Física

Camp gravitatori, planetes i satèl·lits

Solucions · 72 exercicis

Proves d'accés a la universitat (PAU) de Catalunya. Ordenats del més recent al més antic.
Retalls dels exàmens i pautes oficials (selecat.cat / universitats.gencat.cat).

1. PAU 2026 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 1

EXERCICI 1

a)

0,5 p Segons la llei de la gravitació universal, el mòdul de la força sobre el satèl·lit per l'atracció de la Terra és:

$$F = G\,\frac{m_s M_T}{r^2}$$

La segona llei de Newton estableix que: $\vec{F} = m_s\vec{a}$

D'altra banda, considerant que el satèl·lit descriu un moviment circular uniforme al voltant de la Terra, la seva acceleració és l'acceleració centrípeta: $a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$.

Com que sobre el satèl·lit només actua la força de la gravetat:

$$G\,\frac{m_s M_T}{r^2} = \frac{m_s v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{G\,\frac{M_T}{r}}$$

0,25 p El radi $r = R_T + h = (6370 + 550)\,\text{km} = 6{,}92 \times 10^6\,\text{m}$.

Utilitzant l'expressió, obtenim el valor de la velocitat orbital per al satèl·lit:

$$v = \sqrt{G\,\frac{M_T}{r}} = \sqrt{6{,}67 \times 10^{-11}\,\frac{5{,}98\cdot 10^{24}}{6{,}92\cdot 10^6}} = 7{,}59 \times 10^3\ \text{m/s}$$

0,5 p El nombre de voltes al voltant de la Terra que fa el satèl·lit durant un dia. Hem de comparar els dos temps.

El període del satèl·lit: $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi\, 6{,}92\cdot 10^6}{7{,}59\cdot 10^3} = 5{,}73 \times 10^3\ \text{s}$

I un dia amb segons: $t_{dia} = 24\ \text{h}\,\frac{3600\ \text{s}}{1\text{h}} = 8{,}64 \times 10^4\ \text{s}$

I el nombre de voltes : $n_{\frac{voltes}{dia}} = \frac{t_{dia}}{T} = \frac{86{,}4\times 10^3}{5{,}73\times 10^3} = 15{,}1\ \text{voltes}$

b)

0,75 p L'energia mecànica és la suma de l'energia cinètica i potencial:

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m_s v^2 - G\,\frac{m_s M_T}{r} = \frac{1}{2}m_s G\,\frac{M_T}{r} - G\,\frac{m_s M_T}{r} = -\frac{1}{2}G\,\frac{m_s M_T}{r}$$

0,25 p Calculem l'energia mecànica a l'òrbita de 530 km d'alçada:

radi $r = 6{,}37 \times 10^6 + 5{,}3 \cdot 10^5 = 6{,}90 \times 10^6\ \text{m}$

I utilitzant l'expressió, obtenim el valor de l'energia mecànica per al satèl·lit:

$$E_m = -\frac{1}{2}G\,\frac{m_s M_T}{r} = -\frac{1}{2}6{,}67 \times 10^{-11}\,\frac{227 \times 5{,}98 \times 10^{24}}{6{,}90 \times 10^6} = -6{,}56 \times 10^9\ \text{J}$$

0,25 p El signe negatiu de l'energia mecànica indica que el satèl·lit està seguint una òrbita tancada (o lligada) al voltant de la Terra.

2. PAU 2026 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1 (Opció A)

EXERCICI 1, opció 1

Trobar l'expressió del període orbital

0,75 p Segons la llei de la gravitació universal, el mòdul de la força sobre el satèl·lit a causa de l'atracció de la Terra és:

$$F = G\,\frac{m_s M_T}{r^2}$$

La segona llei de Newton estableix que: $\vec{F} = m_s\vec{a}$

D'altra banda, considerant que el nanosatèl·lit descriu un moviment circular uniforme al voltant de la Terra, la seva acceleració és l'acceleració centrípeta: $a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$.

Com que sobre el nanosatèl·lit només actua la força de la gravetat:

$$G\,\frac{m_s M_T}{r^2} = m_s v^2/r \Rightarrow v^2 = G\,\frac{M_T}{r}$$

El període orbital està relacionat amb la velocitat mitjançant:

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

Substituint l'expressió de la velocitat obtenim:

$$T = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM_T}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_T}}$$

0,5 p El radi $r = R_T + h = (6370 + 500)\ \text{km} = 6{,}87\cdot 10^6\ \text{m}$.

Utilitzant l'expressió obtenim el valor del període orbital per al nanosatèl·lit:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(6{,}87\times10^6)^3}{(6{,}67\times10^{-11})(5{,}98\times10^{24})}} = 5{,}66\cdot10^3\ \text{s}$$

b)

0,5 p L'energia potencial gravitatòria d'un cos de massa m a una distància r del centre de la Terra és:

$$U(r) = -G\,\frac{m_s M_T}{r}$$

L'increment d'energia potencial en passar de la superfície terrestre a l'òrbita és:

$$\Delta U = U(r) - U(R_T) = -Gm_s M_T\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_T}\right)$$

Radi: $r = 6{,}37\cdot10^6 + 5{,}0\cdot10^5 = 6{,}87\cdot10^6\ \text{m}$

$$\Delta U = U(r) - U(R_T) = -6{,}67\times10^{-11}\cdot 11{,}1\cdot 5{,}98\times10^{24}\left(\frac{1}{6{,}87\cdot10^6} - \frac{1}{6{,}37\cdot10^6}\right)$$
$$= 5{,}06\times10^7\ \text{J}$$

0,5 p L'energia mecànica és suma de l'energia cinètica i potencial: $E_m = E_c + U$.

La velocitat és: $v = \sqrt{G\,\frac{M_T}{r}} = 7{,}62\times10^3\ \text{m/s}$

L'energia cinètica és: $E_c = \frac{1}{2}m_s v^2 = 3{,}22\times10^8\ \text{J}$

I l'energia potencial és: $U = -G\,\frac{m_s M_T}{r} = -6{,}44\times10^8\ \text{J}$

I l'energia mecànica per al satèl·lit: $E_m = E_c + U = -3{,}22\times10^8\ \text{J}$

Alternativament, es pot calcular directament com: $E_m = -G\,\frac{1}{2}\,\frac{m_s M_T}{r} = -3{,}22\times10^8\ \text{J}$

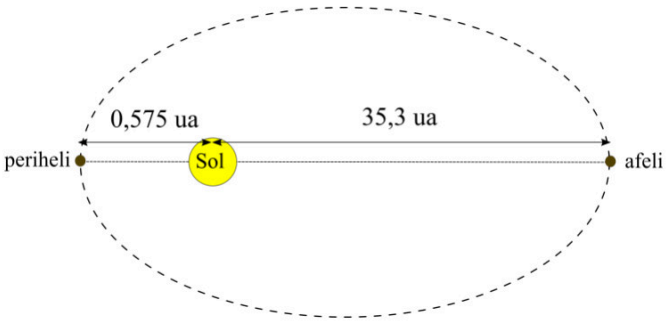
0,25 p El signe negatiu de l'energia mecànica indica que el nanosatèl·lit segueix una òrbita tancada (o lligada) al voltant de la Terra.

3. PAU 2026 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1 (Opció B)

EXERCICI 1, opció 2

a)

0,25 p Cal dibuixar una el·lipse amb el Sol en un dels focus. El periheli i l'afeli estan a l'el·lipse, sobre l'eix major; l'afeli se situa al punt més allunyat i el periheli, al punt més proper:



0,25 p El semieix major a es calcula a partir de les distàncies al periheli i a l'afeli:

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} = \frac{0{,}575 + 35{,}3}{2} = 17{,}94 \text{ ua} = 2{,}69 \times 10^{12} \text{ m}$$

0,5 p La tercera llei de Kepler estableix que el quadrat del període orbital és proporcional al cub del semieix major de la seva òrbita. La constant de proporcionalitat és:

$$\frac{(2\pi)^2}{GM_{\text{Sol}}} = 2{,}97 \times 10^{-19} \text{ s}^2\text{m}^{-3} = 1{,}00 \text{ anys}^2\text{ua}^{-3}$$

Es considerarà correcte tant si l'estudiant calcula la constant com si dona directament el seu valor.

Llavors el període és:

$$T = \sqrt{\frac{(2\pi)^2}{GM_{\text{Sol}}} a^3} = \sqrt{2{,}97 \times 10^{-19} \cdot (2{,}69 \times 10^{12})^3} = 2{,}41 \times 10^9 \text{ s}$$

o

$$T = \sqrt{a^3} = \sqrt{(17{,}94)^3} = 76{,}0 \text{ anys}$$

0,25 p L'Edmon Halley va néixer el 1656, per tant, va poder veure el cometa per primer cop l'any 1682. La següent aparició del cometa Halley va tenir lloc l'any 1758, 16 anys després de la defunció d'Edmond Halley, per tant, només va poder observar el cometa una vegada, l'any 1682.

b)

0,75 p La velocitat serà màxima al punt més proper al Sol, és a dir, al periheli. Aquesta conclusió es pot justificar de dues maneres diferents, qualsevol d'elles és vàlida:

- Segona llei de Kepler. La segona llei de Kepler estableix que un segment rectilini que uneix el planeta i el Sol escombra àrees iguals en temps iguals. Per tant, per escombrar la mateixa àrea quan està al punt més proper, cal que recorri una distància més gran per mantenir l'àrea constant

- Conservació de l'energia mecànica. L'energia mecànica s'expressa com $E_m = \frac{1}{2} m_H v^2 - G\frac{m_H M_{Sol}}{r}$. Com que l'energia mecànica és constant, la velocitat serà màxima quan el terme $G\frac{m_H M_{Sol}}{r}$ sigui màxim, és a dir, quan la distància r sigui mínima.

Per altra banda, és parcialment correcte:

- Conservació del moment angular. El mòdul del moment angular és
$$L = m\, r\, v\, sin\theta$$
on θ és l'angle que formen $\vec{r}$ i $\vec{v}$. Com el moment angular és constant, $v\, sin\theta$ serà màxim quan la distància r sigui mínima. Aquest argument és parcialment correcte atès que al periheli $sin\theta$ és màxim per tant no podem garantir que la velocitat sigui màxima. En aquest cas es valorarà com **0,5 p.**

0,5 p Com al periheli i a l'afeli $\vec{r}$ i $\vec{v}$ són perpendiculars, $\theta = \pi/2$ i $sin\theta = 1$.
Per tant, si imposem la conservació del moment angular entre el periheli i l'afeli tenim:

$$m_H\, r_P\, v_P = m_H\, r_A\, v_A \Rightarrow v_P = v_A\frac{r_A}{r_P} = 896\frac{35{,}3}{0{,}575} = 5{,}5 \times 10^4 \text{ m/s}.$$

Nota per als correctors: no es penalitzarà el fet que l'estudiant utilitzi directament l'expressió $L = m\, r\, v$ sense justificar-la.

Alternativament, es pot plantejar la conservació de l'energia mecànica:

$$\frac{1}{2} m_H v_A^2 - G\frac{m_H M_{Sol}}{r_A} = \frac{1}{2} m_H v_P^2 - G\frac{m_H M_{Sol}}{r_P}$$

Si simplifiquem la massa del cometa tenim:

$$\frac{1}{2} v_A^2 - G\frac{M_{Sol}}{r_A} = \frac{1}{2} v_P^2 - G\frac{M_{Sol}}{r_P}$$

I si aïllem la velocitat al periheli:

$$v_P = \sqrt{v_A^2 + 2GM_{Sol}\left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_A}\right)} = \sqrt{896^2 + \frac{2 \times 6{,}67 \times 10^{-11} \times 1{,}99 \times 10^{30}}{1{,}50 \times 10^{11}}\left(\frac{1}{35{,}3} - \frac{1}{0{,}575}\right)}$$
$$= 5{,}5 \times 10^4 \text{ m/s}$$

4. PAU 2026 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 1 (Opció A)

EXERCICI 1

OPCIÓ A

1.1.

0,75 p Segons la llei de la gravitació universal, el mòdul de la força sobre la Hera degut a l'atracció del Mart és:

$$F = G\,\frac{M_H M_M}{r^2}$$

D'altra banda, la relació entre la força i la intensitat del camp gravitatori és.

$$F = M_H g$$

Per tant la intensitat del camp gravitatori és:

$$g = G\,\frac{M_M}{r^2} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{6{,}42\cdot 10^{23}}{(\,3{,}39\cdot 10^{6} + 5\cdot 10^{6}\,)^2} = 0{,}608\ \mathrm{m/s^2}$$

0,25 p I la força és:

$$F = M_H g = 1130\cdot 0{,}608 = 687\ \mathrm{N}$$

0,25 p La força és atractiva i dirigida al llarg de la línia que uneix els dos objectes:



1.2.

La tercera llei de Kepler estableix:

$$\frac{T^2}{a^3} = constant$$

0,75 p Per tant,

$$\frac{T_H^2}{a_H^3} = \frac{T_T^2}{a_T^3} \Rightarrow a_H = a_T \sqrt[3]{\left(\frac{T_H}{T_T}\right)^2} = 1{,}50\cdot 10^{11}\sqrt[3]{\left(\frac{2\cdot 365 + 274}{365}\right)^2} = 2{,}94\cdot 10^{11}\ \mathrm{m}$$

0,25 p $a_H = \frac{r_{aH}+r_{pH}}{2} \Rightarrow r_{aH} = 2a_H - r_{pH} = 4{,}40\cdot 10^{11}\ \mathrm{m}$

0,25 p El moment angular s'expressa com:

$$\vec{L} = M_H \vec{r} \times \vec{v},$$

on $\vec{r}$ és el vector de posició que apunta del centre del Sol a Hera i $\vec{v}$ és la velocitat d'Hera. El mòdul del moment angular s'expressa com:

$$L = M_H \, r \, v \, sin\theta,$$

on θ és l'angle que formen $\vec{r}$ i $\vec{v}$. Com al periheli i a l'afeli $\vec{r}$ i $\vec{v}$ són perependiculars, $\theta = \pi/2$ i $sin\theta = 1$.

Per tant, si imposem la conservació del moment angular entre el periheli i l'afeli tenim:

$$M_H \, r_{aH} \, v_a = M_H \, r_{pH} \, v_p$$

I si aïllem el quocient de velocitats tenim:

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{r_{aH}}{r_{pH}}$$

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{r_{aH}}{r_{pH}} = \frac{4{,}40 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m}}{1{,}49 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m}} = 2{,}95$$

És a dir, la velocitat al periheli és pràcticament el triple de la velocitat a l'afeli.

5. PAU 2026 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 1 (Opció B)

OPCIÓ B

1.1.

0,65 p Segons la llei de la gravitació universal, el mòdul de la força sobre la sonda degut a l'atracció del Mart és:

$$F = G\,\frac{mM_M}{r^2}$$

I la segona llei de Newton estableix que: $\vec{F} = m\vec{a}$

Considerant que la sonda descriu un moviment circular la seva acceleració centrípeta és: $a = \omega^2 r = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$, on $T = 24\,\text{h} + 37\,\text{min} = 88620\,\text{s}$

I substituint el valor de l'acceleració centrípeta obtenim:

$$G\,\frac{mM_M}{r^2} = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r \Rightarrow r = \sqrt[3]{T^2\frac{GM_M}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{88620^2\,\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot6{,}42\cdot10^{23}}{4\pi^2}} = 2{,}04\cdot10^7\,\text{m}$$

Alternativament, a partir de la 3ª llei de Kepler

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_M} \Rightarrow r = \sqrt[3]{T^2\frac{GM_M}{4\pi^2}} = 2{,}04\cdot10^7\,\text{m}$$

0,1 p I l'alçada sobre la superfície és:

$$h = r - R_M = 2{,}04\cdot10^7 - 3{,}39\cdot10^6 = 1{,}70\cdot10^7\,\text{m}$$

0,5 p D'altra banda, la relació entre la força i la intensitat del camp gravitatori és: $F = mg$

Per tant la intensitat del camp gravitatori és:

$$g = G\,\frac{M_M}{r^2} = 6{,}67\cdot10^{-11}\,\frac{6{,}42\cdot10^{23}}{(2{,}04\cdot10^7)^2} = 0{,}103\,\text{m/s}^2$$

1.2.

