $x^2 - 300x + 20000 = 0$, d'on resulten $x_1 = 200$ i $x_2 = 100$. Per tant pot haver venut 100 o 200 unitats de producte.
c) Per obtenir el benefici màxim hem d'igualar a 0 la derivada de $B(x)$ que representa una paràbola amb un vèrtex amb màxim. Tenim $B'(x) = -2x + 300$. Per tant el màxim s'obté per $x_M = 150$, valor pel qual el benefici és $B(150) = 6400$ milers d'euros.
d) Per no tenir pèrdues cal que $B(x) = -x^2 + 300x - 16100 \ge 0$. Resolent la igualtat obtenim els extrems del segment on $B(x) \ge 0$. Aquests són:

$$x = 150 \pm \sqrt{22500 - 16100} = \begin{cases} 230 \\ 70 \end{cases} .$$

Per tant no tindrà pèrdues per $70 \le x \le 230$.

Nota pel corrector: La no especificació correcta de les unitats es penalitzarà amb 0.5 punts.

132. PAU 2005 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 3

3. La corba d'equació $y = 3x^2 - 1$ i la recta $y = 4x + b$ són tangents.

a) Determineu el punt de tangència.
b) Determineu b.

Puntuació: Apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. Total 2 punts.

Solució: a) La recta té pendent 4, i per tant la funció derivada $y' = 6x$ ha de valer 4 en el punt de tangència. Resulta doncs $\boxed{x = \frac{2}{3}}$. El valor de la y el podem determinar substituint a la corba: $y = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = \frac{1}{3}$. Per tant el punt és $\boxed{P = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)}$.

b) Per determinar b només cal fer que la recta tangent passi per P. Per tant $4\cdot\frac{2}{3}+b=\frac{1}{3}$, i finalment $\boxed{b=-\frac{7}{3}}$.

133. PAU 2005 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3

3. Calculeu a i b de manera que $f(x)=a\ln(x)+bx^2+x$ tingui extrems relatius en els punts d'abscisses $x=1$ i $x=2$, i esbrineu, en cada cas, si es tracta d'un màxim o d'un mínim.

Puntuació: Càlcul de a i b 1 punt; determinació del caràcter 1 punt. Total 2 punts.

Solució: Si ha de tenir extrems en $x=1$ i $x=2$, la funció derivada $f'(x)=\frac{a}{x}+2bx+1$ ha de ser nul·la en aquests punts. Per tant:

$$\left.\begin{array}{rcl} 0 & = & f'(1) = a+2b+1 \\ 0 & = & f'(2) = \frac{a}{2}+4b+1 \end{array}\right\}$$

d'on resulta: $\boxed{a=-\frac{2}{3}}$, $\boxed{b=-\frac{1}{6}}$. D'aquí obtenim

$$f'(x)=-\frac{2}{3x}-\frac{x}{3}+1 \quad \text{i} \quad f''(x)=\frac{2}{3x^2}-\frac{1}{3}.$$

Per tant $f''(1)=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}>0$, i en $x=1$ $f(x)$ té un mínim. Anàlogament: $f''(2)=\frac{2}{12}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{6}<0$, i en $x=2$ $f(x)$ té un màxim.

134. PAU 2005 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 5

5. Considereu la funció $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la corba que representa $f(x)$ en el punt d'abscissa $x=2$.
b) Quina és la funció que dóna el pendent de la recta tangent en cadascun dels punts de la corba?
c) Calculeu el punt de la corba que representa $f(x)$ en el qual el pendent de la recta tangent és màxim. Trobeu el valor d'aquest pendent màxim.

Puntuació: Apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt; apartat c) 2 punts. Total: 4 punts.

Solució: a) El valor de la funció en $x=2$ és $f(2)=\dfrac{1}{5}$. La funció derivada és $f'(x)=-\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$. Per tant, $f'(2)=-\dfrac{4}{25}$. Així, la recta tangent té per equació:

$\boxed{y-\dfrac{1}{5}=-\dfrac{4}{25}(x-2)}$ o bé $\boxed{4x+25y-13=0}$.

b) Es tracta de la funció derivada ja calculada $f'(x)=-\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$.

c) Per trobar en quin punt el pendent és màxim hem de calcular la derivada de $f'(x)$ i igualar-la a 0.

$f''(x)=\dfrac{-2(1+x^2)+8x^2}{\left(1+x^2\right)^3}=\dfrac{6x^2-2}{\left(1+x^2\right)^3}$. El signe de $f''(x)$ coincideix amb el del seu numerador $6x^2-2=2\left(3x^2-1\right)$, que passa (per x creixent) de positiu a negatiu en $x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ i de negatiu a positiu en $\boxed{x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$. Per tant, el màxim s'obté per $\boxed{x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$. El punt màxim és $\boxed{\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{3}{4}\right)}$, i el valor del pendent màxim és $\boxed{f'\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}}$.

135. PAU 2005 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 3

3. a) Calculeu els punts del gràfic de la corba $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ on la recta tangent té pendent $-\frac{1}{3}$. b) Determineu la recta tangent en aquests punts.

Puntuació: Apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. Total 2 punts.

Solució: a) Determinem la funció derivada: $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$. Els punts on aquesta val $-\frac{1}{3}$ correspondran als valors de x que siguin solució de $3x^2 - 4x + 1 = -\frac{1}{3}$, que és el punt (doble): $x = \frac{2}{3}$. L'únic punt de la corba és doncs: $\left(\frac{2}{3}, \frac{29}{27}\right)$.

b) La recta tangent en aquest punt serà: $\boxed{y - \frac{29}{27} = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{2}{3}\right)}$ o de forma equivalent $\boxed{9x + 27y - 35 = 0}$.

136. PAU 2005 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 4

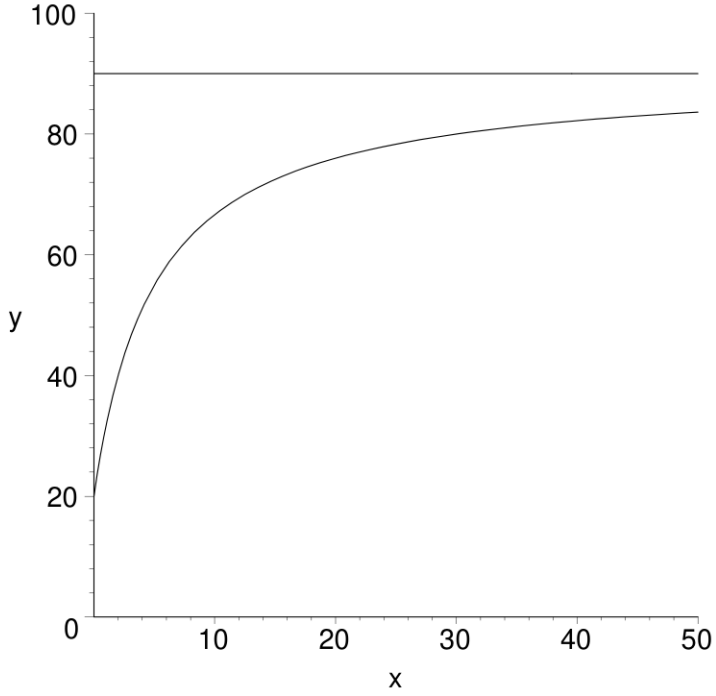
4. La funció $f(x)=\dfrac{90x+100}{x+5}$ indica el nombre de minuts que s'aconsella de caminar diàriament en funció del nombre x de setmanes que han passat des que es va començar un programa de manteniment.

a) Segons aquest programa de manteniment, a partir de quina setmana s'ha de caminar més d'una hora?
b) Feu un gràfic aproximat de la funció i expliqueu el seu creixement. Quant de temps aproximadament hauria de dedicar diàriament a caminar una persona que porta molt de temps seguint el programa?

Puntuació: Apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. Total 2 punts.

Solució: a) Hem de resoldre $\dfrac{90x+100}{x+5}>60$. Aïllant resulta $x>\dfrac{20}{3}$ i la seva part entera per excés és 7 setmanes.

b) El gràfic de la funció presenta una asímptota horitzontal per $y=\lim_{x\to\infty} f(x)=90$ i per $x=0$ pren el valor 20. La derivada és $f'(x)=\dfrac{90(x+5)-(90x-100)}{(x+5)^2}=\dfrac{550}{(x+5)^2}\geq 0$ i $f(x)$ és sempre creixent. Per tant la seva gràfica té la forma següent:



quan passin moltes setmanes haurà de caminar 90 minuts que és el valor asimptòtic.