0,25 p Les distància al periastre, a l'apoastre i el semieix major es poden calcular directament a partir de les altures:

$$r_a = (320 + 3{,}39 \cdot 10^3) \cdot 10^3 = 3{,}71 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$r_p = (255 + 3{,}39 \cdot 10^3) \cdot 10^3 = 3{,}645 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} = 3{,}68 \cdot 10^6 \text{ m}$$

0, 5 p I la tercera llei de Kepler estableix: $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_M}$

Així: $T = \sqrt{a^3 \frac{4\pi^2}{GM_M}} = \sqrt{(3{,}68 \cdot 10^6)^3 \frac{4\pi^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6{,}42 \cdot 10^{23}}} = 6{,}78 \cdot 10^3 \text{ s}$

0,25 p A partir de la definició de l'energia mecànica tenim:

$$\frac{1}{2} m v_p^2 - G \frac{m M_M}{r_p} = -G \frac{m M_M}{2a} \Rightarrow v_p = \sqrt{G M_M \left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a}\right)} = 3{,}44 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

0,25 p El moment angular s'expressa com:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

on $\vec{r}$ és el vector de posició que apunta del centre de Mart a la sonda i $\vec{v}$ és la seva velocitat. El mòdul del moment angular s'expressa com:

$$L = m\, r\, v\, sin\theta$$

on θ és l'angle que formen $\vec{r}$ i $\vec{v}$. Com al periastre $\vec{r}$ i $\vec{v}$ són perependiculars, $\theta = \pi/2$ i $sin\theta = 1$. Llavors:

$$L = m\, r_p\, v_p = 1187 \cdot 3{,}645 \cdot 10^6 \cdot 3{,}44 \cdot 10^3 = 1{,}49 \cdot 10^{13} \text{ kg m}^2/\text{s}$$

6. PAU 2025 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 1

EXERCICI 1

a)

0,5 p. L'energia potencial gravitatòria s'expressa així:

$$E_P = -G\,\frac{mM_M}{r} \Rightarrow r = -G\,\frac{mM_M}{E_P}$$

I, si substituïm pels tres valors de la taula, tenim:

Punt	Distància respecte del centre de Mercuri [m]	Energia potencial [J]
1	$-6{,}67\cdot10^{-11}\,\dfrac{2700\cdot3{,}285\cdot10^{23}}{-1{,}89\cdot10^{10}} = 3{,}13\cdot10^{6}$	$-1{,}89\cdot10^{10}$
2	$-6{,}67\cdot10^{-11}\,\dfrac{2700\cdot3{,}285\cdot10^{23}}{-1{,}35\cdot10^{10}} = 4{,}38\cdot10^{6}$	$-1{,}35\cdot10^{10}$

0,5 p. Segons la llei de la gravitació universal, el mòdul de la força sobre la *BepiColombo* degut a l'atracció de Mercuri és:

$$F = G\,\frac{mM_M}{r^2}$$

I la relació entre la força i la intensitat del camp gravitatori és:

$$F = mg$$

Per tant, la intensitat del camp gravitatori és:

$$g = G\,\frac{M_M}{r^2} \Rightarrow r = \sqrt{G\frac{M_M}{g}} = \sqrt{6{,}67\cdot10^{-11}\frac{3{,}285\cdot10^{23}}{3{,}23}} = 2{,}60\cdot10^{6}\ \text{m}$$

0,25 p. I l'alçada sobre la superfície és:

$$h = r - R_M = 2{,}60\cdot10^{6} - 2{,}44\cdot10^{6} = 1{,}64\cdot10^{5}\ \text{m} = 164\ \text{km}$$

b)

0,75 p. Les distàncies al punt més proper (periastre) i al més allunyat (apoastre) es poden calcular directament a partir de les altures:

$$r_A = (11.600 + 2{,}44\cdot10^{3})\cdot10^{3} = 1{,}404\cdot10^{7}\ \text{m}$$
$$r_P = (590 + 2{,}44\cdot10^{3})\cdot10^{3} = 3{,}03\cdot10^{6}\ \text{m}$$

El moment angular s'expressa així:

$$\vec{L} = m\vec{r}\times\vec{v}$$

En què $\vec{r}$ és el vector de posició que apunta del centre de Mercuri a *Mio* i $\vec{v}$ és la velocitat de *Mio*. El mòdul del moment angular s'expressa així:

$$L = m\,r\,v\,sin\theta$$

En què θ és l'angle que formen $\vec{r}$ i $\vec{v}$. Com al periastre i a l'apoastre, $\vec{r}$ i $\vec{v}$ són perependiculars: $\theta = \pi/2$ i $sin\theta = 1$.

Per tant, si imposem la conservació del moment angular entre el periastre i l'apoastre, tenim:

$$m\,r_P\,v_P = m\,r_A\,v_A \Rightarrow v_P = v_A\frac{r_A}{r_P} = 2{,}64\cdot10^{3}\,\frac{1{,}404\cdot10^{7}}{3{,}03\cdot10^{6}} = 1{,}22\cdot10^{4}\ \text{m/s}.$$

0,5 p. El mòdul de l'acceleració normal és: $a = \frac{v^2}{r}$

En una òrbita el·líptica, com que el mòdul de la velocitat canvia en els diferents punts de l'òrbita, i també varia la distància entre l'òrbita i el planeta, també canviarà el valor de l'acceleració normal.

A partir del principi de conservació del moment angular, hem vist que la velocitat del satèl·lit serà màxima en el punt més proper al planeta (punt *P*). Aquest punt també correspon a la distància mínima entre el satèl·lit i el planeta. Com que l'acceleració normal és $a = \frac{v^2}{r}$, al punt *P*, v és màxima i r és mínima; llavors l'acceleració normal prendrà el seu valor màxim.

7. PAU 2025 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

EXERCICI 1

a)

Trobar l'expressió de la velocitat orbital

0,5 p. Segons la llei de la gravitació universal, el mòdul de la força sobre la caixa degut a l'atracció de la Terra és:

$$F = G\,\frac{M_{ca}M_T}{r^2}$$

La segona llei de Newton estableix que: $\vec{F} = M_{ca}\vec{a}$

D'altra banda, considerant que el satèl·lit descriu un moviment circular uniforme al voltant de la Terra, la seva acceleració és l'acceleració centrípeta: $a = v^2/r$.

Com que sobre la caixa sols actua la força de la gravetat:

$$G\,\frac{M_{ca}M_T}{r^2} = M_{ca}v^2/r \Rightarrow v = \sqrt{G\,\frac{M_T}{r}}$$

0,25 p. El radi $r = 6{,}37\cdot10^6 + 4\cdot10^5 = 6{,}77\cdot10^6$ m. Utilitzant l'expressió, obtenim el valor de la velocitat orbital de la caixa:

$$v_{ca} = \sqrt{G\,\frac{M_T}{\mathrm{r}}} = \sqrt{6{,}67\cdot10^{-11}\,\frac{5{,}98\cdot10^{24}}{6{,}77\cdot10^6}} = 7{,}68\cdot10^3\ \mathrm{m/s}$$

0,5 p El nombre de voltes al voltant de la Terra que fa la caixa durant un dia. Hem de comparar els dos temps.

El període de la caixa: $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi\ 6{,}77\cdot10^6}{7{,}68\cdot10^3} = 5{,}54\cdot10^3$ s.

I un dia amb segons: $t_{dia} = 24\ \mathrm{h}\frac{3600\ \mathrm{s}}{1\mathrm{h}} = 86{,}4\cdot10^3\ s$.

I el nombre de voltes : $n_{voltes/dia} = \frac{t_{dia}}{T} = \frac{86{,}4\cdot10^3}{5{,}54\cdot10^3} = 15{,}6$ voltes.

b)

0,5 p. Calculem l'energia mecànica inicial a l'òrbita de 280 km d'altura: radi $r = 6{,}37\cdot10^6 + 2{,}8\cdot10^5 = 6{,}65\cdot10^6$ m.

L'energia mecànica és la suma de l'energia cinètica i potencial:

$$E_{m\,ini} = E_c + E_p = \frac{1}{2}M_{EEI}v^2 - G\,\frac{M_{EEI}M_T}{r} = \frac{1}{2}M_{EEI}G\,\frac{M_T}{r} - G\,\frac{M_{EEI}M_T}{r} = -G\frac{M_{EEI}M_T}{2r}$$

$$E_{m\,ini} = -G\frac{M_{EEI}M_T}{2r} = -6{,}67\cdot10^{-11}\,\frac{4{,}3\cdot10^5\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{2\cdot\ 6{,}65\cdot10^6} = -1{,}29\cdot10^{13}\ \mathrm{J}$$

0,25 p. El signe negatiu de l'energia mecànica indica que l'EEI està seguint una òrbita tancada (o lligada) al voltant de la Terra.

0,5 p. Sense tenir en compte l'atmosfera, es conservarà l'energia mecànica durant la caiguda, $E_{m\,ini} = E_{m\,fi}$ i l'energia mecànica final és $E_{m\,fi} = E_{c\,fi} + E_{p\,fi}$. Per tant, l'energia cinètica final amb què impactarà a l'aigua serà: $E_{c\,fi} = E_{m\,fi} - E_{p\,fi} = E_{m\,ini} - E_{p\,fi}$.

L'energia potencial final:

$$E_{p\,fi} = -G\,\frac{M_{EEI}M_T}{R_T} = -6{,}67\cdot10^{-11}\,\frac{4{,}3\cdot10^5\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{6{,}37\cdot10^6} = -2{,}69\cdot10^{13}\ \mathrm{J}$$

Per tant, l'energia cinètica final amb què impacta a l'aigua serà:

$$E_{c\,fi} = E_{m\,fi} - E_{p\,fi} = -12{,}896\cdot10^{12} + 26{,}925\cdot10^{12}\ J = 1{,}40\cdot10^{13}\ \mathrm{J}$$

8. PAU 2024 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 1

P1)

a)

Trobar l'expressió de la velocitat orbital

0,15 p Segons la llei de la gravitació universal, el mòdul de la força sobre el 6è planeta a causa de l'atracció de l'estrella HD110067 és: $F = G\,\frac{M_6 M_{HD}}{r^2}$

0,15 p Suposant un moviment circular uniforme al voltant de l'estel, l'acceleració centrípeta del planeta és $a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2\, r$ en què la velocitat angular és $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

0,15 p El període en segons: $T = 54{,}7d\,\frac{24\cdot 3600\ s}{1d} = 4{,}73\cdot 10^6\ s$.

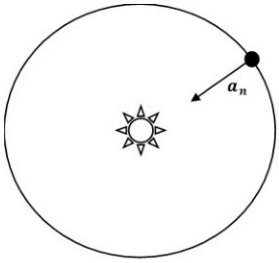
0,30 p Com que sobre el planeta sols actua la força de la gravetat: $G\,\frac{M_6 M_{HD}}{r^2} = M_6\omega^2\, r$

Per tant, trobem $r = \sqrt[3]{\frac{GM_{HD}T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\,1{,}98\cdot 10^{30}(4{,}73\cdot 10^6)^2}{4\pi^2}} = 4{,}214\cdot 10^{10}\ m$

0,25 p La representació de l'acceleració normal.

0,25 p El mòdul de l'acceleració normal:

$$a_n = \omega^2\, r = \frac{4\pi^2}{T^2} r = \frac{4\pi^2}{(4{,}73\cdot 10^6)^2} 4{,}214\cdot 10^{10} = 7{,}44\cdot 10^{-2}\ m/s^2$$



b)

0,5 p Els períodes del 5è i 6è planetes tenen la relació: $3\cdot T_6 = 4\cdot T_5$. Per tant, utilitzant la 3a llei de Kepler, (que també podem deduir de l'anterior relació radi-període): $r_6^3/T_6^2 = r_5^3/T_5^2$, tenim que

$$r_5 = r_6\sqrt[3]{\frac{T_5^2}{T_6^2}} = r_6\sqrt[3]{\frac{9}{16}} = 3{,}48\cdot 10^{10}\ m\ .$$

O, alternativament,

$$T_5 = \frac{3}{4} 4{,}73\cdot 10^6 = 3{,}547\cdot 10^6\ s$$

I calculem el radi: $r_5 = \sqrt[3]{\frac{GM_{HD}T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\,1{,}98\cdot 10^{30}(3{,}547\cdot 10^6)^2}{4\pi^2}} = 3{,}48\cdot 10^{10}\ m$

Càlcul de l'energia mecànica:

0,5 p L'energia mecànica és la suma de l'energia cinètica i potencial:

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}M_5 v^2 - G\,\frac{M_5 M_{HD}}{r} = \frac{1}{2}M_5 G\,\frac{M_{HD}}{\mathrm{r}} - G\,\frac{M_5 M_{HD}}{r} = -\frac{G M_5 M_{HD}}{2r}$$

0,25 p I per al 5è planeta:

$$E_m = -\frac{G M_5 M_{HD}}{2r} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2{,}5 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 1{,}98 \cdot 10^{30}}{2 \cdot 3{,}48 \cdot 10^{10}} = -2{,}84 \cdot 10^{34}\ J$$

Si l'alumne no posa el signe negatiu de l'energia mecànica resta 0,2.

O, alternativament:

calcular la velocitat i trobar l'energia cinètica:

0,15 p $v = \frac{2\pi r}{T_5} = \frac{2\pi \cdot 3{,}48 \cdot 10^{10}}{3{,}547 \cdot 10^{6}} = 6{,}16 \cdot 10^{4}\ m/s,$

0,25 p $E_c = \frac{1}{2}M_5 v^2 = \frac{1}{2}2{,}5 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}(6{,}16 \cdot 10^{4})^2 = 2{,}84 \cdot 10^{34}\ J$

0,25 p Calcular $E_p = -\frac{G M_5 M_{HD}}{r} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2{,}5 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 1{,}98 \cdot 10^{30}}{3{,}48 \cdot 10^{10}} = -5{,}68 \cdot 10^{34}\ J$

0,10 p I calcular $E_m = E_c + E_p = 2{,}84 \cdot 10^{34} - 5{,}68 \cdot 10^{34} = -2{,}84 \cdot 10^{34}\ J$

Si l'alumne no posa el signe negatiu de l'energia mecànica resta 0,2.

9. PAU 2024 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

P1)

***a*)**

Per trobar l'expressió de la velocitat orbital

0,10 p. Segons la llei de la gravitació universal, el mòdul de la força sobre el satèl·lit degut a l'atracció de Mercuri és:

$$F = G\,\frac{M_{MPO}M_M}{r^2}$$

0,10 p. La segona llei de Newton estableix que: $\vec{F} = M_{MPO}\vec{a}$

0,15 p. D'altra banda, considerant que el satèl·lit descriu un moviment circular uniforme al voltant de Mercuri, la seva acceleració és l'acceleració centrípeta: $a = v^2/r$

0,15 p. Com que sobre el satèl·lit sols actua la força de la gravetat:

$$G\,\frac{M_{MPO}M_M}{r^2} = M_{MPO}v^2/r \Rightarrow v = \sqrt{G\,\frac{M_M}{\mathrm{r}}}$$

0,25 p. Utilitzant l'expressió obtenim el valor de la velocitat orbital per la MPO:

$$v_{MPO} = \sqrt{G\,\frac{M_M}{\mathrm{r}}} = \sqrt{6{,}67\times10^{-11}\,\frac{3{,}285\times10^{23}}{3{,}36\times10^{6}}} = 2{,}55\times10^{3}\ \mathrm{m/s}$$

0,25 p. Per saber el nombre de voltes que fa la MPO durant un any terrestre hem de comparar els dos temps.

El període de la MPO: $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi\ 3{,}36\times10^{6}}{2{,}55\times10^{3}} = 8{,}28\times10^{3}\ s$

0,25 p. I un any amb segons: $t_{any} = 365{,}25\ dies\,\frac{24h}{1\ \mathrm{dia}}\,\frac{3600\ s}{1\mathrm{h}} = 3{,}16\ \times10^{7}\ s$

$$n_{voltes/any} = \frac{t_{any}}{T} = \frac{3{,}16\ \times10^{7}}{8{,}28\times10^{3}} = 3816\ voltes$$

b)

0,5 p. L'energia mecànica és la suma de l'energia cinètica i la potencial:

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} M_{MPO} v^2 - G\ \frac{M_{MPO} M_M}{r} = \frac{1}{2} M_{MPO} G\ \frac{M_M}{\mathrm{r}} - G\ \frac{M_{MPO} M_M}{r} = -\frac{G M_{MPO} M_M}{2r}$$

Càlcul de la massa:

0,5 p. Per escapar del camp gravitatori de Mercuri, l'energia mecànica final ha de ser nul·la. Per tant, l'increment d'energia necessari és:

$$\Delta E_m = E_{m\ final} - E_{m\ inicial} = 0 + \frac{G M_{MPO} M_M}{2r}$$

0,25 p. El màxim increment d'energia mecànica possible és l'energia que pot proporcionar el combustible, per tant: $\Delta E_m = 4{,}5\ \times 10^9\ J = \frac{G M_{MPO} M_M}{2r}$

i la massa màxima d'MPO: $M_{MPO} = \frac{\Delta E_m 2r}{G M_M} = 1{,}38\ \times 10^3\ kg$

O alternativament:

0,25 p. El treball fet pels motors amb el combustible és igual a l'increment d'energia mecànica $W_{motors} = \Delta E_m$ i, per tant, $W_{motors} = E_{m\ final} - E_{m\ inicial}$

0,5 p. Per tant, $W_{motors} = 4{,}5\ \times 10^9\ J = 0 + \frac{G M_{MPO} M_M}{2r}$

I la massa màxima d'MPO és $M_{MPO} = \frac{W_{motors}\ 2r}{G M_M} = 1{,}38\ \times 10^3\ kg$

10. PAU 2023 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 1

P1)

a)

Segons la llei de gravitació universal, el mòdul de la força sobre un objecte de massa *m* a la superfície d'un objecte astronòmic esfèric de radi *R* i massa *M* s'expressa com:

$$F = G\,\frac{mM}{R^2}$$

0,2 p

I el mòdul de la força que experimenta un objecte de massa *m* sota l'acció d'un camp gravitatori d'intensitat *g* és

$$F = mg$$

Igualant les dues expressions i dividint als dos costats per *m* obtenim:

$$g = G\,\frac{M}{R^2}$$

0,1 p

El radi de Didymos és $R_D = \frac{781}{2}$ =390,5 m i la seva massa és:

$$M_D = V \cdot \rho = \frac{4}{3}\pi R_D^3 \rho = \frac{4}{3}\pi \cdot 390{,}5^3 \cdot 2146 = 5{,}35 \times 10^{11}\ \text{kg}$$

0,2 p

Per tant obtenim:

$$g = G\,\frac{M_D}{R_D^2} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\frac{5{,}35 \times 10^{11}}{390{,}5^2} = 2{,}34 \times 10^{-4}\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

0,35 p

Segons la llei de gravitació universal, el mòdul de la força és

$$F = G\,\frac{mM_D}{R^2} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\frac{4{,}42 \times 10^{10} \cdot 5{,}35 \times 10^{11}}{1120^2} = 1{,}26 \times 10^{6}\ \text{N}$$

0,4 p

b)

Segons la llei de gravitació universal, el mòdul de la força sobre Dimorphos, massa *m*, degut a la atracció de Didymos és:

$$F = G\,\frac{mM_D}{R^2}$$

0,2 p

I la segona llei de Newton estableix que: $\vec{F} = m\vec{a}$

0,2 p

D'altra banda, considerant que el satèl·lit descriu un moviment circular uniforme al voltant de Didymos, la seva acceleració centrípeta és: $a = \frac{v^2}{R}$

0,2 p

Com sobre Dimorphos només actua la força de la gravetat:

$$G\,\frac{mM_D}{R^2} = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{G\,\frac{M_D}{R}}$$

0,25 p

Podem comprovar que la velocitat és inversament proporcional a l'arrel quadrada del radi de l'òrbita, per tant, si aquest radi disminueix, el seu invers augmenta i, per tant, la velocitat també serà més gran, és a dir, quan el radi orbital disminueix la velocitat orbital augmenta.

També s'hauria pogut justificar a partir de la tercera llei de Kepler:

$$\frac{R^3}{T^2} = G\,\frac{M_D}{4\pi^2}\ i\ T = \frac{2\pi R}{v} \Rightarrow v = \sqrt{G\,\frac{M_D}{R}}$$

0,4 p

11. PAU 2023 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

P1)

0,1 p.

a)

El període en unitats del SI s'expressa així:

$$T = 7\ \text{h}\frac{3600\ \text{s}}{1\ \text{h}} + 39\ \text{min}\frac{60\ \text{s}}{1\ \text{min}} + 14\ \text{s} = 27554\ \text{s}$$

La velocitat angular orbital de Fobos és:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{27554} = 2{,}28 \times 10^{-4}\ \text{rad/s}$$

0,2 p.

Segons la llei de la gravitació universal, el mòdul de la força sobre Fobos degut a l'atracció de Mart és:

$$F = G\ \frac{M_F M_M}{r^2}$$

0,1 p.

I la segona llei de Newton estableix que: $\vec{F} = m\vec{a}$

0,2 p.

D'altra banda, considerant que Fobos descriu un moviment circular uniforme al voltant de Mart, la seva acceleració centrípeta és: $a = \omega^2 r$

0,2 p.

Com que sobre Fobos només actua la força de la gravetat:

$$G\ \frac{M_F M_M}{r^2} = M_F \omega^2 r \Rightarrow M_M = \frac{\omega^2 r^3}{G} = \frac{(2{,}28 \times 10^{-4})^2 (9{,}377 \times 10^6)^3}{6{,}67 \times 10^{-11}} = 6{,}43 \times 10^{23}\ \text{kg}$$

0,2 p.

Segons la llei de gravitació universal, el mòdul de la força sobre un objecte de massa *m* a la superfície de Mart s'expressa així:

$$F = G\ \frac{m M_M}{R_M^2}$$

0,1 p.

I el mòdul de la força que experimenta un objecte de massa *m* sota l'acció d'un camp gravitatori d'intensitat *g* és:

$$F = mg$$

Igualant les dues expressions i dividint els dos costats per *m* obtenim:

$$g = G\,\frac{M_M}{R_M^2}$$

0,15 p.

Per tant, obtenim:

$$g = G\,\frac{M_M}{R_M^2} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\frac{6{,}43 \times 10^{23}}{(3{,}390 \times 10^{6})^2} = 3{,}73\ \mathrm{m/s^2}$$

A l'enunciat no es demana deduir l'expressió anterior; per tant, també es considerarà correcte que l'estudiant introdueixi directament l'expressió $g = G\,\frac{M_M}{R_M^2}$.

b)

0,25 p.

A partir de les relacions de l'apartat anterior tenim:

$$G\,\frac{M_D M_M}{r^2} = M_D \omega^2 r \Rightarrow \omega = \sqrt{G\,\frac{M_M}{r^3}} = \sqrt{6{,}67 \times 10^{-11}\,\frac{6{,}43 \times 10^{23}}{(2{,}346 \times 10^{7})^3}} = 5{,}76 \times 10^{-5}\ \mathrm{rad/s}$$

0,25 p.

I el període de Deimos és:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5{,}76 \times 10^{-5}} = 1{,}09 \times 10^{5}\ \mathrm{s}$$

Alternativament

0,5 p.

A partir de la tercera llei de Kepler:

$$\frac{T_D^2}{r_D^3} = \frac{T_F^2}{r_F^3} \Rightarrow T_D = T_F \sqrt{\frac{r_D^3}{r_F^3}} = 27554 \left(\frac{2{,}346 \times 10^{7}}{9{,}377 \times 10^{6}}\right)^{3/2} = 1{,}09 \times 10^{5}\ \mathrm{s}$$

0,25 p.

La velocitat de Deimos és:

$$v = \omega\, r = 5{,}76 \times 10^{-5} \times 2{,}346 \times 10^{7} = 1352\ \mathrm{m/s}$$

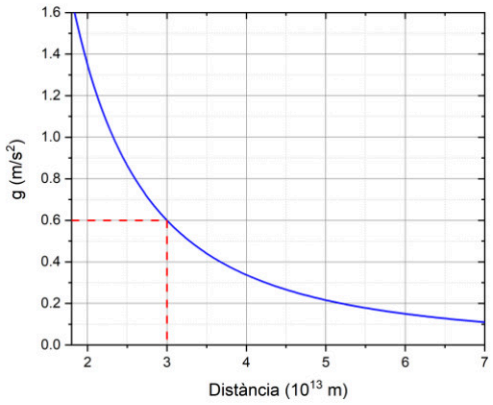
0,5 p.

I l'energia mecànica és:

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} M_D v^2 - G\,\frac{M_D M_M}{r} = -1{,}83 \times 10^{21}\ \mathrm{J}$$

12. PAU 2023 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 1

P1)



a)

0,25 p

Del gràfic $g = 0{,}6$ m/s^2.

La segona llei de Newton estableix que:

0,1 p.

$$\vec{F} = m_{S2}\vec{a}$$

I, la acceleració centrípeta de S2 és:

0,1 p

$$a = \frac{v^2}{r}$$

La força gravitatòria s'expressa com:

0,4 p

$$F = m_{S2}g$$

0,3 p

Per tant obtenim que: $\frac{v^2}{r} = g = 0{,}6\ \mathrm{m/s^2}$

0,1 p

I finalment: $v = \sqrt{rg} = 4{,}24 \times 10^6\ \mathrm{m/s}$

b)

0,25 p

Segons la llei de gravitació universal, el mòdul de la força s'expressa com:

$$F = G\,\frac{m_{S2}M_{A*}}{r^2}$$

$$\text{i } F = m_{S2}g$$

Per tant obtenim que:

0,25 p

$$g = G\,\frac{M_{A*}}{r^2} = 0{,}6\ \mathrm{m/s^2}$$

0,25 p

$$M_{A*} = g\,\frac{r^2}{G} = 8{,}10\times10^{36}\ \mathrm{kg}\,\frac{M_{Sol}}{1{,}99\times10^{30}\ \mathrm{kg}} = 4{,}07\times10^{6}M_{Sol}$$

0,25 p

El càlcul de la velocitat d'escapament es basa en el principi de conservació de l'energia mecànica. Per escapar cal que l'energia mecànica sigui igual a la de l'infinit que és 0: $E_m(\text{a una distància } r \text{ de Sagitari A*}) = 0$

$$E_m = E_c + E_p = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_{esc}^2 - G\frac{mM_{A*}}{r} = 0$$

0,25 p

$$\frac{1}{2}mv_{esc}^2 = G\frac{mM_{A*}}{r} \Rightarrow r = \frac{2GM_{A*}}{v_{esc}^2} = \frac{2\times6{,}67\times10^{-11}\cdot8{,}10\times10^{36}}{\left(3{,}00\times10^{8}\right)^2} = 1{,}20\times10^{10}\ \mathrm{m}$$

13. PAU 2022 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 1

P1)

a)

0,2 p Segons la llei de gravitació universal, el mòdul de la força sobre un satèl·lit de massa m que orbita al voltant de la Terra amb un radi orbital r s'expressa com a:

$$F = G\,\frac{mM_T}{r^2}$$

0,2 p I la segona llei de Newton estableix que: $\vec{F} = m\vec{a}$

0,2 p D'altra banda, considerant que el satèl·lit descriu un moviment circular uniforme al voltant de la Terra, la seva acceleració centrípeta és: $a = \frac{v^2}{r}$

0,25 p Com que sobre el satèl·lit només hi actua la força de la gravetat:

$$G\,\frac{mM_T}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{G\,\frac{M_T}{r}}$$

0,2 p La velocitat orbital del nanosatèl·lit és:

$$v = \sqrt{G\,\frac{M_T}{r}} = \sqrt{6{,}67\times10^{-11}\,\frac{5{,}98\times10^{24}}{6{,}37\times10^{6}+500\times10^{3}}} = 7620\ \text{m/s}$$

0,2 p I el període és:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(6{,}37\times10^{6}+500\times10^{3})}{7620} = 5660\ \text{s}$$

b)

0,4 p Com que el camp gravitatori és conservatiu, l'energia mecànica del satèl·lit a la superfície de la Terra és igual a l'energia mecànica a l'òrbita.
De l'apartat anterior sabem la velocitat orbital:

$$v = \sqrt{G\,\frac{M_T}{r}}$$

0,1 p Per tant, l'energia cinètica per a una òrbita de radi r és:

$$E_c(r) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}G\,\frac{M_T m}{r}$$

0,2 p L'energia potencial a l'òrbita és:

$$E_p(r) = -G\,\frac{M_T m}{r}$$

0,2 p I l'energia mecànica a l'òrbita és:

$$E_m(r) = E_c(r) + E_p(r) = -\frac{1}{2}G\,\frac{M_T m}{r}$$

0,1 p A la superfície de la Terra, l'energia potencial és:

$$E_p(R_T) = -G\,\frac{M_T m}{R_T}$$

I si igualem les energies mecàniques obtenim:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\,\frac{M_T m}{R_T} = -\frac{1}{2}G\,\frac{M_T m}{r} \Rightarrow \frac{1}{2}v^2 = GM_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r}\right)$$

0,1 p I, finalment, si aïllem la velocitat obtenim:

$$v = \sqrt{GM_T\left(\frac{2}{R_T} - \frac{1}{r}\right)}$$

0,15 p Per al nanosatèl·lit:

$$v = \sqrt{6{,}67 \times 10^{-11} \cdot 5{,}98 \times 10^{24}\left(\frac{2}{6{,}37 \times 10^6} - \frac{1}{6{,}37 \times 10^6 + 500 \times 10^3}\right)} = 8200 \text{ m/s}$$

14. PAU 2022 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 1

P1)

a)

0,25 p A partir de la intensitat del camp gravitatori obtenim el mòdul de la força de la gravitatòria: $F_g = mg$

0,2 p I la segona llei de Newton estableix que: $\vec{F} = m\vec{a}$

0,2 p Com que sobre el satèl·lit només actua la força de la gravetat: $a = g$

0,2 p D'altra banda, considerant que el satèl·lit descriu un moviment circular uniforme al voltant de al terra, la seva acceleració centrípeta és: $a = \frac{v^2}{R}$ o $a = \omega^2 R$

També s'ha de considerar correcte que directament s'expressi $mg = ma = m\frac{v^2}{R}$ o $mg = ma = m\omega^2 R$

0,2 p Per tant $g = R\omega^2 = R\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}R$

0,2 p $g = \frac{4\pi^2}{T^2}R = \frac{4\pi^2}{(27{,}3\cdot 24\cdot 60\cdot 60)^2}384 \times 10^6 = 2{,}72 \times 10^{-3}\ \mathrm{m/s^2}$

b)

0,2 p Com que el camp gravitatori es conservatiu, l'energia mecànica a la superfície d'un planeta o d'un satèl·lit és igual a l'energia mecànica a l'infinit.

0,2 p D'altra banda, l'energia mecànica mínima a l'infinit correspon a una energia cinètica nul·la, és a dir, l'energia mecànica mínima per poder escapar d'un objecte astronòmic és zero, $E_m(\infty) = 0$.

0,1 p Per tant, atès que $E_m = E_P + E_C = 0 \Rightarrow E_C = -E_P$

Així l'energia cinètica mínima que cal subministrar és: $E_C(\text{superfície}) = -E_P(\text{superfície})$

0,1 p Per tant, per a un objecte de massa *m*:

$$E_C(\text{superfície}) = G\frac{M \cdot m}{R}$$

On *M* i *R* són la massa i el radi de l'objecte astronòmic, respectivament.

0,2 p per la Terra $E_C(\text{Terra}) = G\frac{M_T \cdot m}{R_T}$,

i per la Lluna $E_C(\text{Lluna}) = G\frac{M_{Ll} \cdot m}{R_{Ll}}$.

0,45 p

$$\frac{E_C(\text{Terra})}{E_C(\text{Lluna})} = \frac{G\dfrac{M_T \cdot m}{R_T}}{G\dfrac{M_{Ll} \cdot m}{R_{Ll}}} = \frac{M_T}{M_{Ll}}\frac{R_{Ll}}{R_T} = \frac{81{,}3}{3{,}67} = 22{,}1$$

Escapar de la Terra té, com a mínim, un cost energètic 22 vegades més gran que de la Lluna.

15. PAU 2022 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 6

P6)

a)

Si la intensitat de camp gravitatori és uniforme, el mòdul de la diferència de potencial s'expressa com:

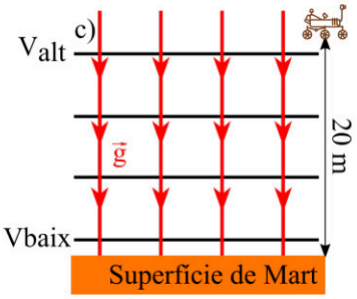
0,3 p $|\Delta V| = gd$, llavors:

0,25 p $g = \frac{|\Delta V|}{d} = \frac{74{,}4\ \text{J/kg}}{20{,}0\ \text{m}} = 3{,}72\ \text{m/s}^2$

No es pot considerar com a correcte cap deducció que arribi a la relació $g = G\frac{M}{R^2}$ atès que es demana explícitament que es determini *g* a partir de la diferència de potencial. L'objectiu d'aquest problema és comprovar que l'estudiant coneix i sap aplicar la relació existent entre el camp i la diferència de potencial quan el camp és uniforme.

0,4 p El potencial gravitatori és una magnitud escalar, per tant, no poden ser ni l'esquema "a" ni l'esquema "b". D'altra banda, les línies de camp gravitatori indiquen la direcció de la força que actua sobre una massa puntual, per tant, són perpendiculars a la superfície del planeta i van dirigides de dalt cap a baix (línies vermelles a l'esquema). Com que les superfícies equipotencials són perpendiculars a les línies de camp, aquestes són paral·leles a la superfície, i, per tant, en la projecció al pla del dibuix correspon a les línies horitzontals, esquema "c".

0,3 p Les línies de camp indiquen la direcció en la qual el potencial disminueix, per tant, el potencial serà més gran com més allunyats estiguem de la superfície. Una justificació alternativa és a partir de l'expressió del potencial $V(r) = -G\frac{M}{r}$, atès que quan ens allunyem de la superfície *r* disminueix, llavors el potencial augmenta.



Tot aquest apartat també es pot resoldre partint de l'expressió (vàlida quan *g* és uniforme):

$U = mgh \Rightarrow V = \frac{U}{m} = gh,$ on $U_0 = U(h = 0) = 0$ J

Aquesta darrera expressió ens permet determinar *g*, i justificar com són les línies de camp i que *V* augmenta quan *h* augmenta.

b)

0,5 p El treball que fa el camp gravitatori és:

$$W_{cg} = -\Delta U = -m\Delta V = -1025(-74{,}4) = 76300\ \text{J}$$

Observeu que $\Delta V = -74{,}4\ \text{J/kg}$ atès que partim d'un potencial alt per acabar en un potencial més baix, per tant, la diferència de potencial és negativa. Alternativament:

$$W_{cg} = -\Delta U = -\left(U_{fin} - U_{in}\right) = -(0 - mgh) = mgh = 76300\ \text{J}$$

0,5 p D'altra banda el teorema de les forces vives estableix que el treball total és igual a la variació d'energia cinètica. Com que la sonda baixa a velocitat constant, la variació d'energia cinètica és zero i també ho serà el treball total.