137. PAU 2004 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 5

PROBLEMES

5. Sigui la funció $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

a) Trobeu les equacions de les asímptotes de $f(x)$.
b) Estudieu el signe de la funció.
c) Estudieu el creixement i decreixement de la funció i indiqueu quins són els seus màxims i mínims.
d) Feu un esbós de la gràfica de $f(x)$.

Puntuació: cada apartat 1 punt. Total: 4 punts.

Solució: a) Les asímptotes verticals corresponen als zeros del denominador i per tant són $\boxed{x=\pm 1}$. Les asímptotes horitzontals s'obtenen prenent el límit quan x tendeix a $\pm\infty$. Per tant és: $y=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=1$, o sigui $\boxed{y=1}$.

b) El signe de la funció depèn del signe del denominador, ja que el numerador sempre és positiu. Per tant, tenim el quadre següent de signes de la funció:

	$x<-1$	$-1<x<1$	$x>1$
Signe de $f(x)$	+	-	+

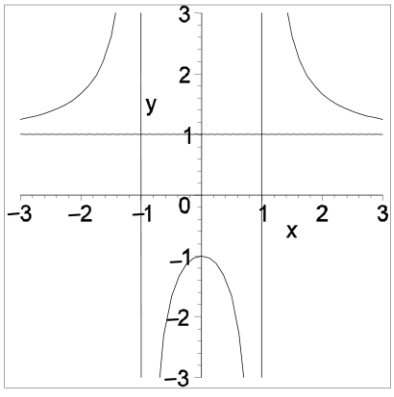
c) Pel que fa al creixement i decreixement, la derivada és

$$f'(x)=\frac{2x(x^2-1)-2x(x^2+1)}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{-4x}{\left(x^2-1\right)^2}$$

i el seu signe és el signe del numerador, ja que el denominador és sempre positiu en el domini. Per tant tenim el següent quadre de creixement i decreixement de la funció:

	$x<0$	$x=0$	$x>0$
Signe de $f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	màxim	↘

d) Per tant el gràfic de la funció té la forma següent:



138. PAU 2004 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 6

6. Una empresa de lloguer de cotxes ens ofereix la possibilitat d'escollir entre dues tarifes:

A: 20 € per dia més 0,2 € per quilòmetre recorregut.
B: 40 € per dia.

a) Per a cadascuna de les dues tarifes, expresseu el cost del lloguer en funció del nombre t de dies de durada del viatge i del quilometratge x.
b) Si s'han de fer 1000 km en 8 dies, a quina tarifa convé acollir-se? I si el viatge de 1000 km ha de durar 12 dies?
c) Si hem de fer 1000 km, per a quina durada del viatge el cost és el mateix amb les dues tarifes? Expliqueu quina tarifa ens interessa escollir en funció del nombre de dies que duri el viatge.

Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punts; apartat c) 2 punts. Total: 4 punts.

Solució: a) Les fórmules d'ambdues tarifes són:

$$\begin{cases} p_A(t,x) = 20t + 0,2x \\ p_B(t,x) = 40t \end{cases}$$

b) El preu a pagar per 1000km i per 8 i 12 dies de durada del viatge respectivament, depenent de la tarifa és:

Tarifa \ Dies	8	12
A	$20\cdot 8 + 0,2\cdot 1000 = 360$ €	$20\cdot 12 + 200 = 440$ €
B	$40\cdot 8 = 320$ €	$40\cdot 12 = 480$ €

Per tant, si el viatge ha de durar 8 dies convé agafar la tarifa B i el preu serà de 320 €. Si ha de durar 12 dies convé agafar la tarifa A i el preu serà de 440 €.

c) El cost serà el mateix per ambdues tarifes quan $p_A(t,1000) = p_B(t,1000)$, és a dir, quan $20t + 200 = 40t$. El resultat és $\boxed{t = 10}$ dies. Si $t < 10$ és preferible la tarifa B i si $t > 10$ és preferible la tarifa A.