0,25 p Com que el treball fet per les forces de fregament és nul, el treball total és la suma del treball fet pel camp gravitatori i el treball fet per la grua,

$$W_{grua} + W_{cg} = 0 \Rightarrow W_{grua} = -W_{cg} = -76300\ \text{J}$$

Per obtenir aquests 0,25 p, no només cal donar el valor correcte del treball, cal que el signe sigui també el correcte. La força que fa la grua s'oposa al moviment, per tant, aquest treball és negatiu.

Alternativament, tot aquest apartat es pot resoldre calculant el treball fet per la grua com la força pel desplaçament, tenint en compte que la força que fa la grua és –mg.

16. PAU 2022 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 1

P1)

a)

0,3 p. Segons la tercera llei de Kepler:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G\,M_{Sol}}{(2\pi)^2}$$

On *a* és la longitud del semieix major.

0,3 p.

$$a = \sqrt[3]{G\,M_{Sol}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2} = \sqrt[3]{6{,}67\times10^{-11}\times1{,}99\times10^{30}\left(\frac{76\times365\times24\times3600}{2\pi}\right)^2}$$
$$= 2{,}68\times10^{12}\ \text{m}$$

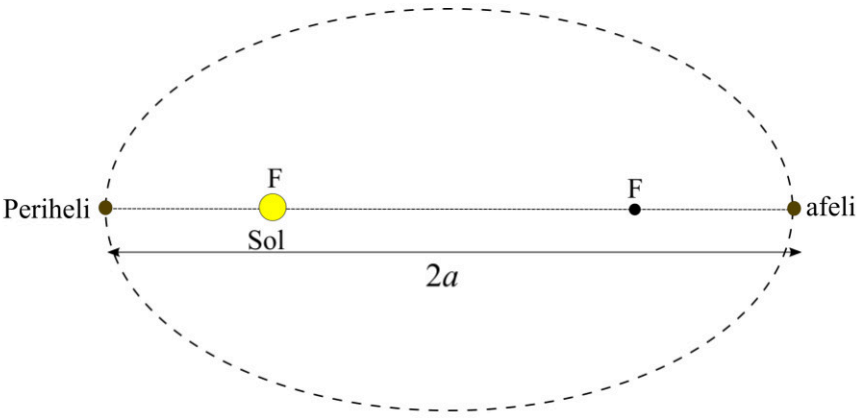
Alternativament, s'ha d'acceptar com correcte que l'estudiant recordi que la tercera llei de Kepler al sistema solar s'expressa com

$$\frac{a^3}{T^2} = 1\,\frac{\text{ua}^3}{\text{any}^2}$$

Llavors,

$$a = \sqrt[3]{T^2} = \sqrt[3]{76^2} = 17{,}94\ \text{ua}$$

0,65 p.



Cal dibuixar una òrbita clarament el·líptica amb dos focus.

Cal dibuixar el sol en un dels focus, sinó es resta **0,3 p.**

Cal dibuixar el periheli i l'afeli sobre l'eix major, un a cada extrem amb el periheli sent el més proper al sol, sinó es resta **0,3 p.**

b)

0,1 p. Les distàncies a l'afeli i al periheli sumades són igual a la longitud del eix major:

$$r_A + r_P = 2a$$

$r_P = 0{,}586 \text{ ua} \frac{1{,}50\times10^{11} \text{ m}}{1 \text{ UA}} = 8{,}79 \times 10^{10} \text{ m}$ **0,1 p.**

$r_A = 2a - r_P = 5{,}28 \times 10^{12} \text{ m}$ **0,1 p.**

0,3 p Segons la llei de gravitació universal, el mòdul de la força s'expressa com:

$$F = G \frac{m_{Halley} M_{Sol}}{r^2}$$

i $F = m_{Halley} g$, llavors:

0,25 p $g = G \frac{M_{Sol}}{r^2}$

Per l'afeli: $g = G \frac{M_{Sol}}{r_A^2} = 4{,}76 \times 10^{-6} \text{ m/s}^2$ **0,2 p**

I pel periheli: $g = G \frac{M_{Sol}}{r_A^2} = 1{,}72 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$ **0,2 p**

17. PAU 2021 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 1

P1)

a)

0,25 p A partir del gràfic $2T = 17 \text{ dies} \Longrightarrow T = 8{,}5 \text{ dies} = 7{,}34 \times 10^5 \text{s}$.

De la tercera llei de Kepler i tenint en compte que la constant de Kepler és igual a la del nostre sistema solar:

0,7 p

$\frac{r_{orb\ terra}^3}{T_{terra}^2} = \frac{r_{orb\ planeta}^3}{T_{planeta}^2} \Longrightarrow r_{orb\ planeta} = r_{orb\ terra} \left(\frac{T_{planeta}}{T_{terra}}\right)^{\frac{2}{3}} = 1{,}22 \times 10^{10} \text{m} = 8{,}15 \times 10^{-2} \text{ ua}$ **0,3 p**

Cal tenir present que aquest no és l'únic plantejament correcte; per exemple, també es pot resoldre a partir de la segona llei de Newton i la llei de la gravitació universal de Newton.

b)

0,45 p $v_{planeta} = \frac{2\pi r_{orb\ planeta}}{T} = 1{,}05 \times 10^5 \text{m/s}$ **0,2 p**

0,4 p $a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(1{,}05\times10^5)^2}{1{,}22\times10^{10}} = 0{,}895 \text{ m/s}^2$ **0,2 p**

18. PAU 2021 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 1

P1)

a)

0,2 p. La tercera llei de Kepler estableix que el quadrat del període orbital és directament proporcional al cub del semieix major de la òrbita. Així doncs, en el cas d'òrbites circulars s'ha de complir que el quadrat del període orbital és directament proporcional al cub del radi de la òrbita,

0,2 p. Si el planeta descriu un moviment circular uniforme al voltant del Sol, la seva acceleració centrípeta és: $a_N=\frac{v^2}{r}$ o $a_N=\omega^2 r$

I la velocitat es pot expressar en funció del període com: $v=\frac{2\pi r}{T}$

Llavors, l'acceleració centrípeta es pot expressar com: $a_N=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$ **0,1 p.**

0,2 p. I segons la llei de gravitació universal, el mòdul de la força s'expressa com:

$F = G\frac{mM_{Sol}}{r^2}$

0,1 p. La segona llei de Newton estableix que: $\vec{F} = m\vec{a}$, on *m* és la massa del planeta.

Per tant, obtenim que: $a=G\frac{M_{Sol}}{r^2}$

0,2 p. I com que la força de la gravetat és perpendicular a la trajectòria, l'acceleració és igual a l'acceleració centrípeta:

$$G\frac{M_{Sol}}{r^2} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

I, finalment, si aïllem T^2 obtenim la tercera llei de Kepler per a òrbites circulars:

$T^2 = \frac{(2\pi)^2}{G\,M_{Sol}} r^3$ ó $\frac{r^3}{T^2} = \frac{G\,M_{Sol}}{(2\pi)^2}$. **0,25 p.**

---

b)

1,0 p. El càlcul es pot fer a partir de l'expressió anterior i fent servir les dades de qualsevol planeta de la taula:

$$M_{Sol} = \frac{(2\pi)^2}{G}\frac{r^3}{T^2}$$

Per exemple, a partir de les dades de l'òrbita de la terra obtenim:

$M_{Sol} = \frac{(2\pi)^2}{G}\frac{r^3}{T^2} = \frac{(2\pi)^2}{6{,}67\times10^{-11}}\frac{(149{,}6\times10^9)^3}{(365\times24\times3600)^2} = 1{,}99\times10^{30}\ \text{kg}$ **0,25 p.**

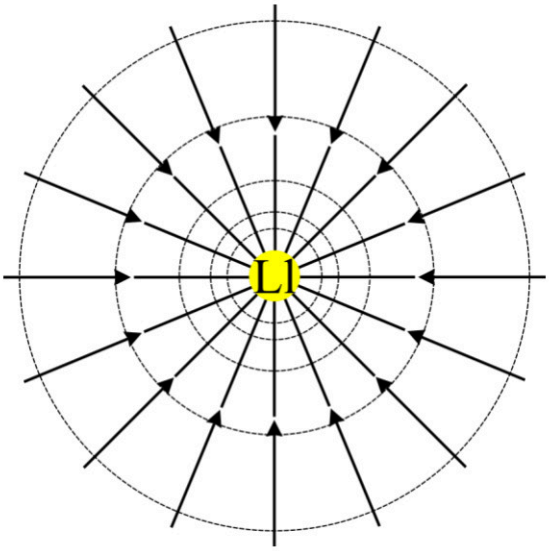
També es possible que l'estudiant faci el càlcul per a més d'un planeta i doni el valor mitjà, aquest procediment també s'ha de considerar correcte.

---

19. PAU 2021 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 1

P1)

a)



0,25 p Cal dibuixar les línies de camp radials i distribuïdes uniformement.

0,1 p Cal indicar el sentit: de l'infinit cap a la lluna.

0,1 p Les corbes equipotencials son circumferències concèntriques amb la lluna.

0,25 p Quan ens allunyem de la lluna, el potencial augmenta. Dues possibles justificacions:

$V_g = -G\ \frac{M_{Ll}}{r}$, si *r* augmenta llavors $G\ \frac{M_{Ll}}{r}$ disminueix i el potencial augmenta.

Les línies de camp indiquen la direcció en la que el potencial disminueix, llavors com que les línies de camp apunten cap a la Lluna, el potencial gravitatori disminueix quan ens acostem a la Lluna.

0,25 p $g = -G\ \frac{M_{Ll}}{r^2} \Longrightarrow r = \sqrt{G\ \frac{M_{Ll}}{g}}$

0,2 p $r = \sqrt{6{,}67 \times 10^{-11}\ \frac{7{,}35 \times 10^{22}}{1{,}306}} = 1{,}937 \times 10^{6}\ \mathrm{m}$

0,1 p $d = r - R_{Ll} = 1{,}937 \times 10^{6} - 1{,}740 \times 10^{6} = 1{,}97 \times 10^{5}\mathrm{m}$

b)

0,65 p Per escapar la gravetat de la Lluna, cal com a mínim que l'energia mecànica quan la distància a la Lluna és molt gran sigui zero. Com que el camp gravitatori és conservatiu l'energia mecànica a la superfície de la Lluna serà:

$$E_m = \frac{1}{2} M_{Nau} v^2 - G \frac{M_{Nau} M_{Ll}}{R_{Ll}} = 0$$

0,6 p Llavors l'energia cinètica que cal subministrar és:

$$E_c = \frac{1}{2} M_{Nau} v^2 = G \frac{M_{Nau} M_{Ll}}{R_{Ll}} = 6{,}67 \times 10^{-11} \frac{4{,}57 \times 10^4 \cdot 7{,}35 \times 10^{22}}{1{,}740 \times 10^6} = 1{,}29 \times 10^{11}\ \text{J}$$

Una resolució alternativa seria:

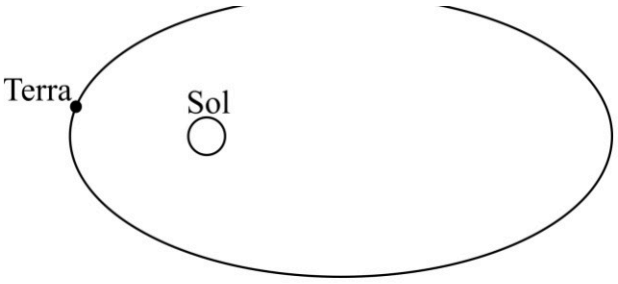
0,65 p $v_{esc} = \sqrt{2\, G\, \frac{M_{Ll}}{R_{Ll}}} = 2374\ \text{m/s}$

0,6 p $E_c = \frac{1}{2} M_{Nau} v_{esc}^2 = 1{,}29 \times 10^{11}\ \text{J}$

20. PAU 2020 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 1

P1)

a)



0,4 p El Sol està en el focus de l'el·lipse i a l'hivern la Terra s'ha de trobar al periheli o a prop d'aquest.

0,4 p L'energia mecànica de la Terra es conserva atès que només actua la força de la gravetat, que és una força conservativa.

L'energia mecànica és la suma de les energies cinètica i potencial gravitatòria:

$$E_m(r) = \frac{1}{2} M_T v^2 - G\,\frac{M_T M_S}{r} = constant$$

Quan r és mínim, llavors el terme $G\frac{M_S M_T}{r}$ és màxim i, per tant, l'energia potencial és mínima al periheli i màxima a l'afeli.

Com que l'energia mecànica és constant, si a l'afeli l'energia potencial gravitatòria és màxima, llavors l'energia cinètica serà mínima i també serà mínima la velocitat en aquest punt de la trajectòria.

També es pot argumentar que:

$$E_m(r) = \frac{1}{2} M_T v^2 - G\,\frac{M_T M_S}{r} \Longrightarrow v = \sqrt{constant + 2G\,\frac{M_S}{r}}$$

Com que a l'afeli r és màxim, llavors el terme $2G\frac{M_S}{r}$ és mínim i també ho serà la velocitat.

Es pot plantejar la solució a partir de la segona llei de Kepler:

0,35 p $r_a v_a M_T = r_p v_p M_T$

0,1 p $r_a = r_p \frac{v_p}{v_a} = 147{,}1 \times 10^9 \frac{30.750}{28.760} = 1{,}57 \times 10^{11}\text{m}$

Alternativament, es pot plantejar a partir de la conservació de l'energia mecànica:

0,1 p $E_m(r_a) = E_m(r_p)$

0,25 p $\frac{1}{2} M_T v_a^2 - G\,\frac{M_T M_S}{r_a} = \frac{1}{2} M_T v_p^2 - G\,\frac{M_T M_S}{r_p}$

$\frac{1}{r_a} = \frac{1}{r_p} + \frac{1}{2}\frac{v_a^2 - v_p^2}{G M_S}$

0,1 p $r_a = \left[\frac{1}{r_p} + \frac{1}{2}\frac{v_a^2 - v_p^2}{G M_S}\right]^{-1} = \left[\frac{1}{147{,}1\times10^9} + \frac{1}{2}\frac{28.760^2 - 30.750^2}{6{,}67\times10^{-11}\cdot 1{,}99\times10^{30}}\right]^{-1} = 1{,}57 \times 10^{11}\text{m}$

b)

0,65 p $g_S = G\frac{M_S}{R_S^2} = 274\ \text{m/s}^2$ **0,1 p**

0,4 p El pes és: $Pes = m\, g_S = 274 \cdot 10{,}0 = 2740\ \text{N}$ **0,1 p**

21. PAU 2020 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 3

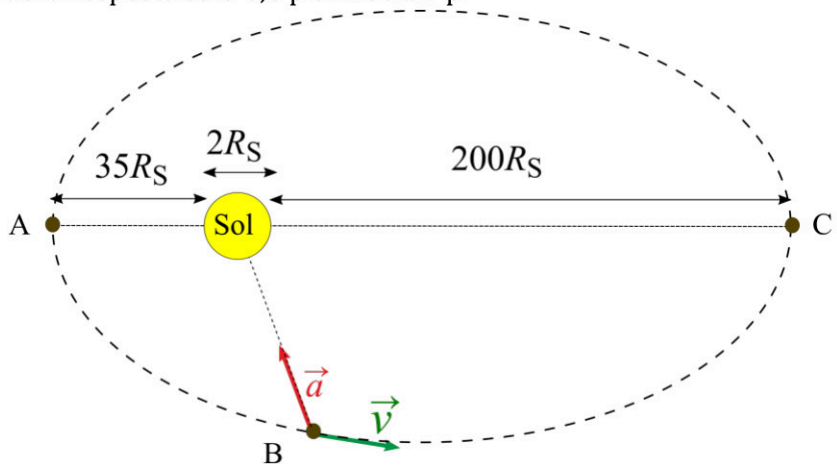
P3)

a)

0,25 p De la gràfica, s'han completat 7 voltes.

1,0 p De l'esquema la longitud de l'eix major és: $35R_S + 2R_S + 200R_S = 237R_S$

Si el resultat és $235R_S$ perquè no s'ha tingut en compte el diàmetre del Sol, llavors la qualificació de la resposta serà 0,8 p en lloc d'1 p.



b)

0,25 p Dibuix d'una òrbita el·líptica amb el sol en un dels seu focus.

0,1 p Identificar els punts A i C com el més proper i el més allunyat del Sol.

0,25 p Representar correctament la direcció i sentit dels vectors acceleració i velocitat.

0,4 p Conservació de l'energia mecànica:

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM_T}{r} \Longrightarrow \frac{1}{2}mv^2 = constant + G\frac{mM_T}{r}$$

0,25 p Quan r és mínim, llavors el terme $G\frac{mM_T}{r}$ i l'energia cinètica són màxims, per tant, el punt on la velocitat és més gran és el punt més proper al Sol, el punt A. També es pot argumentar a partir de la conservació de l'energia mecànica que l'energia cinètica és màxima quan l'energia potencial gravitatòria és mínima, i això passa quan la distància entre el Sol i la nau és mínima.

Alternativament

0,4 p Segona llei de Kepler: "Un segment rectilini que uneix la nau i el Sol escombra àrees iguals en intervals de temps iguals".

0,25 p Com que la longitud d'aquest segment és mínima al punt A, llavors, per escombrar la mateixa àrea en el mateix interval de temps, cal que el desplaçament sigui màxim, és a dir, cal que la velocitat de la nau sigui màxima.

22. PAU 2020 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 6

P6)

a)

0,25 p $\Delta s = \frac{1}{2}gt^2 \Longrightarrow g = \frac{2\Delta s}{t^2} = \frac{2\cdot 1}{1{,}1^2} = 1{,}65\ \mathrm{m/s^2}$.

0,75 p

$g = G\frac{M_{Lluna}}{R_{Lluna}^2} \Rightarrow M_{Lluna} = g\frac{R_{Lluna}^2}{G} = 1{,}65\frac{(1{,}74\times10^6)^2}{6{,}67\times10^{-11}} = 7{,}50\times10^{22}\mathrm{kg}$ **0,25 p**

b)

La segona llei de Newton estableix que: $\vec{F} = m\vec{a}$ **0,1 p.**

Segons la llei de gravitació universal, el mòdul de la força s'expressa com:

$F = G\ \frac{mM_T}{r^2}$ **0,4 p**

Per tant, obtenim que: $a=G\frac{M_T}{r^2}$ **0,2 p**

D'altra banda, considerant que la Lluna descriu un moviment circular uniforme al voltant de la terra, la seva acceleració centrípeta és: $a=\frac{v^2}{r}$ o $a=\omega^2 r$ **0,25 p**, i la velocitat es pot expressar com $v=\frac{2\pi r}{T}$ o $\omega=\frac{2\pi}{T}$ **0,1 p**

Per tant: $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_T}}$ **0,1 p**

Llavors: $T = 2\pi\sqrt{\frac{(3{,}84\times10^8)^3}{6{,}67\times10^{-11}\cdot5{,}98\times10^{24}}} = 2{,}37\times10^6\ \mathrm{s} = 27{,}4\ \mathrm{dies}$ **0,1 p**

23. PAU 2020 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 3

P3)

a)

0,2 p Per calcular la massa de Júpiter ens cal primer la velocitat lineal o angular: $v=\frac{2\pi r}{T}$ o $\omega=\frac{2\pi}{T}$

0,1 p $v=\frac{2\pi r}{T}=1{,}73\times10^{4}$ m/s o $\omega=\frac{2\pi}{T}=4{,}11\times10^{-5}$ rad/s.

0,1 p. La segona llei de Newton estableix que: $\vec{F}=M_{Io}\vec{a}$

Segons la llei de gravitació universal, el mòdul de la força s'expressa com:

$F=G\frac{M_{Io}M_J}{r^2}$ **0,2 p.**

Per tant obtenim que: $a=G\frac{M_J}{r^2}$ **0,1 p.**

0,2 p. D'altra banda, considerant que Io descriu un moviment circular uniforme al voltant de Júpiter, la seva acceleració centrípeta és: $a=\frac{v^2}{r}$ o $a=\omega^2 r$,

I la massa de Júpiter és

0,25 p. $M_J=\frac{r\cdot v^2}{G}=1{,}90\times10^{27}$ kg o $M_J=\frac{r^3\cdot\omega^2}{G}=1{,}90\times10^{27}$ kg **0,1 p.**

b)

1 p De la tercera llei de Kepler:

$\frac{T_{Io}^2}{r_{Io}^3}=\frac{T_{Cal\cdot listo}^2}{r_{Cal\cdot listo}^3}\Rightarrow r_{Cal\cdot listo}=r_{Io}\left(\frac{T_{Cal\cdot listo}}{T_{Io}}\right)^{\frac{2}{3}}=1{,}88\times10^{9}$ m **0,25 p**

Alternativament

0,1 p, La velocitat angular és: o $\omega=\frac{2\pi}{T}=4{,}36\times10^{-6}$ rad/s .

0,25 p. $G\frac{M_{Cal\cdot listo}M_J}{r^2}=M_{Cal\cdot listo}\omega^2 r$

0,8 p $r=\sqrt[3]{G\frac{M_J}{\omega^2}}=1{,}88\times10^{9}$ m **0,1 p**

24. PAU 2020 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 6

P6)

a)

La segona llei de Newton estableix que: $\vec{F} = M_{Ll}\vec{a}$ **0,1 p.**

Segons la llei de gravitació universal, el mòdul de la força s'expressa com:

$F = G\frac{M_{Ll}M_T}{r^2}$ **0,2 p**

Per tant obtenim que: $a=G\frac{M_T}{r^2}$ **0,1 p**

D'altra banda, considerant que el satèl·lit descriu un moviment circular uniforme al voltant de al terra, la seva acceleració centrípeta és: $a=\frac{v^2}{r}$ o $a=\omega^2 r$ **0,1 p**, i la velocitat es pot expressar com $v=\frac{2\pi r}{T}$ o $\omega=\frac{2\pi}{T}$ **0,1 p**

Per tant: $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_T}}$ **0,1 p**

Llavors: $T = 2\pi\sqrt{\frac{(3{,}84\times10^8)^3}{6{,}67\times10^{-11}\cdot5{,}98\times10^{24}}} = 2{,}37\times10^6\ \text{s} = 27{,}4\ \text{dies}$ **0,1 p**

0,35 p $U_g = -G\frac{M_{Ll}M_T}{r} = -6{,}67\times10^{-11}\ \frac{7{,}35\times10^{22}\cdot5{,}98\times10^{24}}{3{,}84\times10^8} = -7{,}63\times10^{28}\ \text{J}$ **0,1 p**

b)

Segons la llei de gravitació universal,

0,4 p $G\frac{mM_T}{d^2} = G\frac{mM_{Ll}}{(R_{TLl}-d)^2}$

0,5 p $\left[\frac{R_{TLl}-d}{d}\right]^2 = \frac{M_{Ll}}{M_T} \Longrightarrow \frac{R_{TLl}-d}{d} = \pm\sqrt{\frac{M_{Ll}}{M_T}} \Longrightarrow \frac{R_{TLl}}{d} = 1 \pm \sqrt{\frac{M_{Ll}}{M_T}} \Longrightarrow d = \frac{R_{TLl}}{1\pm\sqrt{\frac{M_{Ll}}{M_T}}}$

Dues possibles solucions:

0,35 p $d = \frac{R_{TLl}}{1-\sqrt{\frac{M_{Ll}}{M_T}}} = 4{,}31\times10^8\ \text{m} > R_{TLl}$, aquesta solució no es bona, atès que no es troba entre la Terra i la Lluna tal i com demana l'enunciat.

$d = \frac{R_{TLl}}{1+\sqrt{\frac{M_{Ll}}{M_T}}} = 3{,}46\times10^8\ \text{m} < R_{TLl}$, aquesta és la resposta correcte!

25. PAU 2019 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 2 (Part comuna)

P2)

a)

$$\left.\begin{array}{r} F_g = ma_c \\ G\frac{M_J m_{\text{sonda}}}{r^2} = m_{\text{sonda}}\frac{v^2}{r} \\ E_c = \frac{1}{2}m_{\text{sonda}}v^2 \\ r = R_{Jupiter} + h \end{array}\right\} \Rightarrow E_c = \frac{1}{2}G\frac{M_J m_{\text{sonda}}}{r} \qquad \textbf{0,2 p}$$

0,1 p $r = 69911 + 4300 = 74\,211\ \text{km} = 7{,}42 \times 10^7\ \text{m}$

0,3 p $E_c = \frac{1}{2}G\frac{M_J m_{\text{sonda}}}{r} = 3{,}10 \times 10^{12}\text{J}$

El valor de la velocitat de Juno en la seva òrbita és:

0.2 p $v = \sqrt{\frac{2E_c}{m_{\text{sonda}}}} = 4{,}13 \times 10^4 \text{ms}^{-1}$

0.2 p $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 7{,}4211\times10^7}{4{,}132\times10^4} = 11300\ \text{s}$

b)

0,4 p $E_{\text{òrbita}} + E_{\text{a comunicar}} = 0$

0,6 p $E_{\text{a comunicar}} = G\frac{M_J m_{\text{sonda}}}{2r} = 3{,}10 \times 10^{12}\text{J}$

26. PAU 2019 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2 (Part comuna)

P2)

a)

La segona llei de Newton estableix que: $\vec{F} = m\vec{a}$ **0,1 p.**

Segons la llei de gravitació universal, el mòdul de la força s'expressa com:

$F = G\ \frac{mM_T}{r^2}$ **0,2 p**

Per tant, obtenim que: $a = G\frac{M_T}{r^2}$ **0,1 p**

D'altra banda, considerant que el satèl·lit descriu un moviment circular uniforme al voltant de la terra, la seva acceleració centrípeta és: $a = \frac{v^2}{r}$ o $a = \omega^2 r$ **0,1 p**, i la velocitat es pot expressar com $v = \frac{2\pi r}{T}$ o $\omega = \frac{2\pi}{T}$ **0,1 p**

Per tant: $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_T}}$ **0,1 p**

D'altra banda, $r = (530 + 6370) \times 1000 = 6{,}9 \times 10^6$ m **0,1 p**

Llavors: $T = 2\pi\sqrt{\frac{(6{,}9\times10^6)^3}{6{,}67\times10^{-11}\cdot 5{,}98\times10^{24}}} = 5700$ s **0,1 p**

I el nombre de voltes és $\frac{86400}{5700} = 15{,}15$, voltes senceres = 15 **0,1 p**

b)

Intensitat del camp gravitatori a l'òrbita del satèl·lit $g = G\frac{M_T}{r^2} = 8{,}38\ \text{m/s}^2$ **0,5 p**

$Pes = mg = 10{,}9$ N **0,5 p**

27. PAU 2019 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 2 (Part comuna)

P2)

a)

La segona llei de Newton estableix que: $F = ma$ **0,2 p.**

Segons la llei de gravitació universal, el mòdul de la força és: $F = G\frac{mM}{r^2}$ **0,2 p**

Per tant obtenim que: $a = G\frac{M}{r^2}$ **0,1 p**

D'altra banda, considerant que els planetes descriuen moviments circulars uniformes, la seva velocitat es pot expressar com el perímetre de l'òrbita dividit pel període: $v = \frac{2\pi r}{T}$ **0,1 p** i tenint en compte que en aquest cas l'acceleració centrípeta val: $a = \frac{v^2}{r}$ **0,1 p**, obtenim que: $a = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$ **0,1 p**.

Per tant: $G\frac{M}{r^2} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$ que reordenem per obtenir la tercera llei de Kepler:

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \Rightarrow T^2 \propto r^3$$ **0,2 p**

b) Aïllem M:

0,6 p $M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2(1{,}496\times10^{11})^3}{6{,}67\times10^{-11}\times(3{,}154\times10^7)^2} = 1{,}99\times10^{30}\ \text{kg}$ **0,4 p**

28. PAU 2018 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 1 (Part comuna)

PART COMUNA

P1)

a)

0,1 p $F = ma$

0,4 p $\frac{GMm}{r^2} = m\omega^2 r \Rightarrow GM = \frac{4\pi^2}{T^2}r^3$

0,5 p $M = \frac{4\pi^2(7{,}42\times10^9)^3}{6{,}67\times10^{-11}(9{,}9\times86400)^2} = 3{,}30\times10^{29}kg$

b)

0,1 p
$$\left.\begin{array}{l}\rho_{Terra} = \rho_X \Rightarrow \frac{m_{Terra}}{\frac{4}{3}\pi r_{Terra}^3} = \frac{m_X}{\frac{4}{3}\pi r_X^3} \Rightarrow \frac{m_{Terra}}{r_{Terra}^3} = \frac{m_X}{r_X^3} \\ \text{Com}: m_X = 1{,}35 m_{Terra}\end{array}\right\} \frac{m_x}{m_{Terra}} = 1{,}35 = \frac{r_X^3}{r_{Terra}^3}$$ **0,1 p**

0,2 p $r_X = r_{Terra}\sqrt[3]{1{,}35} = 7{,}04\times10^6 m$

0,2 p $g = \frac{Gm_x}{r_X^2}$

0,2 p $g = \frac{6{,}67\times10^{-11}\times1{,}35\times5{,}98\times10^{24}}{(7{,}04\times10^6)^2} = 10{,}9 m\cdot s^{-2}$ **0,2 p**

29. PAU 2018 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2 (Part comuna)

P2)

a)

0.2 p $\left.\begin{array}{l}\rho_{\cos} = \rho_{Sol} \\ R_{\cos} = 500 R_{Sol}\end{array}\right\} \dfrac{M_{\cos}}{\frac{4}{3}\pi R_{\cos}^3} = \dfrac{M_{Sol}}{\frac{4}{3}\pi R_{Sol}^3} \Rightarrow M_{\cos} = \dfrac{M_{Sol} 500^3 R_{Sol}^3}{R_{Sol}^3}$

0.3 p $M_{\cos} = 500^3 M_{Sol} = 500^3 \times 1{,}99 \times 10^{30} = 2{,}49 \times 10^{38}\, kg$

0.1 p La condició d'escapament exigeix que $E_m = 0$

0.2 p $E_m = E_c + E_p = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2} m v_{esc}^2 - G\dfrac{m M_{\cos}}{R_{\cos}} = 0$

0.2 p $\dfrac{1}{2} m v_{esc}^2 = G\dfrac{m M_{\cos}}{R_{\cos}} \Rightarrow v_{esc} = \sqrt{\dfrac{2GM_{\cos}}{R_{\cos}}} = \sqrt{\dfrac{2 \times 6{,}67 \times 10^{-11} \cdot 2{,}49 \times 10^{38}}{3{,}48 \times 10^{11}}} = 3{,}09 \times 10^{8}\, m\, s^{-1}$

b)

0.2 p $g = G\dfrac{M_{\cos}}{R_{\cos}^2}$; $g = 1{,}37 \times 10^{5}\, m\, s^{-2}$ **0.3 p**

0.2 p $F = mg$

0.3 p $F = 1{,}00 \times 10^{-9} \cdot 1{,}37 \times 10^{5} = 1{,}37 \times 10^{-4}\, N$

Direcció radial i cap al centre de l'astre.

30. PAU 2018 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 1 (Part comuna)

PART COMUNA

P1)

a)

0.5 p $\frac{r_{Terra}^3}{T_{Terra}^2} = \frac{r_{Orcus}^3}{T_{Orcus}^2}$

0.5 p $r_{Orcus} = \left(\frac{1^3 \cdot 248^2}{1^2} \right)^{1/3} = 39{,}5UA$

b)

0.3 p

$$E = K + U = \frac{1}{2} m v_e^2 - G \frac{M_{Orcus} m}{R_{Orcus}} = 0$$

$$\frac{1}{2} m v_e^2 = G \frac{M_{Orcus} m}{R_{Orcus}} \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GM_{Orcus}}{R_{Orcus}}}$$

0.3 p $v_e = \sqrt{\frac{2 \times 6{,}67 \times 10^{-11} \times 6{,}41 \times 10^{20}}{459 \times 10^3}} = 4{,}32 \times 10^2 ms^{-1}$

0.4 p $|\vec{g}| = G \frac{M_{Orcus}}{R_{Orcus}^2} = \frac{6{,}67 \times 10^{-11} \cdot 6{,}41 \times 10^{20}}{\left(459 \times 10^3\right)^2} = 0{,}203 ms^{-2}$

Direcció radial, sentit centre del planeta

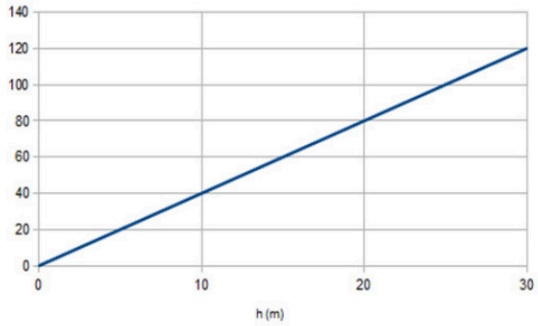
31. PAU 2017 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 1 (Part comuna)

PART COMUNA

P1)

a)

Veient que $R >> h$ i que, tal com es mostra a la gràfica, es considera que $E_p = 0$ a la superfície del planeta. Podem expressar l'energia potencial gravitatòria com: [$E_p = mgh$] en què g és l'acceleració de la gravetat a la superfície del planeta.



0.2 p $pendent = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta E_p}{\Delta h} = \frac{80}{20} = 4\ J/m$

$E_p = mgh$

0.4 p $pendent = mg \Rightarrow g = \frac{pendent}{m} = \frac{4}{2} = 2\ m/s^2$

0.2 p $g = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow M = \frac{gR^2}{G}$

0.2 p $M = \frac{2 \cdot \left(5 \times 10^6\right)^2}{6{,}67 \times 10^{-11}} = 7{,}50 \times 10^{23}\ kg$

b)

0.2 p La deducció es basa en el principi de conservació de l'energia mecànica. L'energia mecànica a l'infinit és zero.