PAUTES COMPLEMENTÈRIES DE CORRECCIÓ DE MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS. SETEMBRE DE 2004

A fi d'unificar i matisar la puntuació dels exercicis, afegim unes valoracions per cada un dels subapartats de cada qüestió o problema:

1.
0,5 punts per dir que els punts estan al contorn i buscar-los
0,5 per torbar-los correctament
0,5 per calcular els valors de f correctament i obtenir el valor màxim
0,5 per afirmar que el màxim s'obté en tot el segment BC

2.
1,0 punts pel gràfic
0,5 punts per trobar els punts del contorn
0,5 punts per trobar el màxim i el punt on és màxima f

3.
1,0 punts pel plantejament
1,0 punts per la resolució

4.
1,0 punts per torbar que el sistema és compatible indeterminat
1,0 per expressar correctament les solucions (qualsevol versió)

5.
1,0 punt cada apartat

6.
1,0 punts apartat a)
1,0 punts apartat b)
2,0 punts apartat c)

139. PAU 2004 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 5

5. Considereu la funció $f(x)=\frac{x^3}{30}-15x^2+2500$.

a) Calculeu l'equació de la recta tangent en el punt d'abscissa $x=0$.
b) En quin punt de la corba el pendent de la tangent és mínim? Quin és el valor del pendent mínim?

Puntuació: apartat a) 1,5 punts; apartat b) 2,5 punts. Total: 4 punts.

Solució: a) La funció derivada és $f'(x)=\frac{x^2}{10}-30x$. Per $x=0$ és $f'(0)=0$ i $f(0)=2500$. Per tant, la recta tangent serà $\boxed{y=2500}$.
b) Per obtenir el mínim de la derivada determinem la seva derivada i la igualem a 0. Tenim: $f''(x)=\frac{x}{5}-30$. Per tant, s'anul·la per $\boxed{x=150}$. En aquest punt, la derivada val: $\boxed{f'(150)=\frac{150^2}{10}-30\cdot 150=-2250}$, que és el valor mínim del pendent de $f(x)$.

140. PAU 2004 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 3

3. Sigui $f(x)=\begin{cases} e^{x-1} & si \quad x<1, \\ (x+a)^2 & si \quad x\geq 1. \end{cases}$.

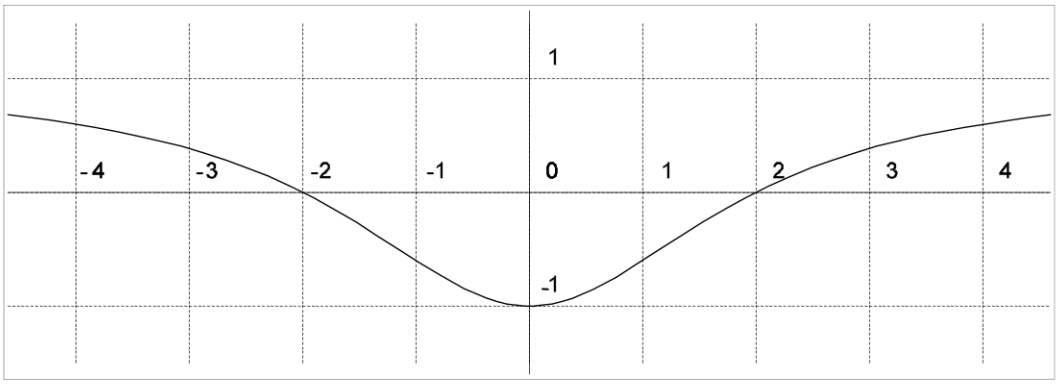
Per a quins valors del paràmetre a la funció és contínua?

Puntuació: Total: 2 punts. Descompteu 0,5 punts si només es dona 1 valor correcte de *a*.

Solució: El possible punt de discontinuïtat és $x=1$, ja que les funcions exponencial i potencial són contínues. El $\lim_{x\to 1^-} f(x)=1$. En canvi, el valor de $f(x)$, així com $\lim_{x\to 1^+} f(x)=(1+a)^2$. Per tant, en el punt $x=1$, la funció serà continua si i només si $(1+a)^2=1$, o sigui, si i només si $\boxed{a=0}$ o $\boxed{a=-2}$.

141. PAU 2004 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 4

4. Observeu la gràfica següent i digueu quin valor tenen (aproximadament)
a) $f(0)$ b) x si $f(x)=0$ c) $f'(0)$ d) $f'(-2)$



Puntuació: cada pregunta 0,5 punts. Donar per bo qualsevol valor de $f'(-2)$ que estigui a l'interval [-0.7, -0.2]. Total: 2 punts.