$E_{\text{mecànica inicial}} = E_{\text{mecànica final}}$

0.6 p $K_{inicial} + U_{inicial} = K_{final} + U_{final}$

$\frac{1}{2} m v_{esc}^2 - G\frac{Mm}{R} = 0 + 0 \Rightarrow v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$

0.2 p $v_{esc} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.67 \times 10^{-11} \cdot 7{,}50 \times 10^{23}}{5 \times 10^6}} = 4{,}47 \times 10^3\ m/s$

32. PAU 2017 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1 (Part comuna)

PART COMUNA

P1)

a)

0.1 p $F = ma$

0.4 p
$$\begin{cases} \dfrac{GMm}{R^2} = m\omega^2 R = m\dfrac{4\pi^2}{T^2}R \\ GMT^2 = 4\pi^2 R^3 \\ T = \sqrt{\dfrac{4\pi^2 R^3}{GM}} \end{cases}$$

0.3 p $R = 400\cdot 10^3 + 3{,}38\cdot 10^6 = 3{,}78\times 10^6\, m$

0.2 p $T = 7{,}062\times 10^3\, s$

b)

0.2 p
$$\begin{cases} \dfrac{GMm}{R_M^2} = mg \\ g = \dfrac{GM}{R_M^2} \end{cases}$$

0.1 p $R_M = 3{,}38\cdot 10^6\, m$

0.2 p $g = 3{,}75 m/s^2$

0.2 p $v^2 = v_0^2 + 2gh$

0.1 p $h = 3700\, m$

0.2 p $v = \sqrt{0 + 2\cdot 3{,}75\cdot 3700} = 166{,}6 m/s$

33. PAU 2017 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 1 (Part comuna)

PART COMUNA

P1)

a)

0.2 p $F = G\dfrac{Mm}{R^2}$

0.4 p $g = \dfrac{F}{m} = G\dfrac{M}{R^2}$

0.4 p $g = 1{,}93\times10^{12}\,Nkg^{-1}\ (\text{ó}\ \text{ms}^{-2})$

b)

0.2 p La deducció es basa en el principi de conservació de l'energia mecànica.

0.4 p L'energia mecànica a l'infinit és zero.

$$\left.\begin{array}{l} E = U + K \\ E(\text{sup. estrella}) = E(\infty) = 0 \end{array}\right\} \text{velocitat mínima d'escapament} \rightarrow E = 0 = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R}$$

0.2 p $v = \sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$

0.2 p $v = \sqrt{\dfrac{2\cdot 6{,}67\times10^{-11}\cdot 2{,}9\times10^{30}}{10\times10^{3}}} = 1{,}97\times10^{8}\,m/s$

34. PAU 2016 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 1 (Part comuna)

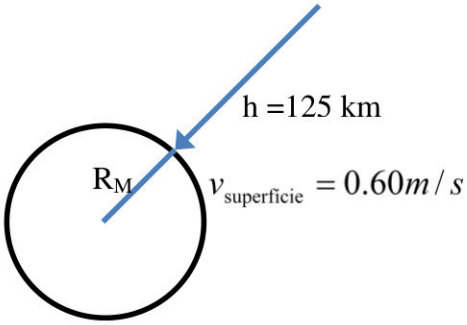
PART COMUNA

P1)

a)

0.2 p

$$\left.\begin{aligned} E_i &= \frac{1}{2}mv_i^2 - G\frac{Mm}{R_M + h} \\ E_f &= \frac{1}{2}mv_f^2 - G\frac{Mm}{R_M} \end{aligned}\right\}$$



0.4 p

$$\Delta E = E_f - E_i$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}m\left(v_f^2 - v_i^2\right) + GMm\left(\frac{1}{R_M + h} - \frac{1}{R_M}\right)$$

0.4 p

$$v_f = 0{,}60 m/s$$
$$v_i = 5845 m/s$$
$$m = 899 kg$$
$$h = 125000 m$$

$$\Delta E = -1{,}58 \times 10^{10} J$$

b)

0.2 p

$$|\vec{g}| = \frac{GM}{(R_M + h)^2}$$

0.4 p

$$|\vec{g}| = 3{,}47 m/s^2$$

0.4 p

$|\vec{F}| = mg = 3{,}12 \times 10^3 N$ direcció radial i cap al centre del planeta

35. PAU 2016 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 1 (Part comuna)

PART COMUNA

P1)

a)

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$

0.1 p T=0,33 dies =28512 s

0.3 p
$$\left.\begin{array}{l} G\dfrac{Mm}{R^2} = m\dfrac{v^2}{R} = m\omega^2 R \\ \omega = \dfrac{2\pi}{T} \end{array}\right\} GMT^2 = 4\pi^2 R^3 \Rightarrow R = \sqrt[3]{\dfrac{GMT^2}{4\pi^2}}$$ **0.3 p**

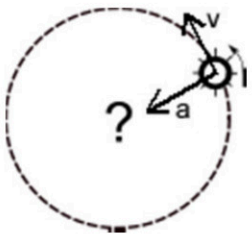
0.3 p
$$R = \sqrt[3]{\frac{6{,}67\times10^{-11}\times 2{,}2\times10^{31}\times(28512)^2}{4\pi^2}} = 3{,}11\times10^{9}\, m$$

b)

0.4 p
$$v = \omega R = \frac{2\pi}{T}R = \frac{2\pi}{28512}3{,}11\times10^{9} = 6{,}85\times10^{5}\, m/s$$

0.4 p
$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{\left(6{,}85\times10^{5}\right)^2}{3{,}11\times10^{9}} = 151 m/s^2$$

0.2 p



36. PAU 2016 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 3 (Opció A)

Opció A
P3)

a) La força d'atracció gravitatòria de Saturn sobre Mimas serà igual a la massa de Mimas per la seva acceleració centrípeta: **0.1**

$$G\frac{M_S\ M_M}{r_{\text{òrbita}}^2} = M_M\ \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\ r_{\text{òrbita}}\ \boxed{\mathbf{0.1}}$$

$$r_{\text{òrbita}} = \sqrt[3]{\frac{G\ M_S\ T^2}{4\pi^2}} = 1,85\cdot 10^8\ \text{m}\ \boxed{\mathbf{0.3}}$$

Per tant l'alçada respecte la superfície de Saturn serà: $h = r_{\text{òrbita}} - R_{\text{Saturn}} = 1,28\cdot 10^8$ m **0.2**

La seva velocitat orbital serà: $v_{\text{orbital}} = \omega\ r_{\text{òrbita}} = \frac{2\pi}{T}\ r_{\text{òrbita}} = 1,43\cdot 10^4$ m/s **0.3**

b) L'energia mecànica de Mimas serà:

$$\left.\begin{array}{r} E_m = E_T = \frac{1}{2}\ M_M\ v_{\text{orbital}}^2 - \frac{G\ M_S\ M_M}{r_{\text{òrbita}}}\ \boxed{\mathbf{0.2}} \\ G\frac{M_S\ M_M}{r_{\text{òrbita}}^2} = M_M\ \frac{v_{\text{orbital}}^2}{r_{\text{òrbita}}} \Rightarrow v_{\text{orbital}}^2 = \frac{G\ M_S}{r_{\text{òrbita}}}\ \boxed{\mathbf{0.2}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$E_m = E_T = -\frac{1}{2}\ \frac{G\ M_S\ M_M}{r_{\text{òrbita}}}\ \boxed{\mathbf{0.2}} = -3,90\cdot 10^{27}\ \text{J}\ \boxed{\mathbf{0.2}}$$

El signe negatiu significa que el satèl·lit Mimas està girant en una òrbita estable al voltant de Saturn. **0.2**

37. PAU 2016 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 3 (Opció B)

Opció B
P3)

a) L'acceleració de la gravetat en funció de l'alçada ve donada per l'expressió:

$$g(h) = \frac{G\ M_T}{(h\ +\ R_T)^2}\ \boxed{\mathbf{0.4}}$$

$$g(h = 330\ \text{km}) = 8,87\ \text{m/s}^2\ \boxed{\mathbf{0.3}}\quad g(h = 50\ \text{km}) = 9,66\ \text{m/s}^2\ \boxed{\mathbf{0.3}}$$

b) Si considerem negligible la resistència de l'aire, durant tot el procés de caiguda l'energia es conserva, **0.2** per tant:

$$E_m(h = 330\,\text{km}) = E_m(h = 80\,\text{km})\ \boxed{\mathbf{0.3}} \Rightarrow -\frac{G\ M_T\ m}{(330\ +\ 6370)\cdot 10^3} = -\frac{G\ M_T\ m}{(80\ +\ 6370)\cdot 10^3} + \frac{1}{2}\ m\ v^2 \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{2\ G\ M_T\left\{\frac{1}{(80\ +\ 6370)\cdot 10^3} - \frac{1}{(330\ +\ 6370)\cdot 10^3}\right\}} = 2,15\cdot 10^3\ \text{m/s}\ \boxed{\mathbf{0.5}}$$

38. PAU 2015 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 1 (Part comuna)

P1)

a)

0,2 $F_g = mg_M$

0,2 $G\frac{M_M m}{R_M^2} = mg_M \Rightarrow M_M = \frac{g_M R_M^2}{G}$

0,6 $M_M = \frac{3{,}71\times\left(3390\times10^3\right)^2}{6{,}67\times10^{-11}} = 6{,}39\times10^{23}\,kg$

b)

0,1 $T_D = 30{,}35h\times\frac{3600s}{1h} = 1{,}093\times10^5\,s$

El radi de l'òrbita de Deimos:

0,1 $F_g = ma_c$

0,1 $G\frac{M_M M_D}{r_D^2} = M_D\omega^2 r_D = M_D\left(\frac{2\pi}{T_D}\right)^2 r_D$

0,3 $r_D = \sqrt[3]{\frac{GM_M T_D^2}{4\pi^2}} = 2{,}3479\times10^7\,m = 23479km$

La velocitat d'escapament de *Curiosity*:

0,2 $\left.\begin{array}{l} E_m = 0 \Rightarrow E_C = -E_P \\ \frac{1}{2}mv_{esc.}^2 = G\frac{M_M m}{R_M} \end{array}\right\} v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM_M}{R_M}}$

0,2 $v_{esc} = 5015ms^{-1} \approx 5\,km/s$

39. PAU 2015 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 3 (Opció A)

Opció A

P3)

a)

0.2 $$v_G = \frac{2\pi R_G}{T_G}$$

0.1 $$T_G = 0.428 dies \times \frac{24h}{1dia} \times \frac{60\,\text{min}}{1h} \times \frac{60s}{1\,\text{min}} = 3{,}70 \times 10^4 s$$

0.2 $$v_G = \frac{2\pi \times 6{,}20 \times 10^7}{3{,}70 \times 10^4} = 1{,}05 \times 10^4 m/s$$

0.3 La força d'atracció gravitatòria és igual a la força centrípeta necessària perquè el satèl·lit giri en la seva òrbita.

$$F_{gravitatòria} = F_{centrípeta} \Rightarrow G\frac{M_N m_G}{R_G{}^2} = \frac{m_G v_G^2}{R_G}$$

0.2 $$M_N = \frac{R_G v_G^2}{G} = \frac{6{,}20 \times 10^7 \times \left(1{,}05 \times 10^4\right)^2}{6{,}67 \times 10^{-11}} = 1{,}02 \times 10^{26} kg$$

b)

0.5 $$g_N = \frac{GM_N}{R_N{}^2}$$

0.5 $$g_N = 11{,}2 m/s^2 \text{ ó } \left(N/kg\right)$$

40. PAU 2015 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 3 (Opció B)

Opció B
P3)

a)

0.2 $$F_{gravitatòria} = F_{centrípeta} \Rightarrow G\frac{M_T m_{Estació}}{r_{orbital}^2} = \frac{m_{Estació} v_{Estació}^2}{r_{orbital}}$$

0.2 $$r_{orbital} = R_T + h = 6{,}37\times10^6 + 385\times10^3 = 6{,}76\times10^6\, m$$

0.2 $$v_{Estació} = \sqrt{\frac{GM_T}{r_{orbital}}} = \sqrt{\frac{6{,}67\times10^{-11}\times5{,}98\times10^{24}}{6{,}76\times10^6}} = 7{,}68\times10^3\, m/s$$

El temps que s'ha d'esperar entre dues visualitzacions consecutives de l'estació es el PERÍODE 0.1 que es calcula a continuació.

0.1 $$T = \frac{2\pi r_{orbital}}{v_{Estació}}$$

0.2 $$T = \frac{2\pi\cdot6{,}76\times10^6}{7{,}68\times10^3} = 5530 s = 92{,}2\,\text{min}$$

b)

0.2 $$E_{mecànica} = 0 \Rightarrow E_{cinètica} = -E_{Potencial}$$

0.2 $$\frac{1}{2}m_{coet}v_{escap.}^2 = G\frac{M_T m_{coet}}{r_{orbital}} \Rightarrow v_{escap.} = \sqrt{\frac{2GM_T}{r_{orbital}}}$$

0.2 $$v_{esc} = \sqrt{\frac{2\times6{,}67\cdot10^{-11}\times5{,}98\times10^{24}}{6{,}76\times10^6}} = 1{,}09\times10^4\, m/s$$

0.4 $$\Delta v = v_{esc} - v_{Estació} = 3{,}18\times10^3\, m/s$$

Opció A

P3)

a)

0.2 Satèl·lit geostacionari ⇒ període orbital és de 24 h. Per tant l'Sputnik NO es un satèl·lit geostacionari.

0.2 $$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}\ ;\ F_g = ma_c = m\frac{v^2}{R_T+h} = m\frac{\omega^2(R_T+h)^2}{R_T+h}\Big\}$$

0.2 $$\left.\begin{array}{l} G\dfrac{M_T m}{(R_T+h)^2} = m\omega^2(R_T+h) \\ \omega = \dfrac{2\pi}{T} \end{array}\right\} (R_T+h)^3 = G\frac{M_T T^2}{4\pi^2} \Rightarrow R_T+h = \sqrt[3]{G\frac{M_T T^2}{4\pi^2}}$$

0.4 $$h = \sqrt[3]{G\frac{MT^2}{4\pi^2}} - R_T = \sqrt[3]{6{,}67\times10^{-11}\frac{5{,}97\times10^{24}(96{,}2\cdot60)^2}{4\pi^2}} - 6370\times10^3 = 5{,}82\cdot10^5\,m$$

b)

Per situar-lo a la seva òrbita circular: $\Delta E_m = E_{m,orbital} - E_{m,\text{superficie}}$

Càlcul de la $E_{m,orbital}$: $E_{m,orbital} = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_T m}{R_T+h}$ 0.2

$$v^2{}_{orbital} \Rightarrow F_g = ma_c = m\frac{v^2}{R_T+h}$$

$$G\frac{M_T m}{(R_T+h)^2} = m\frac{v^2}{R_T+h} \Rightarrow v^2 = \frac{GM_T}{R_T+h}$$ 0.1

També és correcte obtenir la velocitat a partir de: $v = \dfrac{2\pi(R_T+h)}{T}$

0.1 $$E_{m,orbital} = -\frac{1}{2}\frac{GM_T m}{R_T+h} = -\frac{1}{2}\frac{6{,}67\times10^{-11}\times5{,}97\times0^{24}\times83.6}{6370\times10^3+5{,}82\times10^5} = -2{,}39\times10^9\,J$$

Càlcul de la $E_{m,superfície}$: $E_{m,\text{superficie}} = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2{}_{\text{sup}} - G\frac{M_T m}{R_T}$ 0.2

0.2 $$E_{m,\text{superficie}} = \frac{1}{2}83{,}6\times325^2 - 6{,}67\times10^{-11}\frac{5{,}97\times10^{24}\times83{,}6}{6370\times10^3} = -5{,}22\times10^9\,J$$

0.2 $$\Delta E_m = E_{m,orbital} - E_{m,\text{superficie}} = 2{,}83\times10^9\,J$$

42. PAU 2015 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 3 (Opció B)

Opció B

P3)

a)

0.2 La condició d'escapament exigeix que la $E_m = 0$

0.5 $$E_m = E_C + E_P = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} m v_{esc}^2 + \left(-G \frac{Mm}{R} \right) = 0$$

0.3 $$\frac{1}{2} m v_{esc}^2 = G \frac{Mm}{R} \Rightarrow v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

b)

Denominem, $v_{inicial} = v_0 = \frac{1}{2} v_{esc} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2GM}{R_L}}$

0.1 Abans de tornar a caure, la $v_{final} = 0$

0.1 $$E_{m,inicial} = E_{m,final}$$

0.2 $\frac{1}{2} m v_0^2 + \left(-G \frac{Mm}{R_L} \right) = 0 + \left(-G \frac{Mm}{R} \right)$; on $R = R_L + h$ i h l'altura respecte a la superfície lunar, a la qual arribarà l'objecte abans de tornar a caure.

$$m \left(\frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{2GM}{R_L} - \frac{GM}{R_L} \right) = -G \frac{M}{R} \Rightarrow$$

0.4 $$\Rightarrow \frac{1}{4} \frac{1}{R_L} - \frac{1}{R_L} = -\frac{1}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{4} \frac{1}{R_L} = -\frac{1}{R} \Rightarrow R = \frac{4}{3} R_L$$

0.2 $$R = \frac{4}{3} 1737 \times 10^3 = 2{,}316 \times 10^6 m \Rightarrow h = R - R_L = 579 km$$