Solució:
a) $\boxed{f(0)=-1}$, ja que per $\boxed{x=0}$ el valor de la funció és -1.
b) Si $f(x)=0$, observem que la funció talla a l'eix $y=0$ en els punts d'abscisses $\boxed{x=\pm 2}$.
c) La derivada en l'origen val $\boxed{f'(0)=0}$, ja que la funció té un mínim relatiu.
d) $\boxed{f'(-2)=-\frac{1}{2}}$, ja que la recta tangent té aproximadament pendent $\boxed{-\frac{1}{2}}$.

142. PAU 2003 · Setembre · Sèrie única · Exercici 3

3. Esbrineu si les gràfiques de la funció $f(x)=x^2-2x+2$ i de la recta $y=2x-2$ són tangents en algun punt. En cas que ho siguin, determineu aquest punt. Hi ha algun altre punt d'intersecció entre la recta i la gràfica de la funció?

Solució:

Determinem la intersecció de la recta i la paràbola resolent el sistema següent:

$$\left.\begin{array}{r} y=x^2-2x+2 \\ y=2x-2 \end{array}\right\}$$

Igualant els valors de y obtenim l'equació $x^2-4x+4=0$, que té la solució doble $x=2$. Per tant es tracta d'un punt doble de tangència i és la única intersecció entre la recta i la paràbola. El valor de la y és 2. Per tant, el punt de tangència és $\boxed{(2,2)}$.

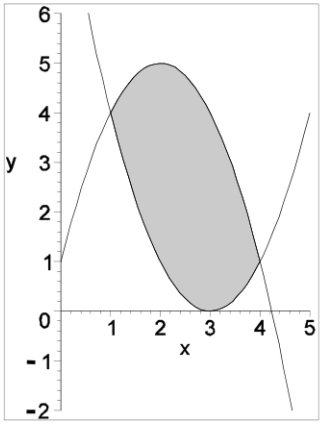
Puntuació: 2 punts.

143. PAU 2003 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 3

3. Determineu l'àrea finita compresa entre les dues paràboles $y=-x^2+4x+1$ i $y=x^2-6x+9$

Solució:

Fem la gràfica de les dues paràboles.



Determinem les interseccions. Igualant les ordenades: $-x^2+4x+1=x^2-6x+9$. Per tant $x^2-5x+4=0$, que dóna com a solucions $x=1$ i $x=4$. Per tant s'ha de calcular la integral de la diferència de les dues paràboles entre 1 i 4:

$$S=\int_1^4\left(-x^2+4x+1\right)-\left(x^2-6x+9\right)dx=\int_1^4\left(-2x^2+10x-8\right)dx=$$

$$\left[-\frac{2x^3}{3}+5x^2-8x\right]_1^4=-\frac{128}{3}+80-32-\left(-\frac{2}{3}+5-8\right)=9$$

Puntuació: 2 punts.

144. PAU 2003 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 5

5. Com a resultat del test efectuat amb un nou model d'automòbil per determinar-ne el consum de benzina, s'ha observat que, per a unes velocitats compreses entre 25 i 175 km/h, el consum $C(x)$ de gasolina, expressat en litres consumits en 100 km, fets a la velocitat constant de x km/h, es pot aproximar per la funció

$$C(x) = 7{,}5 - 0{,}05x + 0{,}00025x^2 .$$

a) Determineu el consum a les velocitats de 50 km/h i de 150 km/h.
b) A quina velocitat s'obté el mínim consum? Quin és aquest consum mínim?
c) Feu un estudi del creixement i decreixement de la funció $C(x)$ a l'interval $[25,175]$. Determineu les velocitats que corresponen a consum màxim, així com aquest consum.

Solució:

a) $\begin{cases} C(50) = 7{,}5 - 0{,}05 \cdot 50 + 0{,}00025 \cdot 50^2 = 5{,}625 \\ C(150) = 7{,}5 - 0{,}05 \cdot 150 + 0{,}00025 \cdot 150^2 = 5{,}625 \end{cases}$ litres en 100 km.

b) La gràfica de $C(x)$ és una paràbola que té un mínim absolut. Per determinar-lo igualem la derivada $C'(x) = -0{,}05 + 0{,}0005x$ a 0 i obtenim $\boxed{x = 100 \text{ km/h}}$. Per aquesta velocitat el consum és $\boxed{C(100) = 5 \text{ litres en 100 km}}$, que serà el consum mínim.

c) La funció derivada $C'(x)$ s'anul·la per $x = 100$, on té el mínim. Per valors de x inferiors, esdevé negativa, ja que el coeficient de la x és positiu i per tant, al disminuir la x a partir del valor que anul·la la derivada, aquesta esdevindrà negativa. A l'inrevés passa quan x s'incrementa a partir d'aquest valor. Per tant la funció és decreixent en l'interval $(-\infty,100)$ i creixent en l'interval $(100,+\infty)$, i assoleix el mínim absolut i relatiu en el punt $(100,5)$. El màxim absolut en l'interval $[25,175]$ s'assolirà en un dels dos extrems de l'interval (o en tots dos).
Obtenim els valors $\boxed{C(25) = C(175) = 6{,}41 \text{ litres en 100 km}}$, que és el consum màxim que s'assolirà per les dues velocitats de 25 i 175 km/h.

Puntuació: Apartat a) 0.5 punts, apartat b) 2 punts, apartat c) 1.5 punts. Total: 4 punts.

145. PAU 2003 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 2

7. La funció $f(x) = -5ax^2 + 700x + 1440$ té un extrem relatiu per $x = 10$. Calculeu el valor de a.

Puntuació: 2 punts.

Solució:

La derivada és $f'(x) = -10ax + 700$. Per $x = 10$ s'anul·la. Per tant resulta $f'(10) = -100a + 700 = 0$, d'on obtenim $\boxed{a = 7}$.

146. PAU 2002 · Setembre · Sèrie única · Exercici 1

Qüestions

1. Considereu la corba d'equació $f(x) = x^3 - x$.

a) Calculeu els punts en què la gràfica de $f(x)$ talla l'eix d'abscisses i expliqueu raonadament on $f(x)$ és positiva i on és negativa.

b) Trobeu l'àrea del recinte limitat per la part positiva de la gràfica de $f(x)$ i el semieix negatiu d'abscisses.

Puntuació: Cada apartat val 1 punt. Total: 2 punts.

Solució:

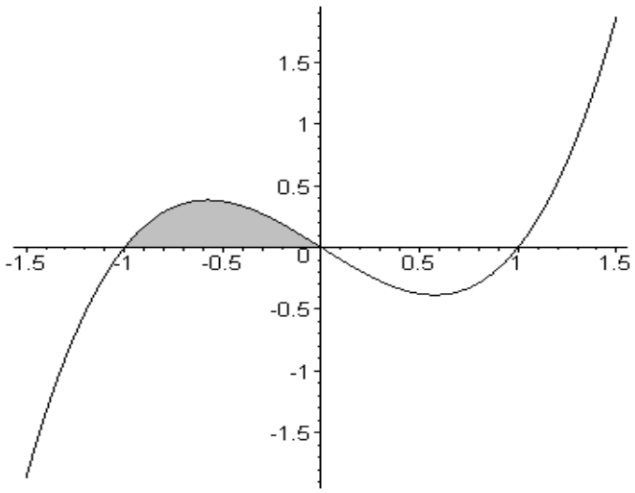
a) Factoritzem $f(x)$:

$$f(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1).$$

Per tant té tres zeros reals que són $x = -1$, $x = 0$, i $x = 1$. En cada un dels intervals compresos entre els zeros la funció té signe constant, que podem determinar mirant el signe de cada factor. El resultat és:

x	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
y	$y < 0$	$y = 0$	$y > 0$	$y = 0$	$y < 0$	$y = 0$	$y > 0$

Fem un esbós de la gràfica de la corba i l'àrea a determinar:



b) Calculem l'àrea demanada:

$$\int_{-1}^{0} \left(x^3 - x\right) \cdot dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{4}$$

147. PAU 2002 · Setembre · Sèrie única · Exercici 5

Problemes

5. Considereu la funció $f(x)=2002x^2+ax+b+\sin x$, amb a,b reals. Calculeu els valors dels paràmetres a,b per tal que f passi pel punt $(0,3)$ i tingui un extrem relatiu en aquest punt. Expliqueu raonadament quin tipus d'extrem té f en aquest punt.

Puntuació: Plantejament: 1 punt. Determinació de *a* i *b* : 2 punts. Determinació del tipus d'extrem: 1 punt. Total: 4 punts.