43. PAU 2014 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 1 (Part comuna)

P1)

a)

$$\frac{mv^2}{R_T+h} = G\frac{M_T m}{(R_T+h)^2}\boxed{\mathbf{0.2}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T+h}} = 6,31\cdot 10^3\,\text{m/s}\boxed{\mathbf{0.2}}$$

$$v = \omega(R_T+h) = \frac{2\pi}{T}(R_T+h)\boxed{\mathbf{0.2}} \Rightarrow T = \frac{2\pi(R_T+h)}{v}\boxed{\mathbf{0.2}} = 9,96\cdot 10^3\,\text{s}\boxed{\mathbf{0.2}}$$

b) En el punt P tindrem:

$$\left.\begin{array}{rl} E_c & = \frac{1}{2}mv^2 = 4,9\cdot 10^{10}\,\text{J}\boxed{\mathbf{0.1}} \\ E_p & = -\frac{GM_T m}{R_T+h_P} = -7,96\cdot 10^{10}\,\text{J}\boxed{\mathbf{0.2}} \end{array}\right\} E_T = E_c + E_p = -3,06\cdot 10^{10}\,\text{J}\boxed{\mathbf{0.1}}$$

En el punt A, degut a que l'energia total es conserva al llarg de la trajectòria, tindrem:

$$\left.\begin{array}{rl} E_T & = -3,06\cdot 10^{10}\,\text{J}\boxed{\mathbf{0.2}} \\ E_p & = -\frac{GM_T m}{R_T+h_A} = -5,01\cdot 10^{10}\,\text{J}\boxed{\mathbf{0.2}} \end{array}\right\} E_c = E_T - E_p = 1,95\cdot 10^{10}\,\text{J}\boxed{\mathbf{0.2}}$$

44. PAU 2014 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 1 (Part comuna)

SÈRIE 3

P1)

a)

$$m\omega^2(R_T+d) = \frac{GM_T m}{(R_T+d)^2}\boxed{\mathbf{0.2}} \Rightarrow (R_T+d)^3 = \frac{GM_T T^2}{4\pi^2} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} - R_T\ \boxed{\mathbf{0.6}} = 3,59\cdot 10^4 km\ \boxed{\mathbf{0.2}}$$

Si deixen de restar el radi de la Terra se'ls resta **0.2** punts

b)

$$E_c = \frac{1}{2}m\omega^2(R_T+d)^2 = \frac{1}{2}\frac{GM_T m}{R_T+d} = 9,42\cdot 10^9\,\text{J}\ \boxed{\mathbf{0.3}}$$

Per tal que el satèl · lit s'allunyi de l'atracció de la Terra, la seva energia mecànica ha de ser 0 $\boxed{\mathbf{0.2}}$ $\Rightarrow$

$$E_m = E_c + E_p = -\frac{1}{2}\frac{GM_T m}{R_T+d} = -E_c\boxed{\mathbf{0.3}}$$

Per tant caldrà subministrar-li una energia igual a $E_c = 9,42\cdot 10^9\text{J}$ $\boxed{\mathbf{0.2}}$

45. PAU 2014 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 1 (Part comuna)

SÈRIE 4

P1)

a) La força gravitatòria és conservativa, per tant l'energia total d'un cos es conserva al llarg de la seva trajectòria: **0.2**

$$\frac{1}{2}\not{m}\,v_0^2 - G\frac{\not{m}M_L}{h_0+R_L} = \frac{1}{2}\not{m}\,v_1^2 - G\frac{\not{m}M_l}{R_L}\ \boxed{\mathbf{0.3}} \Rightarrow \frac{1}{2}v_1^2 = \frac{1}{2}v_0^2 + G\,M_L\left\{\frac{1}{R_L} - \frac{1}{R_L+h_0}\right\} \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2GM_L\,\frac{h_0}{R_L(R_L+h_0)}}\ \boxed{\mathbf{0.3}} = 4,71\cdot 10^3 \text{m/s}\ \boxed{\mathbf{0.2}}$$

b) L'energia mecànica del meteorit serà:

$$E_m = \frac{1}{2}\,m\,v_0^2 - G\,\frac{mM_L}{R_L+h_0}\ \boxed{\mathbf{0.2}} = 3.31\cdot 10^9\ \text{J}\ \boxed{0.2}$$

Per un cos de la mateixa massa, però en òrbita a la mateixa distància, l'energia mecànica és:

$$E_o = -\frac{1}{2}\,G\,\frac{mM_L}{R_L+h_0}\ \boxed{\mathbf{0.2}} = -8,35\cdot 10^7\ \text{J}\ \boxed{0.2}$$

Com es pot comprovar: $E_m > E_o$ **0.2**

46. PAU 2013 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 1 (Part comuna)

P1)

a)

$$G\frac{M_L}{(R_L+h)^2} = (R_L+h)\,\omega^2\ \boxed{\mathbf{0.4}} \Rightarrow M_L = \frac{(R_L+h)^3}{G}\,\omega^2\ \boxed{\mathbf{0.2}}$$

$$M_L = \frac{\left(1.74\times 10^6 + 10^5\right)^3}{6,67\times 10^{-11}}\left(\frac{2\pi}{1,18\times 10^2\cdot 60}\right)^2 = 7,36\times 10^{22}\ \text{kg}\ \boxed{\mathbf{0.2}}$$

$$g_L = G\frac{M_L}{R_L^2} = 1,62\ \text{m/s}^2\ \boxed{\mathbf{0.2}}$$

b)

$$E_{\text{mecànica superfície Lluna}} = -G\,\frac{M_L\,m}{R_L} + \frac{1}{2}m\,v^2\ \boxed{\mathbf{0.5}}$$

Un objecte es podrà escapar de la superfície de la Lluna si la seva energia mecànica és zero **0.25** $\Rightarrow$

$$-G\,\frac{M_L\,\not{m}}{R_L} + \frac{1}{2}\not{m}\,v^2 = 0 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2G\,M_L}{R_L}} = \sqrt{\frac{2\times 6.67\times 10^{-11}\ 7,36\times 10^{22}}{1,74\times 10^6}} = 2,38\times 10^3\ \text{m/s}\ \boxed{\mathbf{0.25}}$$

47. PAU 2013 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 1 (Part comuna)

P1)

a)

$$\frac{GM_T m_s}{(h+R_T)^2} = m_s\omega^2(h+R_T) = m_s\frac{4\pi^2}{T^2}(h+R_T)\boxed{\mathbf{0.2}} \Rightarrow$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2(h+R_T)^3}{GM_T}\boxed{\mathbf{0.1}}\ T = 2\pi\sqrt{\frac{(h+R_T)^3}{GM_T}}\boxed{\mathbf{0.1}} = 2\pi\sqrt{\frac{(3,00\times10^7)^3}{6,67\times10^{-11}\ 5,98\times10^{24}}} = 5,17{\times}10^4\text{s} = 14,4\,\text{h}\boxed{\mathbf{0.6}}$$

b)

$$v = \omega(h+R_T) = \frac{2\pi}{T}(h+R_T)\boxed{\mathbf{0.5}} = 3,65\times10^3\ \text{m/s} = 3,65\ \text{km/s}\boxed{\mathbf{0.5}}$$

48. PAU 2013 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 1 (Part comuna)

P1)

a)

$$g_C = \frac{GM_C}{R_C^2} = 6,67\cdot10^{-11}\ \frac{9,43\cdot10^{20}}{(477\cdot10^3)^2} = 2,76\cdot10^{-1}\ \text{m/s}^2\ \boxed{\mathbf{0.5}}$$

Per poder sortir de l'òrbita de Ceres s'ha d'assolir una velocitat mínima (d'escapament) tal que l'energia mecànica sigui com a mínim 0: $E_m = 0\ \boxed{\mathbf{0.1}}$ Per tant:

$$E_m = 0 = \frac{1}{2}\,m\,v^2 - G\,\frac{M_C m}{R_C}\ \boxed{\mathbf{0.2}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2\,G\,M_C}{R_C}} = \sqrt{\frac{2\cdot6,67\cdot10^{-11}\,9,43\cdot10^{20}}{477\cdot10^3}} = 514\ \text{m/s}\ \boxed{\mathbf{0.2}}$$

b)

$$\left.\begin{array}{rl} \frac{GM_S M_C}{d_{S-C}^2} &= M_C\left(\frac{2\pi}{T_T}\right)^2 d_{S-C} \Rightarrow d_{S-C}^3 = \frac{GM_S}{4\pi^2}\,T_C^2 \\ \frac{GM_S M_T}{d_{S-T}^2} &= M_T\left(\frac{2\pi}{T_T}\right)^2 d_{S-T} \Rightarrow d_{S-T}^3 = \frac{GM_S}{4\pi^2}\,T_T^2 \end{array}\right\}\ \boxed{\mathbf{0.2}} \Rightarrow$$

$$\frac{d_{S-C}^3}{d_{S-T}^3} = \frac{T_C^2}{T_T^2}\ (3^{\text{a}}\ \text{llei de Klepler})\ \boxed{\mathbf{0.3}} \Rightarrow d_{S-C} = d_{S-T}\sqrt[3]{\frac{T_C^2}{T_T^2}} = 1,50{\cdot}10^{11}\ \sqrt[3]{4,60^2} = 4,15{\cdot}10^{11}\text{m}\ \boxed{\mathbf{0.5}}$$

49. PAU 2012 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 1 (Part comuna)

P1)

a)

$$\frac{GM_W m_p}{R^2} = m_p\,\omega^2\,R = m_p\,\frac{4\pi^2}{T^2}\,R\ [\mathbf{0.4}] \Rightarrow$$

$$R^3 = \frac{GM_W T^2}{4\pi^2} \Rightarrow$$

$$R = \left(\frac{GM_W T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}[\mathbf{0.4}] = \left(\frac{6,67\times10^{-11}\cdot2,66\times10^{30}\cdot(22,6\cdot3600)^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 3,10{\times}10^9\text{m} = 3,10{\times}10^6\text{km}\ [\mathbf{0.2}]$$

b)

$$E_c = \frac{1}{2}m_p\,v^2 = \frac{1}{2}m_p\,(\omega\,R)^2 = \frac{1}{2}\,\frac{GM_W m_p}{R}\ [\mathbf{0.4}] = 5,44\times10^{38}\ \text{J}\ [\mathbf{0.1}]$$

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}\,\frac{GM_W m_p}{R} + \left(-\,\frac{GM_W m_p}{R}\right) = -\frac{1}{2}\,\frac{GM_W m_p}{R} = -\,E_c\ [\mathbf{0.4}] = -5,44{\times}10^{38}\ \text{J}\ [\mathbf{0.1}]$$

50. PAU 2012 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1 (Part comuna)

P1)

a)

$$G\frac{M_{planeta}\ M_{estrella}}{R^2_{orbita\ planeta}} = M_{planeta}\ R_{orbita\ planeta}\ \omega^2_{planeta}\ [\mathbf{0.5}];\ \omega_{planeta} = \frac{2\pi}{T_{planeta}}\ [\mathbf{0.3}]$$

$$M_{estrella} = \frac{R^3_{orbita\ planeta}\ \omega^2_{planeta}}{G} = \frac{R^3_{orbita\ planeta}}{G}\left(\frac{2\pi}{T_{planeta}}\right)^2 = 1,87\times10^{30}kg\ [\mathbf{0.2}]$$

b)

$$g_{planeta} = G\frac{M_{planeta}}{R^2_{planeta}} = 16,9\frac{m}{s^2}\ [\mathbf{0.3}];\quad \frac{1}{2}m\ v^2_{esc} - G\frac{M_{planeta}\ m}{R_{planeta}} = 0\ [\mathbf{0.5}]$$

$$v_{esc} = \sqrt{2G\frac{M_{planeta}}{R_{planeta}}} = \sqrt{2g_{planeta}\ R_{planeta}} = 1,90\times10^4\frac{m}{s}\ [\mathbf{0.2}]$$

51. PAU 2012 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 1 (Part comuna)

P1)

a) La força d'atracció gravitatòria és igual a la força centrípeta necessària perquè el satèl·lit giri en la seva òrbita: [**0.2**]

$$\frac{GM_Tm_s}{(R_T+h)^2} = m_s\omega^2(R_T+h)\ [\mathbf{0.4}] = m_s\frac{4\pi^2}{T^2}(R_T+h)$$

Per tant el període del satèl·lit serà:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2(R_T+h)^3}{GM_T}}\ [\mathbf{0.2}] = 6,00\times10^3\ \text{s}\ [\mathbf{0.2}]$$

b) Suposant que la fricció és menyspreable, podem aplicar el principi de conservació de l'energia:

$$\left.\begin{array}{rl} \frac{GM_Tm_s}{(R_T+h)^2} & = m_s\ \frac{v^2}{(R_T+h)} \\ (E_c\ +\ E_p)|_{òrbita} & = \frac{1}{2}m_s\ v^2\ -\frac{GM_Tm_s}{(R_T+h)} \end{array}\right\}\ \Rightarrow$$

$$(E_c\ +\ E_p)|_{òrbita} = -\frac{1}{2}\ \frac{GM_Tm_s}{(R_T+h)}\ [\mathbf{0.2}]$$

$$(\Delta E\ +\ E_p)|_{superfície\ de\ la\ Terra} = (E_c\ +\ E_p)|_{òrbita} = -\frac{1}{2}\ \frac{GM_Tm_s}{(R_T+h)}[\mathbf{0.2}]$$

Per tant:

$$\Delta E|_{superfície\ de\ la\ Terra} = E_m|_{òrbita} - E_p|_{superfície\ de\ la\ Terra}\ [\mathbf{0.2}]\ \Rightarrow$$

$$\Delta E|_{superfície\ de\ la\ Terra} = -\frac{1}{2}\frac{GM_Tm_s}{(R_T\ +\ h)} + \frac{GM_Tm_s}{R_T}\ [\mathbf{0.2}]\ \Rightarrow$$

$$\Delta E|_{superfície\ de\ la\ Terra} = \text{Energia necessària per posar el satèl.lit en òrbita} =$$

$$GM_Tm_s\ \frac{R_T+2h}{2(R_T\ +\ h)\ R_T} = 1.68\times10^{11}\ \text{J}\ [\mathbf{0.2}]$$

52. PAU 2011 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2

P2)

a)

$$K = \frac{T^2}{R^3} \Rightarrow \begin{array}{c} K_{\text{Venus}} = 1,00142 \sim 1,00 \ \frac{\text{anys}^2}{\text{UA}^3} \\ K_{\text{Júpiter}} = 1,00037 \sim 1,00 \ \frac{\text{anys}^2}{\text{UA}^3} \\ K_{\text{Saturn}} = 0,99891 \sim 1,00 \ \frac{\text{anys}^2}{\text{UA}^3} \end{array} \quad [\mathbf{0.75}]$$

$$\overline{K} = \frac{K_{\text{Venus}} + K_{\text{Júpiter}} + K_{\text{Saturn}}}{3} = 1,0002 \sim 1,00 \frac{\text{anys}^2}{\text{UA}^3} \ [\mathbf{0.25}]$$

b)

$$G\frac{M_{\text{Sol}}M_{\text{Terra}}}{R^2_{\text{Terra-Sol}}} = M_{\text{Terra}}R_{\text{Terra-Sol}}\left(\frac{2\pi}{T_{\text{Període orbital Terra}}}\right)^2 \ [\mathbf{0.25}]$$

$$M_{\text{Sol}} = \frac{R^3_{\text{Terra-Sol}}4\pi^2}{GT^2_{\text{Període orbital Terra}}} = 1,99 \times 10^{30} kg \ [\mathbf{0.25}]$$

$$g_{\text{Mart}} = G\frac{M_{\text{Mart}}}{R^2_{\text{Mart}}} = 6,67 \times 10^{-11}\frac{0,107 \times 5,974 \times 10^{24}}{(0,532 \times 6,378 \times 10^6)^2} = \ 3,70 \ m/s^2 \ [\mathbf{0.5}]$$

53. PAU 2011 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 3 (Opció A)

OPCIÓ A
P3)

a)

$$\begin{aligned} g_s &= \tfrac{G\ M}{R^2} \\ g_h &= \tfrac{G\ M}{(R\ +\ h)^2} \end{aligned}$$

[0.5]

$$\begin{aligned} \frac{g_s}{g_h} &= \left(\frac{R\ +\ h}{R}\right)^2 \Rightarrow \\ \sqrt{\frac{g_s}{g_h}} &= \frac{R\ +\ h}{R} \Rightarrow \\ R\ =\ \frac{h}{\sqrt{\frac{g_s}{g_h}}\ -\ 1} &= 5850 km \end{aligned}$$

[0.5]

b) Si r es l'hipotètic radi de l'òrbita, es verifica:

$$\begin{aligned} G\ \frac{M_T\ m}{r^2} &= \frac{m\ v^2}{r}\ [\mathbf{0{,}5}] \Rightarrow \\ r &= \frac{G\ M_T}{v^2} \Rightarrow \\ r\ =\ 3{,}989 \times 10^6\ m\ &= 3989\ km\ [\mathbf{0{,}25}] \end{aligned}$$

Com que $r\ <\ R_T$, aquesta òrbita no és possible **[0.25]**

54. PAU 2010 · Setembre · Sèrie 2 · Exercici 1

SÈRIE 2

P1

a) $\frac{T_T^2}{d_T^3} = \frac{T_J^2}{d_J^3}$ **[0,6]**

$T_J^2 = \frac{d_J^3}{d_T^3} T_T^2 \Rightarrow T_J = \sqrt{5,203^3 \cdot 1^2} = 11,87 \text{ anys}$ **[0,4]**

b) $\frac{1}{2} m v_{esc}^2 - G\frac{M_J m}{R_J} = 0$ **[0,5]**

$v_{esc} = \sqrt{2G\frac{M_J}{R_J}}$ **[0,1]**

A més: $g = G\frac{M_T}{R_T^2} \Rightarrow G\frac{M_T}{R_T} = gR_T$ **[0,2]**

$v_{esc} = \sqrt{2G\frac{M_J}{R_J}} = \sqrt{2G\frac{317,8M_T}{10,52R_T}} = \sqrt{2 \cdot \frac{317,8}{10,52} \cdot gR_T} = 6,14 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ **[0,2]**

55. PAU 2010 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 5 (Opció A)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

56. PAU 2010 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 5 (Opció B)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

57. PAU 2010 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 1

P1

a)

$G\frac{M_{Terra}M_{ISS}}{(R_{Terra}+h_{ISS})^2} = M_{ISS}\frac{v_{ISS}^2}{R_{Terra}+h_{ISS}}$ **[0,5]**

$v_{ISS} = \sqrt{G\frac{M_{Terra}}{R_{Terra}+h_{ISS}}} = 7,7 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ **[0,2]**

$v_{ISS} = \frac{2\pi(R_{Terra}+h_{ISS})}{T_{ISS}} \Rightarrow T_{ISS} = 5492 \text{ s}$ **[0,3]**

b) $E = -G\frac{M_{Terra}M_{ISS}}{R_{Terra}+h_{ISS}} + \frac{1}{2}M_{ISS}v_{ISS}^2$ **[0,5]**

$E = -1,1 \cdot 10^{13} \text{ J}$ **[0,2]**, el signe negatiu indica que és una òrbita tancada. **[0,3]**

58. PAU 2010 · Juny · Sèrie 5 · Exercici 1

P1

a) $\vec{F} = m\vec{a}$; $G\dfrac{M_T m}{(R_T+h)^2} = ma_c = m(R_T+h)\omega^2$ **[0,4]**

$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ **[0,2]**; $G\dfrac{M_T m}{(R_T+h)^2} = m(R_T+h)\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt[3]{\dfrac{GM_T T^2}{4\pi^2}} - R_T = 3{,}43\cdot 10^5 \text{ m}$ **[0,4]**

b) Per adquirir la velocitat d'escapament se li ha de suministrar una energia perque el satèl·lit arribi a l'infinit, on E_m=0. **[0,2]** [cal alguna discusió energètica per entendre els càlculs que fan]

$\Delta E = E_{final} - E_{inicial} = -E_{inicial} = -E_{satel.lit}$ **[0,2]**

$E_{satel.lit} = -\dfrac{1}{2}G\dfrac{M_T m}{R_T+h} = -2{,}31\cdot 10^{11}\text{ J}$ **[0,4]**

Se li ha de suministrar una energia: $\Delta E = E_{final} - E_{inicial} = -E_{inicial} = -E_{satel.lit} = 2{,}31\cdot 10^{11}\text{ J}$ **[0,2]**

59. PAU 2009 · Setembre · Sèrie 1 · Exercici 1

P1

a) $G\frac{M_T m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$ **[0,4]**; $v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = 5{,}16\cdot 10^2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ **[0,1]**

$v = \frac{2\pi r}{T}$ **[0,3]**; $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi\cdot 1{,}5\cdot 10^9}{5{,}16\cdot 10^2} = 1{,}83\cdot 10^7\,\text{s} = 211{,}4\,\text{dies}$ **[0,2]**

b) $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = 2{,}40\cdot 10^8\,\text{J}$ **[0,3]**;

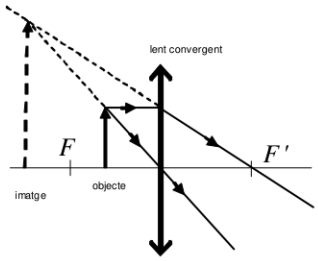
$E_p = -G\frac{M_T m}{r} = -4{,}79\cdot 10^8\,\text{J}$ **[0,4]** [si no posen el signe bé **[0,2]**]

$E_m = E_c + E_p = -2{,}39\cdot 10^8\,\text{J}$ **[0,3]**

c) $E_m\,(\text{òrbita}) = E_m\,(\text{superfície Terra})$ **[0,4]**

$-G\frac{M_T m}{r} = \frac{1}{2}mv_T^2 - G\frac{M_T m}{R_T}$ **[0,4]**; $v_T = \sqrt{2M_T G\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{r}\right)} = 1{,}12\cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ **[0,2]**

Q1



[0,6]

La imatge serà virtual **[0,1]**, dreta **[0,1]** i més gran **[0,1]** que l'objecte

Sí, haurem situat correctament la feltxa respecte la lupa. **[0,1]**

Q2

L'èmbol segueix un mhs: $x = A\sin(\omega t + \varphi_0) = A\sin\varphi$

i la velocitat: $v = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0) = A\omega\cos\varphi$ **[0,1]**

$A = \frac{D}{2} = 50\,\text{cm}$ **[0,2]**

$\omega = 60\,\text{rpm} = 60\frac{\text{voltes}}{\text{min}}\frac{2\pi\,\text{rad}}{1\,\text{volta}}\frac{1\,\text{min}}{60\,\text{s}} = 2\pi\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ **[0,2]**

Quan està a 20cm d'un extrem del recorregut: x=30cm:

$0{,}30 = 0{,}50\sin\varphi \;\Rightarrow \sin\varphi = 0{,}6 \;\Rightarrow\; \cos\varphi = \pm 0{,}8$ **[0,2]**

$v(30\,\text{cm}) = A\omega\cos\varphi = 0{,}50\cdot 2\pi\cdot\cos\varphi = \pm 2{,}51\,\text{m/s}$ **[0,3]**

Valoreu la resposta anàlogament si en lloc de la funció sinus posen $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

60. PAU 2009 · Juny · Sèrie 4 · Exercici 2 (Opció B)

OPCIÓ B

P2

a)

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 1{,}45 \cdot 10^{-4}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ **[0,2]**; on $T = 12\,\text{h} = 4{,}32 \cdot 10^{4}\ \text{s}$ **[0,1]**

$\vec{F} = m\vec{a}$; $G\frac{Mm}{r^2} = m\omega^2 r$ **[0,4]**; $r = \left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{1/3} = 26{,}6 \cdot 10^{6}\ \text{m}$ **[0,1]**;

altura sobre la superfície terrestre: $h = r - R_T = 20{,}2 \cdot 10^{6}\ \text{m}$ **[0,2]**

b) $v = \omega r$; $v = 3{,}87 \cdot 10^{3}\ \text{m/s}$ **[0,4]**;

$E_m = E_p + E_c$; $E_m = -G\frac{Mm}{r} + \frac{1}{2}mv^2$ **[0,4]**; $E_m = -1{,}12 \cdot 10^{9}\ \text{J}$ **[0,2]**

c) $r' = R_T + h' = R_T + 2h = 6{,}38 \cdot 10^{6} + 2 \cdot 20{,}2 \cdot 10^{6} = 4{,}68 \cdot 10^{7}\ \text{m}$ **[0,1]**

$G\frac{Mm}{r'^2} = m\frac{v^2}{r'}$; $v = \sqrt{G\frac{M}{r'}} = 2{,}92 \cdot 10^{3}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ **[0,4]**

$v' = \frac{2\pi r'}{T'}$ **[0,3]**; $T' = \frac{2\pi r'}{v'} = \frac{2\pi \cdot 4{,}68 \cdot 10^{7}}{2{,}92 \cdot 10^{3}} = 1{,}01 \cdot 10^{5}\ \text{s} = 1{,}17\ \text{dies}$ **[0,2]**

Les dues qüestions de l'opció B puntuen entre totes dues un mínim de 0 punts i un màxim de 2 punts. Una resposta correcta es puntua amb 0,50 punts, una resposta en blanc són 0 punts i una resposta errònia es puntual amb –0,25 punts. Si la suma de les notes de les dues qüestions és negativa puntueu amb un zero. No poseu puntuacions totals negatives

Q3

1. C
2. B

Q4

1. C
2. A

61. PAU 2008 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 1

P1

a) $F = G\frac{mM}{r^2} \Rightarrow g = G\frac{M}{R^2}$ $\begin{cases} \text{Terra } g_T = G\frac{M_T}{R_T^2} \\ \text{Júpiter } g_J = G\frac{M_J}{R_J^2} \end{cases}$; $g_T\frac{R_T^2}{M_T} = g_J\frac{R_J^2}{M_J}$ **[0,5]**

$g_J = g_T\frac{R_T^2}{R_J^2}\frac{M_J}{M_T} = 9{,}8\cdot\left(\frac{6378\cdot10^3}{71492\cdot10^3}\right)^2\cdot318 = 24{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ **[0,5]**

La resolució d'aquest problema es valorarà correctament si, en lloc de seguir el procediment anterior, es resol utilitzant el valor numèric de G, malgrat no es doni en l'enunciat.

$g_J = G\frac{M_J}{R_J^2}$ **[0,5]**; $g_J = 24{,}8\,\text{m/s}^2$ **[0,5]**

b) $\frac{1}{2}mv_e^2 = mg_JR_J$ **[0,5]**; $v_e = \sqrt{2g_JR_J} = \sqrt{2\cdot24{,}8\cdot71492\cdot10^3} = 59.548\frac{\text{m}}{\text{s}}$ **[0,5]**

c) tercera llei de Kepler: $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_S}R^3$

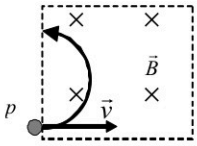
$\left(\frac{T_J}{T_T}\right)^2 = \left(\frac{R_J}{R_T}\right)^3$ **[0,6]** $\Rightarrow$ $T_J = T_T\left(\frac{R_J}{R_T}\right)^{3/2} = 11{,}81\,\text{anys}$ **[0,4]**

Q1

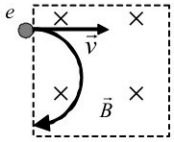
$W = \Delta E_m = E_{final} - E_{inicial}$ **[0,3]**; $W = \frac{1}{2}mv_f^2 - mgh_i = \frac{1}{2}\cdot20\cdot15^2 - 20\cdot9{,}8\cdot25 = -2.650\,\text{J}$ **[0,7]**. L'energia perduda és igual a l'energia dissipada pel fregament.

Q2

La força és perpendicular a la velocitat i, per tant, no produeix treball, modifica la direcció de la velocitat de la partícula però no el seu mòdul. Així, l'acceleració tangencial de la pertícula és nul·la. Les partícules descriuran un moviment circular uniforme. Les trajectòries seran dues circumferències. **[0,2]**



[0,2]



[0,2] (Les trajectòries no estan fetes a escala).

La força magnètica, $F = qvB$, proporciona la força centrípeta;

$qvB = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv}{qB}$ **[0,2]**; $\frac{R_p}{R_e} = \frac{m_p}{m_e} = \frac{1{,}67\cdot10^{-27}}{9{,}11\cdot10^{-31}} = 1.833$ **[0,2]**

62. PAU 2007 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 2 (Opció A)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

63. PAU 2007 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 1

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

64. PAU 2006 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 1

PAUTES DE CORRECCIÓ — FÍSICA
SÈRIE 3 — CURS 2005–06

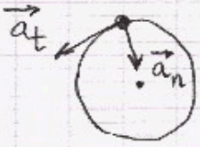
P1. a) $G\frac{M_S M_M}{R^2} = M_M \omega^2 R$ [0,5] $\rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{G M_S}}$ [0,3]

$T =$ [81.814 s (22,7 h)] [0,2]

b) $g = G\frac{M_M}{R_M^2}$ [0,7] $\rightarrow g =$ [0,066 m/s^2] [0,3]

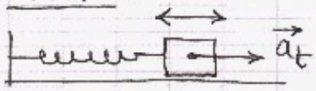
c) $\frac{1}{2} m v_e^2 = G\frac{M_M \cdot m}{R_M}$ [0,4] $\rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GM_M}{R_M}}$ [0,4] $\rightarrow v_e =$ [161 m/s] [0,2]

Q1. a) MCUA. Posseeix:



$\vec{a}_t$ perquè $|\vec{v}|$ varia en el temps. [0,2]
$\vec{a}_n$ perquè descriu una trajectòria circular [0,3]

b) MVHS.



Posseeix:
$\vec{a}_t$ perquè $|\vec{v}|$ varia en el temps [0,2]
~~$\vec{a}_n$~~: no, perquè descriu una trajectòria rectilínea. [0,3]

Q2. a) $y(x,t) = A \cdot \sin(kx - \omega t)$ [0,1]

$\lambda = 2\pi/k$ [0,2] $\rightarrow \lambda = 2\pi/2\pi =$ [1 m] [0,1]

$T = 2\pi/\omega$ [0,2] $\rightarrow T = 2\pi/2\pi\cdot 10 =$ [0,1 s] [0,1]

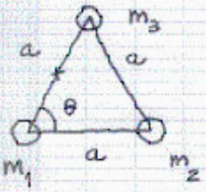
b) $v = \lambda/T$ [0,2] $\rightarrow v = 1/0{,}1 =$ [10 m/s] [0,1]

65. PAU 2005 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 1

PAUTES DE CORRECCIÓ

SÈRIE 3. PAU. LOGSE. CURS 2004-05 FÍSICA

P1.



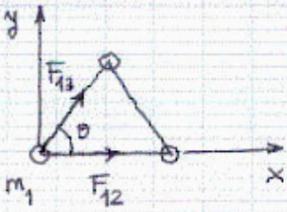
a) $W = -G\left[\frac{m_1 m_3}{a} + \frac{m_1 m_2}{a} + \frac{m_2 m_3}{a}\right]$ 0,6

$W = \boxed{-4{,}2 \cdot 10^{-10}\ \text{J}}$ 0,4

b) $V = -G\left[\frac{m_1}{a/2} + \frac{m_3}{a/2} + \frac{m_2}{a \sin\theta}\right]$ amb $\theta = 60°$ 0,6

$V = \boxed{-3{,}7 \cdot 10^{-10}\ \text{J/kg}}$ 0,4

c)



$\vec{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{a^2}(1,0)$ 0,3

$\vec{F}_{13} = G\frac{m_1 m_3}{a^2}(\cos\theta, \sin\theta)$ 0,4

$\vec{F}_T = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} = G\left(\frac{2}{3},0\right) + G\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = G\left(\frac{7}{6},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ N.

$|\vec{F}_T| = \boxed{9{,}7 \cdot 10^{-11}\ \text{N}}$ 0,3

Q1. a) $m_1 v_1 + 0 = (m_1 + m_2) v'$ 0,3 $\rightarrow v' = \frac{1}{1+2} 5 = \boxed{1{,}67\ \text{m/s}}$ 0,2

b) $\Delta E = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v'^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2$ 0,3 $\rightarrow \Delta E = \boxed{-8.333\ \text{J}}$ 0,2

Q2. $x = 0{,}3 \sin(20\pi t) \rightarrow v = 6\pi \cos(20\pi t) \rightarrow a = -120\pi^2 \sin(20\pi t)$

a) $E_{c\,max} = \frac{1}{2} m v_{max}^2$ 0,3 $\rightarrow E_{c\,max} = \frac{1}{2}(0{,}5)(6\pi)^2 = \boxed{88{,}8\ \text{J}}$ 0,2

b) $F_{max} = m \cdot a_{max}$ 0,3 $\rightarrow F_{max} = (0{,}5)(120\pi^2) = \boxed{592{,}2\ \text{N}}$ 0,2

66. PAU 2005 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 2 (Opció A)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

67. PAU 2004 · Setembre · Sèrie 5 · Exercici 2 (Opció B)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

68. PAU 2003 · Setembre · Sèrie 3 · Exercici 2 (Opció A)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

69. PAU 2003 · Juny · Sèrie 2 · Exercici 2 (Opció A)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

70. PAU 2001 · Setembre · Sèrie 4 · Exercici 2 (Opció B)

OPCIÓ B

P2.- a) $d=(18)^{1/2}/2$; $g=g_4 - g_2 = G(m_4 - m_2)/d^2$ = **$1{,}48\cdot10^{-9}$ N/kg**

direcció: **diagonal** del quadrat **;** sentit: **de m_2 a m_4**

b) $V = -3Gm_1/d - Gm_4/d$ = **$-1{,}57\cdot10^{-8}$ J/kg**

c) $\vec{F}$ = M g (cos 45, sin 45) = **($3{,}14\cdot10^{-7}$, $3{,}14\cdot10^{-7}$) N**

Q3.- $\varphi(1) = 0$; $\varphi(3) = 8$ rad $\rightarrow \Delta s = R\cdot\Delta\varphi$ = **24 m**

Q4.- Per **reduir pèrdues per efecte Joule.** Per una potència transportada ($P=V\cdot I$), I disminueix si V augmenta i per tant les pèrdues (I^2R) són menors.

71. PAU 2000 · Juny · Sèrie 1 · Exercici 1

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.

72. PAU 2000 · Juny · Sèrie 3 · Exercici 2 (Opció A)

Solució no disponible: la pauta oficial no la inclou o no s'ha pogut localitzar.