Solució: Si volem que la funció passi pel punt $(0,3)$, hem d'imposar $f(0)=3$, d'on resulta $\boxed{b=3}$. Si, a més, ha de tenir un extrem relatiu en $x=0$, cal que la seva derivada s'anul·li en $x=0$. La funció derivada és:

$$f'(x)=4004x+a+\cos x,$$

que s'ha d'anul·lar per $x=0$. Resulta doncs: $a+1=0.$ O sigui: $\boxed{a=-1}$

Per saber quin tipus d'extrem és, el més senzill és calcular la derivada segona i estudiar el seu signe:

$$f''(x)=4004-\sin x$$

que en el punt $x=0$ val $4004>0$. Per tant, es tracta d'un $\boxed{\text{mínim}}$.

148. PAU 2002 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 1

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

149. PAU 2002 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 2

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

150. PAU 2002 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 1

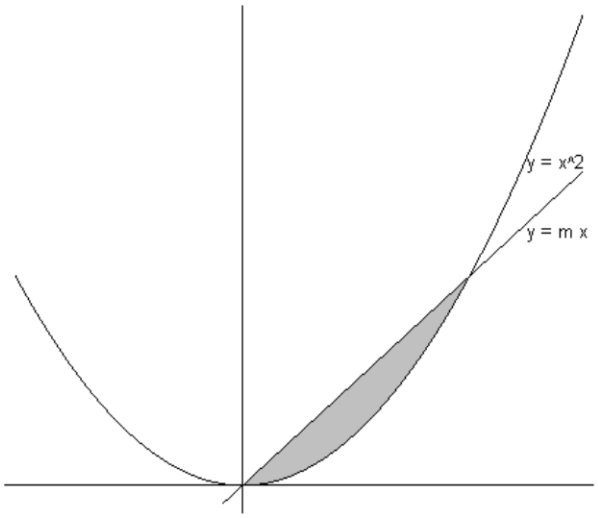
1. Considereu la paràbola $y = x^2$ i la recta $y = mx$, amb m real positiu.

a) Calculeu l'àrea de la regió tancada delimitada per les gràfiques de la paràbola i la recta en funció de m.

b) Quin valor té m si l'àrea de l'apartat a) és 288?

Puntuació: Cada apartat: 1 punt. Total: 2 punts.

Solució: Fem la gràfica:



a) La intersecció de la recta i la paràbola és

$$\left.\begin{matrix} y = mx \\ y = x^2 \end{matrix}\right\} \quad \text{d'on} \quad mx = x^2 \quad \text{i} \quad x(x-m) = 0\,.$$

Les dues interseccions són en els punts $(0,0)$ i (m, m^2). Per tant, l'àrea és:

$$S = \int_0^m \left(mx - x^2\right)dx = \left[\frac{mx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^m = \frac{m^3}{6}$$

b) Si ha de ser $S = 288$, resulta $m^3 = 2^6 \cdot 3^3$ i $\boxed{m = 12}$.

151. PAU 2001 · Setembre · Sèrie única · Exercici 2 (Qüestions)

2. Perquè la funció tingui un extrem relatiu, cal que la derivada $f'(x)=2ax+b$ sigui nul.la per $x=2$. A més, la funció ha de passar pel punt $(2,1)$. Imposant les dues condicions resulta el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} 4a+b & = & 0 \\ 4a+2b & = & 8 \end{array}\right\}$$

que té per solució a $\boxed{a=-2,\quad b=8}$. La derivada segona és

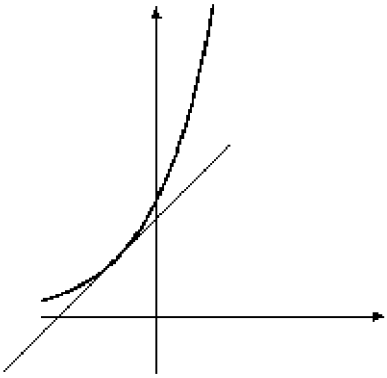
$$f''(x)=2a=-4<0,$$

i, per tant, es tracta d'un màxim. [2 punts]

Nota pels correctors: S'acceptarà igualment un raonament qualitatiu per la discusió de si és màxim o mínim.

152. PAU 2001 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 2 (Qüestions)

2. Esboç gràfic:



La derivada de la funció és: $f'(x)=2e^{2x}$. Perquè l'angle de la tangent amb l'eix d'abscisses sigui de 45°, la derivada ha de ser igual a 1 ($\tan 45^\circ=1$). Per tant, $2e^{2x}=1$ que dóna $x=-\frac{1}{2}\ln 2$. El valor de y corresponent és:

$$f(x)=e^{2x}=e^{-\ln 2}=\frac{1}{2}$$

El punt demanat és: $\boxed{P=\left(-\frac{\ln 2}{2},\frac{1}{2}\right)\approx(-0,3465736;0,5)}$

Nota pels correctors: S'acceptaran com a vàlides tant la resposta exacta com l'aproximada. [2 punts]

153. PAU 2001 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 1 (Problemes)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

154. PAU 2001 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 2 (Qüestions)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

155. PAU 2000 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 2 (Problemes)

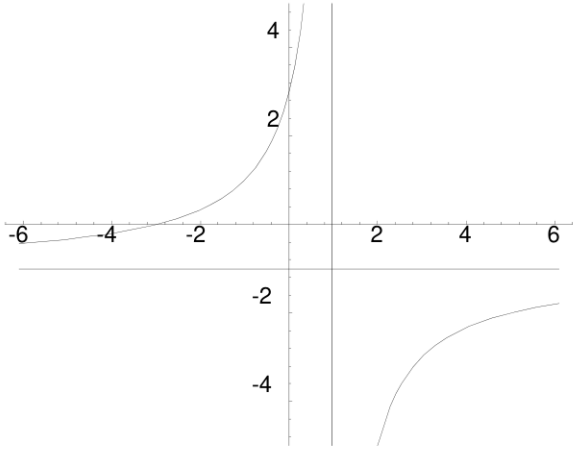
Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

156. PAU 2000 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 4 (Qüestions)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

157. PAU 2000 · Setembre · Sèrie 6 · Exercici 1 (Problemes)

1. a) Les asímptotes són $x = 1$ (el denominador s'anul·la i el numerador no) i $y = -1$ ($f(x)$ és el quocient de dos expressions polinòmiques del mateix grau).
   Es compleix
   $$f'(x) = \frac{4}{(1-x)^2}$$
   que és positiva per a tot valor de x (diferent de 1). Per tant la funció f sempre és creixent.
   Aquestes dades donen una gràfica de la forma



   b) S'han de determinar els punts $(x, f(x))$ on $f'(x) = \frac{4}{(1-x)^2} = 1$. Els valors de x on passa això són $x = -1$, amb $f(x) = 1$, i $x = 3$, amb $f(x) = -3$.

El primer apartat porta una mica més de feina que el segon, compteu dos punts i mig per aquest apartat i un punt i mig pel segon. Tingueu en compte que en el segon apartat s'han de donar dues solucions.

158. PAU 2000 · Setembre · Sèrie 6 · Exercici 3 (Qüestions)

3. Les funcions primitives de $f(x) = e^{-x/2}$ són de la forma $F(x) = -2e^{-x/2} + K$, on K és una constant. Si $F(0) = 3$ s'ha de complir
   $$3 = -2 + K \Leftrightarrow \boxed{\boxed{K = 5}}$$
   Per tant la funció que es busca és $F(x) = -2e^{-x/2} + 5$.
   Compteu un punt per la determinació de la integral indefinida i l'altre pel càlcul de la constant K.

159. PAU 2000 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2 (Problemes)

2. Quan $t = 0$, $N = 100$, per tant de $N = Ae^{Bt}$ deduïm $A = 100$.

   Quan $t = 4$, $N = 25000$, per tant de $N = 100e^{Bt}$ deduïm $B = \frac{1}{4}\log 250 = 1,38037$.

   Finalment hem de resoldre

   $$200000 = 100(e^{\log 250})^{t/4} = 100 \times 250^{t/4}$$

   Així

   $$t = \frac{4\log 2000}{\log 250} = 5,50$$

   És a dir, aproximadament 5 anys i mig. Per tant, d'aquí 1 any i mig hi haurà 200000 exemplars.

   Compteu 1 punt pel càlcul de A, 1 punt pel càlcul de B, i 2 punts per la resta.

160. PAU 2000 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 4 (Qüestions)

4.

$$\int_0^3 (x^2 + a)dx = \left[\frac{x^3}{3} + ax\right]_0^3 = 9 + 3a = 27$$

per tant $a = 6$.

Compteu 1 punt pel correcte plantejament i 1 punt pel resultat final.

161. PAU 2000 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 1 (Qüestions)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

162. PAU 2000 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 2 (Qüestions)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.